Стивен Вайнберг

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ

Том 1 < Основы > Гл. 1–14

Том 2 < Современные приложения > Гл. 15–23

Том 3 < Суперсимметрия > Гл. 24–32

В монографии «Квантовая теория полей»
лауреат Нобелевской премии Стивен Вайнберг
соединил свою исключительную физическую интуицию
с даром ясного изложения, создав исчерпывающее и замкнутое
введение в квантовую теорию поля,
соответствующее самым современным научным представлениям.

В томе III подробно изложены основы суперсимметрии — активно развивающейся области теоретической физики, которая вполне может оказаться в центре будущего развития физики элементарных частиц и гравитации. В тексте вводится и объясняется широкий круг понятий, включая алгебры суперсимметрии, суперсимметричные теории поля, расширенную суперсимметрию, супердиаграммы, непертурбативные результаты, теории суперсимметрий в пространствах высших размерностей и супергравитацию. Дан подробный обзор феноменологических приложений суперсимметрии, включая теории нарушения суперсимметрии, вызванного калибровочными полями и гравитацией. Дано введение в плодотворную математическую технику, основанную на аналитичности и дуальности. В книге освещено много результатов, которые не упоминаются в других монографиях, часть из них получена заново. В конце каждой главы приведены задачи.

Монография является незаменимым справочным пособием
для всех физиков и математиков,
интересы которых связаны с квантовой теорией поля,
а также прекрасным учебником
для студентов старших курсов и аспирантов.

The Quantum Theory of Fields

Volume III
Supersymmetry

Steven Weinberg
University of Texas at Austin

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

Стивен Вайнберг

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ

Том III

Суперсимметрия

Перевод с английского
под редакцией А. В. Беркова

ФАЗИС
Москва 2002

ББК 22.31
В 14
УДК 530.145

Издание поддержано фондом
«КНИГА–НАУКА–КУЛЬТУРА»

Вайнберг С.
Квантовая теория полей. Том III. **Суперсимметрия**
Перевод с англ. под редакцией А.В.Беркова
М.: ФАЗИС, 2002. XXII+458 с.

ISBN 5-7036-0078-2

Издательство ФАЗИС
123557 Москва, Пресненский вал, 42-44
e-mail: phasis@aha.ru http://www.aha.ru/~phasis

ППП Типография «Наука» Академиздатцентра РАН
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6
Заказ № 5846

ISBN 5-7036-0078-2

Содержание

Разделы, помеченные символом ☆, лежат несколько в стороне от основной линии изложения и могут быть опущены при первом чтении.

От издателя

В Ваших руках, уважаемый Читатель, один из томов классического труда лауреата Нобелевской премии Стивена Вайнберга — монографии «Квантовая теория полей», по праву считающейся энциклопедией в этой области теоретической физики XX века.

Впервые эта монография вышла в свет на английском языке в издательстве Cambridge University Press в трёх томах: 1-й том «Основы» — в 1995 году (и уже трижды переизданный, каждый раз — с исправлениями); 2-й том «Современные приложения» — в 1996 году (переизданный уже дважды); 3-й том «Суперсимметрия» — в 2000 году.

Судьба русского издания этой монографии оказалась, мягко говоря, непростой. Читатель, скорее всего, уже догадался об этом хотя бы по тому, что первым вышел в свет настоящий, *третий* том русского издания. Но и это удалось сделать в срок только благодаря поддержке истинных энтузиастов российской науки — как ведущих специалистов, так и молодых учёных. Большую помощь в подготовке 3-го тома оказали В. М. Вайнберг, М. М. Дёминов, Р. О. Зайцев, М. Г. Иванов, Г. Я. Коренман, Л. П. Котова; мой приятный долг — выразить им здесь искреннюю благодарность. Особая признательность — А. В. Беркову, потратившему много сил на оперативное редактирование переводов. Благодарю также многих других специалистов, чья поддержка и помощь позволила выйти в свет книге, которая перед Вами...

В. Филиппов

Москва, апрель 2002

Предисловие к тому III

В этом томе рассматриваются квантовые теории поля, подчиняющиеся условию суперсимметрии, т. е. симметрии, которая объединяет в единые мультиплеты частицы целого и полуцелого спина. Эти теории указывают на возможные пути решения «проблемы иерархии» — загадки чудовищно большого отношения планковской массы к равному 300 ГэВ масштабу энергии нарушения электрослабой симметрии. Суперсимметрия обладает, кроме того, свойством единственности, которое мы всегда ищем в фундаментальных физических теориях. Имеется бесконечно большое число групп Ли, которые можно использовать для объединения частиц одинакового спина в обычные мультиплеты симметрии, но лишь восемь типов суперсимметрии в четырех пространственно-временных измерениях, из которых лишь один, простейший тип можно непосредственно связать с наблюдаемыми частицами.

Эти причины достаточны для того, чтобы посвятить третий том «Квантовой теории полей» суперсимметрии. В дополнение к этому, основанные на суперсимметрии квантовые теории поля обладают рядом удивительных свойств, отсутствующих в других теориях поля. Так, в ряде суперсимметричных теорий константы связи не перенормируются ни в одном порядке теории возмущений, другие теории конечны, а некоторые даже допускают точные решения. На самом деле, за последнее десятилетие бóльшая часть самых интересных работ по квантовой теории поля так или иначе была связана с суперсимметрией.

К сожалению, после четверти века исследований все еще нет никаких прямых свидетельств наличия суперсимметрии, так как до сих пор не открыто ни одной пары частиц, связанных суперсимметричным преобразованием. Имеется лишь одно важное косвенное свидетельство суперсимметрии: объединение $SU(3)$, $SU(2)$ и $U(1)$ констант связи при высоких энергиях при наличии требуемых суперсимметрией дополнительных частиц осуществляется лучше, чем без них.

Тем не менее, благодаря внутренней привлекательности суперсимметрии и тем возможностям, которые она открывает для решения проблемы иерархии, я, как и многие другие физики, выражаю разумную уверенность в том, что, возможно, очень скоро будет доказано, что суперсимметрия имеет отношение к реальному миру. Суперсимметрия — главная цель планируемых экспериментов при высоких энергиях на существующих ускорителях и на строящемся Большом адронном коллайдере в ЦЕРНе.

После исторического введения (глава 24) в главах 25–27 представлены основные технические вопросы описания суперсимметричных теорий поля: структура алгебр суперсимметрии и мультиплетов, общая схема построения суперсимметричных лагранжианов и частные случаи построения лагранжианов для теорий киральных и калибровочных суперполей. Затем, в главе 28, эта техника используется для включения суперсимметрии в стандартную модель электрослабых и сильных взаимодействий. В этой же главе дан обзор экспериментальных трудностей и перспектив. В главах 29–32 идет речь о математически более сложных вопросах: непертурбативные результаты, супердиаграммы, супергравитация и суперсимметрия в пространствах большего числа измерений.

Я пытался, по мере сил, сделать изложение суперсимметрии как можно более ясным и самодостаточным. Где это было возможно, я не просто предъявлял читателю взятые из литературы результаты, а демонстрировал приводящие к этим результатам вычисления. Если такие вычисления оказывались слишком длинными или сложными для того, чтобы быть включенными в эту книгу, я старался представить упрощенные версии расчетов, которые могли бы дать читателю представление о физической сути обсуждаемых вопросов.

Хочу особо отметить, что в эту книгу включены вопросы, которые вообще не обсуждались в ранее изданных книгах, отчасти потому, что соответствующие результаты совсем новые. Сюда относятся: использование аналитичности для изучения пертурбативных и непертурбативных радиационных поправок; вычисление центральных зарядов; вызываемое гравитацией и аномалиями нарушение суперсимметрии; индекс Виттена; нарушение суперсимметрии полями модулей, а также первый обзор быстро развивающейся области суперсимметрии в высших измерениях, в том числе теорий с p-бранами.

С другой стороны, я сократил стандартное обсуждение двух вопросов, которые, как мне кажется, достаточно подробно освещены в ранее изданных книгах. Один из них — это использование супердиаграмм. Многие из рассматривавшихся ранее приложений формализма супердиаграмм к изучению общей структуры радиационных поправок могут быть теперь получены значительно проще с помощью описанных в разделах 27.6 и 29.3 рассуждений, основанных на аналитичности. Другой вопрос — это супергравитация. В разделах 31.1–31.5 я дал детальное и замкнутое описание супергравитации в пределе слабого поля, которое, во-первых, достаточно для ясного понимания того, почему ингредиенты теорий супергравитации — гравитон, гравитино и вспомогательные поля — такие, какие они есть, а, во-вторых, позволяет вывести ряд самых важных результатов теории супергравитации, в том числе, формулу для массы гравитино и масс калибрино, порожденных вызванным аномалиями нарушением суперсимметрии. В разделе 31.6 я обрисовал вычисления, обобщающие теорию супергравитации на гравитационные поля любой напряженности, однако эти вычисления столь длинны и малосимпатичны, что я ограничился цитированием других источников, где эти результаты приведены. Однако в разделе 31.7 я привел более полное, чем обычно делается, рассмотрение вызываемого гравитацией нарушения суперсимметрии. Сожалею, что не сумел включить в книгу вдохновляющие работы последнего десятилетия по связи суперсимметрии с теорией струн, но теория струн выходит за рамки этой книги, и мне не хотелось сообщать результаты, для которых я сам не подготовил базу для объяснения.

Список литературы содержит как ссылки на классические работы по суперсимметрии, так и полезные ссылки на вопросы, которые упомянуты, но подробно не рассмотрены в данной книге. Я не всегда знал, кто ответственен за представленные результаты, однако отсутствие ссылки не следует воспринимать как утверждение, что данный результат принадлежит мне. Тем не менее, часть представленного материала оригинальна. Надеюсь, что мне удалось в нескольких местах исправить рассмотрение ряда вопросов как в оригинальной литературе, так и в стандартных учебниках, в частности, при доказательстве теоремы Коулмена–Мандулы, при рассмотрении матриц четности в теориях расширенной супергравитации, при включении новых членов мягкого нарушения суперсимметрии в минимальную суперсимметричную стандартную модель, при выводе правил сумм для супертока и при доказательстве единственности решения Зайберга–Виттена.

К каждой главе даны задачи. Цель ряда из них — просто поупражняться в использовании описанной в данной главе техники вычислений. В других задачах предлагается расширить результаты главы на более широкий класс теорий.

Читая лекции по курсу теории суперсимметрии, я убедился, что эта книга содержит достаточное количество материала для одногодичного курса для студентов старших курсов. Я стремился к тому, чтобы данная книга была доступна студентам, знакомым с квантовой теорией поля на уровне, который представлен в двух первых томах этого труда. Вообще говоря, не предполагается, что читатель прочел все, что написано в томах 1 и 2, но для удобства тех счастливчиков, которым это удалось, я использую здесь те же обозначения и даю, где это возможно, перекрестные ссылки на материал предыдущих томов.

* * *

Должен выразить особую признательность моим коллегам по Техасскому университету, особенно Луи Бойа, Филу Канделасу, Брайсу и Сесиль де Витт, Вилли Фишлеру, Дэниелу Фриду, Иоакиму Гомесу, Вадиму Каплуновскому, и особенно Жаку Дистлеру. Неоценимую помощь при обсуждении отдельных вопросов мне оказали Салли Доусон, Майкл Дайн, Майкл Дафф, Лоуренс Холл, Хитоши Мураяма, Джо Польчински, Эдвард Виттен и Бруно Зумино. Джонатан Эванс прочел всю рукопись этого тома и сделал много полезных замечаний. Я благодарю также Элис Уилсон, которая сделала рисунки, Терри Рили за помощь в поиске бесчисленного количества книг и статей и Яну Даффи за помощь. Я признателен Маурин Стори из издательства Кембриджского университета за помощь в подготовке рукописи к изданию, и особенно моему редактору Руфусу Нилу за полезные дружеские советы.

СТИВЕН ВАЙНБЕРГ

Остин, Техас
Май 1999 г.

Обозначения

При выборе обозначений в книге по суперсимметрии большие сложности связаны с тем, использовать ли двухкомпонентные или четырехкомпонентные обозначения для спиноров. В стандартных текстах по суперсимметрии предпочитают двухкомпонентные вейлевские обозначения. Я выбрал, наоборот, четырехкомпонентные дираковские обозначения, не считая первой стадии построения алгебры суперсимметрии и мультиплетов, поскольку считаю, что это сделает книгу более доступной тем физикам, которые работают в области феноменологии частиц и построения моделей. Было бы грустно видеть, как увеличивается отдельный анклав специалистов по суперсимметрии, которые хорошо общаются друг с другом, но из-за обозначений отрезаны от значительно большего сообщества теоретиков — специалистов по физике частиц. В любом случае, не составляет особого труда перевести выражения из четырехкомпонентного формализма в двухкомпонентный. В использованном во всей книге представлении матриц Дирака, в котором γ_5 — диагональная матрица с элементами $+1$, $+1$, -1, -1 на главной диагонали, любой четырехкомпонентный майорановский спинор ψ_α (такой, как генератор суперсимметрии Q, суперпространственная координата θ_α или суперпроизводная $\mathscr{D}_\alpha$) может быть записан через двухкомпонентный спинор ξ_a в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} e\xi^* \\ \xi \end{pmatrix},$$

где e — 2×2 антисимметричная матрица с $e_{12} = +1$. Двухкомпонентный спинор ξ_a — это то, что в других книгах часто называют $\psi_a^* = \bar{\psi}_{\dot{a}}$, и тогда $(e\xi^*)_a$ следует называть ψ^a. Обзор полезных свойств четырехкомпонентных майорановских спиноров дан в приложении к главе 26.

Ниже приведены другие обозначения, принятые в данной книге.

Латинские индексы i, j, k и т. д., как правило, принимают значения 1, 2, 3, отмечая три пространственные координаты. Если это оговорено особо, латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, 4, причем $x^4 = it$.

Греческие индексы μ, ν, и т. д. из середины греческого алфавита в общем случае принимают значения 1, 2, 3, 0, отмечая четыре пространственно-временные координаты, причем x^0 — временная координата. Если возникает необходимость различать пространственно-временные координаты в произвольной координатной системе и в локально инерциальной системе, то в первом случае используются индексы μ, ν, и т. д., а во втором — индексы a, b, и т. д.

Греческие индексы α, β, и т. д. из начала греческого алфавита отмечают компоненты четырехкомпонентного спинора (за исключением главы 24). Чтобы избежать путаницы, я отклонился от обозначений т. II и использую заглавные буквы A, B, и т. д. для того, чтобы отмечать генераторы алгебры симметрии. Компоненты двухкомпонентных спиноров помечены индексами a; b, и т. д. В частности, четырехкомпонентные генераторы суперсимметрии обозначаются Q_a, в то время как двухкомпонентные генераторы (две нижние компоненты Q_a) обозначаются Q_a.

По повторяющимся индексам в общем случае проводится суммирование, если специально не оговорено другое.

Пространственно-временная метрика $\eta_{\mu\nu}$ диагональна, причем $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{00} = -1$.

Даламбертиан определяется как $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$, где ∇^2 — лапласиан $\partial^2/\partial x^i \partial x^j$.

«Тензор Леви–Чивита» $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ определяется как полностью антисимметричная величина с $\varepsilon^{0123} = +1$.

Дираковские матрицы γ_μ определены так, что $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$. Кроме того, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, а $\beta = i\gamma^0 = \gamma_4$. Когда требуется явный вид матриц, они задаются блочными матрицами

$$\gamma^0 = -i\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = -i\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{1}$ — единичная 2×2-матрица, $\mathbf{0}$ — 2×2-матрица с нулевыми элементами, а компоненты вектора $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ — обычные матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Часто мы используем 4×4 блочные матрицы

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix},$$

где e — опять антисимметричная 2×2-матрица $i\sigma_2$. Например, наше соглашение о фазах для четырехкомпонентных майорановских спиноров s можно записать как $s^* = -\beta\gamma_5\,\varepsilon s$.

Ступенчатая функция $\theta(s)$ имеет значение $+1$ при $s>0$ и 0 при $s<0$.

Комплексное сопряжение, транспонирование и эрмитовое сопряжение матрицы или вектора A обозначаются символами A^*, A^{T} и $A^\dagger = A^{*\mathrm{T}}$ соответственно. Мы используем звездочку $*$ для обозначения эрмитового сопряжения оператора или комплексного сопряжения числа, за исключением случая, когда крест $\dagger$ используется для транспонирования матрицы, образованной из эрмитово-сопряженных операторов или комплексно-сопряженных чисел. Символы + э. с. или + к. с. в конце выражения означают добавление к ранее выписанным слагаемым им эрмитово- или комплексно-сопряженных слагаемых. Черта над четырехкомпонентным спинором u определяется как $\bar{u} = u^\dagger\beta$.

Используется система единиц, в которой $\hbar$ и скорость света c приняты равными единице. Везде подразумевается, что $-e$ есть заряд электрона в рационализированной системе единиц, так что постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$. Температуры даны в энергетических единицах, в которых постоянная Больцмана принята за единицу.

Числа в квадратных скобках в конце приводимых числовых данных обозначают неопределенность в последних цифрах приводимого числа. Если не оговорено особо, экспериментальные данные взяты из «Review of Particle Physics», The Particle Data Group, *European Physics Journal, C* **3**, 1 (1998).

24

Историческое введение

История суперсимметрии так же своеобразна, как и все, что связано с историей науки. Предложенная в начале 70-х годов, суперсимметрия с тех пор превратилась в красивый математический формализм, объединяющий частицы различного спина в мультиплеты и нашедший глубокие применения в фундаментальной физике. Однако до сих пор нет ни малейшего прямого экспериментального подтверждения ее существования. У нас есть только отдельные косвенные свидетельства того, что суперсимметрия имеет отношение к реальному миру. Если (как я ожидаю) окажется, что суперсимметрия связана с природой, то это станет потрясающим успехом чисто теоретического предвидения.

В главе 25 мы начнем построение суперсимметричных теорий из первых принципов. В этой же главе мы представим суперсимметрию, следуя скорее хронологии, чем логике.

24.1. Нетрадиционные симметрии и «No-Go» теоремы

В начале 60-х годов введенная Гелл-Манном и Нееманом $SU(3)$ симметрия (обсуждавшаяся в разделе 19.7) успешно объяснила соотношения между различными сильновзаимодействующими частицами разного заряда и странности, но одинакового спина. Затем возникла идея, что, возможно, $SU(3)$ является частью более широкой симметрии, которая обладает нестандартным свойством объединять $SU(3)$ мультиплеты разного спина [1]. В нерелятивистской кварковой модели существует такая приближенная симметрия относительно $SU(6)$-преобразований кварковых спинов и ароматов, аналогичная раннее обнаруженной $SU(4)$ симметрии в ядерной физике, введенной в 1937 году Вигнером [2]. Как подробно показано в Приложении А к этой главе, симметрия $SU(6)$ объединяет псевдоскалярный мезонный октет, состоящий из π, K, $\bar{K}$ и η, векторный мезонный октет, состоящий из ρ, K^*, $\bar{K}^*$ и ω, и векторный мезонный синглет φ в один **35**-плет;

барионный октет спина $1/2$ N, Σ, Λ и Ξ, с барионным декуплетом спина $3/2$ Δ, $\Sigma(1385)$, $\Xi(1530)$ и Ω в один **56**-плет. На счету $SU(6)$ симметрии имеется ряд успехов, но в действительности она есть лишь следствие приближенной независимости сил в модели кварков от спина и аромата. Гипотеза о симметрии $SU(6)$ несколько слабее, чем предположение о независимости сил от спина и аромата, однако, как показано в Приложении А, нет никаких свидетельств, что предсказания симметрии $SU(6)$ более точны, чем предсказания, следующие из полной независимости от спина и аромата. Тем не менее были предприняты различные попытки обобщить группу симметрии $SU(6)$ нерелятивистской модели кварков на полностью релятивистскую квантовую теорию [3]. Все эти попытки провалились, и ряд авторов, сделав различные ограничивающие предположения, показали, что это невозможно в принципе [4]. Самая далеко идущая теорема этого типа была доказана Коулменом и Мандулой в 1967 году [5]. Они сделали разумные предположения о конечности числа типов частиц массой меньше любой заданной массы, о существовании рассеяния почти при всех энергиях и об аналитичности S-матрицы. С их помощью они показали, что наиболее общая алгебра Ли операторов симметрии, коммутирующих с S-матрицей, переводящая одночастичные состояния в одночастичные и действующая на многочастичные состояния как прямая сумма их действия на одночастичные состояния, состоит из генераторов P_μ и $J_{\mu\nu}$ группы Пуанкаре и обычных генераторов внутренней симметрии, действующих на одночастичные состояния посредством диагональных по импульсу и спину и не зависящих от этих величин матриц. В главе 25 мы используем эту теорему как существенный элемент анализа всех возможных суперсимметричных алгебр в четырех пространственно-временных измерениях, а в главе 32 — в пространстве-времени большего числа измерений. В разделе 32.3 мы рассмотрим суперсимметричные алгебры в теориях, содержащих протяженные объекты, для которых теорема Коулмена–Мандулы неприменима.

Доказательство, данное авторами теоремы, остроумно и сложно. В Приложении Б к этой главе приводится один из его вариантов. В этом разделе мы дадим очень простое, чисто кинематическое доказательство одного положения теоремы. Однако этого будет достаточно, чтобы ясно показать, почему нестандартная симметрия типа $SU(6)$ возможна в нерелятивистской теории и невозможна в релятивистской. Мы используем лоренц-инвариантность для того, чтобы показать, что если алгебра Ли всех операторов симметрии B_α, коммутирующих с генераторами импульса P_μ, состоит из самих генераторов P_μ и эрмитовых генераторов B_A некоторой зависящей от конечного числа параметров, полупростой компактной*

*Определения полупростой и компактной алгебр Ли см. в сноске в разделе 15.2.

подалгебры Ли $\mathscr{A}$, то B_A должны быть генераторами обычной внутренней симметрии, в том смысле, что они действуют на одночастичные состояния посредством диагональных по импульсу и спину и не зависящих от этих величин матриц. В этом доказательстве мы не используем свойства S-матрицы, конечность спектра частиц и предположения о том, как генераторы симметрии действуют на физические состояния. Конечно, алгебра Ли группы $SU(6)$ и полупростая, и компактная, поэтому эта теорема исключает использование любой подобной симметрии в релятивистских теориях для вывода соотношений между частицами разного спина.

Переходим к доказательству. Пусть все генераторы симметрии, коммутирующие с 4-импульсом P_μ, образуют алгебру Ли, натянутую на генераторы B_α. Рассмотрим, как на эти генераторы действует собственное преобразование Лоренца $x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, которое представляется унитарным оператором $U(\Lambda)$ в гильбертовом пространстве. Легко видеть, что оператор $U(\Lambda)B_\alpha U^{-1}(\Lambda)$ является эрмитовым генератором симметрии, коммутирующим с $\Lambda_\mu{}^\nu P_\nu$. Поскольку матрица $\Lambda_\mu{}^\nu$ несингулярна, этот оператор должен коммутировать с P_μ и, следовательно, должен быть линейной комбинацией B_α:

$$U(\Lambda)B_\alpha U^{-1}(\Lambda) = \sum_\beta D^\beta{}_\alpha(\Lambda)B_\beta, \tag{24.1.1}$$

где $D^\beta{}_\alpha(\Lambda)$ — множество действительных коэффициентов, которые реализуют представление однородной группы Лоренца:

$$D(\Lambda_1)D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2). \tag{24.1.2}$$

Далее, оператор $U(\Lambda)B_\alpha U^{-1}(\Lambda)$ удовлетворяет тем же коммутационным соотношениям, что и B_α, поэтому структурные константы $C^\gamma_{\alpha\beta}$ этой алгебры Ли являются инвариантными тензорами, в том смысле, что

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha'\beta'\gamma'} D^{\alpha'}{}_\alpha(\Lambda)D^{\beta'}{}_\beta(\Lambda)D^\gamma{}_{\gamma'}(\Lambda^{-1})C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'}. \tag{24.1.3}$$

Свертывая это с соответствующим выражением для $C^\alpha_{\gamma\delta}$, находим, что

$$g_{\beta\delta} = \sum_{\beta'\delta'} D^{\beta'}{}_\beta(\Lambda)D^{\delta'}{}_\delta(\Lambda)\, g_{\beta'\delta'}, \tag{24.1.4}$$

где $g_{\beta\delta}$ обозначает метрику алгебры Ли,

$$g_{\beta\delta} \equiv \sum_{\alpha\gamma} C^\gamma_{\alpha\beta}C^\alpha_{\gamma\delta}. \tag{24.1.5}$$

Поскольку все эти генераторы коммутируют с P_μ, имеем $C^\alpha_{\mu\beta} = -C^\alpha_{\beta\mu} = 0$, откуда $g_{\mu\alpha} = g_{\alpha\mu} = 0$.

Все генераторы симметрии, кроме P_μ, мы будем различать с помощью нижних индексов A, B и т. д. вместо α, β и т. д. Используя обращение в нуль $C^A_{\mu B} = -C^A_{B\mu}$ в уравнении (24.1.5), получаем $g_{AB} = \sum_{CD} C^D_{AC} C^C_{BD}$. Мы предположили, что генераторы B_A задают полупростую, компактную алгебру Ли, поэтому матрица g_{AB} положительно определена. Уравнения (24.1.4) и (24.1.2) показывают, что матрицы $g^{1/2} D(\Lambda) g^{-1/2}$ реализуют действительное ортогональное и, следовательно, унитарное конечномерное представление однородной группы Лоренца. Однако, поскольку группа Лоренца некомпактна, то *единственным таким представлением является тривиальное*, для которого $D(\Lambda) = 1$. (Именно в этом месте существенно проявляется релятивизм. Полупростая часть группы Галилея является *компактной* группой $SU(2)$, которая, конечно, имеет бесконечное число унитарных конечномерных представлений.) При условии $D(\Lambda) = 1$, генераторы B_A коммутируют с $U(\Lambda)$ для всех преобразований Лоренца $\Lambda^\mu{}_\nu$.

Действуя на состояние $|p, n\rangle$ одной стабильной частицы импульса p^μ, обладающей спином и другими характеристиками, обозначаемыми индексом n, коммутирующий с P_μ оператор типа B_A, может дать только линейную комбинацию таких состояний

$$B_A |p, n\rangle = \sum_m \big(b_A(p)\big)_{mn} |p, m\rangle. \qquad (24.1.6)$$

Тот факт, что B_A коммутирует с теми преобразованиями, которые в разделе 2.5 были названы «бустами», означает, что $b_A(p)$ не зависит от импульса, а из того, что B_A коммутирует с вращениями, вытекает, что $b_A(p)$ действуют на спиновые индексы как единичные матрицы. Следовательно, B_A являются генераторами обычной внутренней симметрии, что и требовалось доказать.

24.2. Рождение суперсимметрии

Если бы теоретическая физика развивалась, следуя логике, то, после доказательства теоремы Коулмена–Мандулы, кто-нибудь в поисках исключений из этой теоремы заметил бы, что она имеет дело только с преобразованиями бозонов в бозоны и фермионов в фермионы, которые генерируются операторами, удовлетворяющими соотношениям коммутации, а не антикоммутации. Но тогда возник бы вопрос: может ли релятивистская теория обладать действующими нетривиально на спины частиц симметриями, переводящими фермионы в бозоны и наоборот, операторы которой удовлетворяют не коммутационным, а антикоммутационным соотношениям. Исследуя возможную структуру такой супералгебры методами, описанными в следующей главе, мы увидим, что суперсимметрия возникла бы тогда как единственная возможность.

Но все произошло не так. Суперсимметрия появилась в серии статей о теории струн и независимо в паре почти незамеченных статей, о которых мы расскажем позже, в которых не было даже намека, что авторов заботила теорема Коулмена–Мандулы.

Начиная с конца 60-х годов, попытка построения элементов S-матрицы для процессов сильных взаимодействий, удовлетворявших ряду теоретических требований, привела к новой картине различных типов адронов как разных мод колебаний струны [6]. Точка на струне, помеченная параметром σ, имеет в момент времени τ по фиксированным часам пространственно-временные координаты $X^\mu(\sigma,\tau)$. Тогда теория движения струны в пространстве-времени d измерений может рассматриваться как двумерная теория поля с d бозонными полями и действием

$$\begin{aligned} I[X] &= \frac{T}{2}\int d\sigma \int d\tau \eta_{\mu\nu}\left[\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial X^\nu}{\partial \tau} - \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma}\right] \\ &= T\int d\sigma^+ \int d\sigma^- \eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^+}\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^-}, \end{aligned} \tag{24.2.1}$$

где T — константа, называемая натяжением струны; $\mu = 0, 1\ldots, d-1$; и $\sigma^\pm$ — двумерные координаты на световом конусе, причем $\sigma^\pm \equiv \tau \pm \sigma$. Это действие может быть получено из более общего выражения, полностью инвариантного* относительно преобразований двух координат на «мировом листе» σ_k

$$I[X] = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \eta_{\mu\nu}\sqrt{\operatorname{Det} g}\, g^{kl}\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^k}\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^l}, \tag{24.2.2}$$

переходом в специальную систему координат, где метрика мирового листа g_{kl} удовлетворяет условию

$$\sqrt{\operatorname{Det} g}\, g^{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{24.2.3}$$

В электродинамике проблемы, связанные с отрицательным знаком действия для времениподобных фотонов, устраняются благодаря калибровочной инвариантности теории. Точно так же, здесь проблемы с отрицательным знаком $\eta_{\mu\nu}$ в выражениях (24.2.1) и (24.2.2) при $\mu = \nu = 0$ устраняется благодаря инвариантности действия (24.2.2) (при соответствующих граничных условиях) относительно произвольных преобразований координат мирового листа.

*Эта симметрия нарушается квантовыми аномалиями, подобными тем, что мы обсуждали в главе 22, за исключением чисто бозонной теории в пространстве-времени с числом измерений $d = 26$, или, после введения фермионов, в пространстве-времени с $d = 10$.

В специальной системе координат, где действие принимает вид (24.2.1), остается важный след инвариантности относительно произвольных преобразований координат мирового листа: инвариантность относительно глобальных *конформных преобразований*:

$$\sigma^{\pm} \to f^{\pm}(\sigma^{\pm}), \tag{24.2.4}$$

где $f^{\pm}$ — пара независимых произвольных функций.

Частицы, описываемые такой струнной теорией, совсем не похожи на те, что мы наблюдаем в реальном мире. В 1971 году Рамон [7], Неве и Шварц [8], пытаясь, соответственно, ввести в теорию частицы полуцелого спина или с квантовыми числами пионов, предложили добавить d дублетов фермионных полей $\psi_1^{\mu}(\sigma,\tau)$ и $\psi_2^{\mu}(\sigma,\tau)$. Вскоре после этого Жерве и Сакита [9] написали действие для такой теории:

$$I[X,\psi] = \int d\sigma^+ \int d\sigma^- \left[T\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma^+}\frac{\partial X_{\mu}}{\partial\sigma^-} + i\psi_2^{\mu}\frac{\partial}{\partial\sigma^+}\psi_{2\mu} + i\psi_1^{\mu}\frac{\partial}{\partial\sigma^-}\psi_{1\mu}\right], \tag{24.2.5}$$

и заметили, что конформная инвариантность может быть сохранена, если расширить конформные преобразования (24.2.4) так, чтобы они действовали и на фермионные поля:

$$\psi_1^{\mu} \to \left(\frac{df^+}{d\sigma^+}\right)^{-1/2}\psi_1^{\mu}, \qquad \psi_2^{\mu} \to \left(\frac{df^-}{d\sigma^-}\right)^{-1/2}\psi_2^{\mu}. \tag{24.2.6}$$

Жерве и Сакита подчеркнули, что кроме двумерной конформной инвариантности и d-мерной лоренц-инвариантности, при соответствующих граничных условиях эта теория обладает симметрией относительно бесконечно малых преобразований, заменяющих бозонное поле X^{μ} на фермионные поля ψ_r^{μ}:

$$\begin{aligned}
\delta\psi_2^{\mu}(\sigma^+,\sigma^-) &= iT\alpha_2(\sigma^-)\frac{\partial}{\partial\sigma^-}X^{\mu}(\sigma^+,\sigma^-),\\
\delta\psi_1^{\mu}(\sigma^+,\sigma^-) &= iT\alpha_1(\sigma^+)\frac{\partial}{\partial\sigma^+}X^{\mu}(\sigma^+,\sigma^-),\\
\delta X^{\mu}(\sigma^+,\sigma^-) &= \alpha_2(\sigma^-)\psi_2^{\mu}(\sigma^+,\sigma^-) + \alpha_1(\sigma^+)\psi_1^{\mu}(\sigma^+,\sigma^-),
\end{aligned} \tag{24.2.7}$$

где α_1 и α_2 — две бесконечно малые *фермионные* функции σ^+ и σ^- соответственно, подобные введенным в разделе 9.5 грассмановым переменным. Это был пример того, что впоследствии стали называть суперсимметрией, т. е. симметрией, связывающей бозоны и фермионы. Но это пока что была симметрия только двумерной теории поля, а не физической теории в четырехмерном пространстве-времени.

Через несколько лет Весс и Зумино [10] снова вернулись к примеру суперсимметрии, рассмотренному в работах [7–9], и отметили, что было бы естественно попытаться распространить идею суперсимметрии на квантовые теории поля в *четырехмерном* пространстве-времени. Они построили несколько суперсимметричных моделей. Простейшая из них содержала одно майорановское (зарядово самосопряженное дираковское) поле ψ, два действительных скалярных и псевдоскалярных бозонных поля A и B и два действительных скалярных и псевдоскалярных бозонных вспомогательных поля F и G, и была инвариантна относительно бесконечно малого преобразования*

$$\begin{aligned}
&\delta A = (\bar\alpha\psi)\,, && \delta B = -i\,(\bar\alpha\gamma_5\psi)\,,\\
&\delta\psi = \partial_\mu(A + i\gamma_5 B)\gamma^\mu\alpha + (F - i\gamma_5 G)\alpha, && \\
&\delta F = \left(\bar\alpha\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right), && \delta G = -i\left(\bar\alpha\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right),
\end{aligned} \tag{24.2.8}$$

где α — произвольный постоянный инфинитезимальный майорановский фермионный c-числовой параметр. Если мы потребуем инвариантности действия относительно этих преобразований, то наиболее общая действительная лоренц-инвариантная сохраняющая четность перенормируемая плотность лагранжиана, которую можно построить из этих полей, имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = &-\frac{1}{2}\partial_\mu A\partial^\mu A - \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B - \frac{1}{2}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi\\
&+\frac{1}{2}(F^2+G^2) + m[FA + GB - \frac{1}{2}\bar\psi\psi]\\
&+ g[F(A^2+B^2) + 2GAB - \bar\psi(A + i\gamma_5 B)\psi].
\end{aligned} \tag{24.2.9}$$

Поскольку вспомогательные поля F и G входят квадратично, можно получить эквивалентный лагранжиан, положив эти поля равными тем значениям, которые даются полевыми уравнениями:

$$F = -mA - g(A^2+B^2), \qquad G = -mB - 2gAB. \tag{24.2.10}$$

Тогда плотность лагранжиана принимает вид

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = &-\frac{1}{2}\partial_\mu A\partial^\mu A - \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B - \frac{1}{2}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}m^2[A^2+B^2] - \frac{1}{2}m\bar\psi\psi\\
&- gmA(A^2+B^2) - \frac{1}{2}g^2(A^2+B^2)^2 - g\bar\psi(A + i\gamma_5 B)\psi.
\end{aligned} \tag{24.2.11}$$

---

*Обозначения матриц Дирака, используемых здесь, объясняются в Предисловии и разделе 5.4. В этой книге матрица γ_5 ($\gamma_5^2 = 1$) отличается на множитель i от матрицы, использованной в работе Весса и Зумино. Кроме того, определение ковариантно сопряженного спинора $\bar\psi$ любого спинора ψ тоже отличается на множитель i по сравнению с Вессом и Зумино. Поэтому некоторые фазы в уравнениях (24.2.8)–(24.2.10) отличаются от фаз, полученных в [10].

Эта плотность лагранжиана показывает связи не только между скалярными и фермионными массами, но также между взаимодействиями Юкавы и скалярными самодействиями, что характерно для суперсимметричных теорий. Весс и Зумино описали также суперсимметричные преобразования и получили лагранжиан для супермультиплета, содержащего векторное поле. (Более подробно мы рассмотрим все это в главе 26.) Наконец, во второй статье Весс и Зумино [11] вспомнили теорему Коулмена–Мандулы и связали кажущееся нарушение этой теоремы с тем, что генераторы симметрии в их модели удовлетворяют антикоммутационным, а не коммутационным соотношениям. Через несколько лет после этой работы Льоцци, Шерк и Олив [11a] показали, что можно построить теорию суперструн, обладающую суперсимметрией как в пространстве-времени, так и на мировом листе, наложив соответствующие периодические условия на поля в модели Рамона–Неве–Шварца.

Во время работы над первыми статьями по суперсимметрии в четырехмерном пространстве-времени, Весс и Зумино не знали о том, что такая симметрия уже упоминалась в паре статей, опубликованных в Советском Союзе. В 1971 году Гольфанд и Лихтман [12] расширили алгебру группы Пуанкаре, обсуждавшуюся в разделе 2.4, на супералгебру и использовали требование инвариантности относительно этой супералгебры для построения суперсимметричных теорий поля в четырехмерном пространстве-времени. Эта статья, хотя и была пророческой, содержала мало деталей и долго оставалась незамеченной. Независимо, в 1973 году Волков и Акулов [13] обнаружили то, что сегодня называется спонтанно нарушенной суперсимметрией, но они использовали свой формализм, чтобы отождествить голдстоуновский фермион, связанный с нарушением суперсимметрии, с нейтрино. Эта идея оказалась неудачной. Для большинства теоретиков, особенно за пределами Советского Союза, изучение суперсимметрии как возможной симметрии природы в четырехмерном пространстве-времени началась с работ Весса и Зумино 1974 года.

Приложение A. *SU*(6) симметрия в нерелятивистских кварковых моделях

В этом приложении будет показано, как $SU(6)$ симметрия, связывающая частицы разного спина, возникает в нерелятивистских кварковых моделях. Это не имеет прямого отношения к суперсимметрии, но дает исторический фон теоремы Коулмена–Мандулы, что существенно для построения суперсимметричных алгебр в разделах 25.1 и 31.1.

В общем случае гамильтониан нерелятивистской кварковой модели может зависеть не только от координат и импульсов, но также от операторов спина и аромата $\sigma_i^{(n)}$ и $\lambda_A^{(n)}$, где $\sigma_i^{(n)}$ $(i = 1,2,3)$ действуют на спиновые индексы n-го кварка как матрицы Паули σ_i, определенные формулами (5.4.18), а $\lambda_A^{(n)}$ $(A = 1,2,\ldots,8)$ действуют на индексы аромата n-ого кварка как матрицы Гелл-Манна λ_A группы $SU(3)$, определенные формулами (19.7.2). (Там, где n относится к антикварку, операторы $\sigma_i^{(n)}$ и $\lambda_A^{(n)}$ действуют как матрицы $-\sigma_i^T$ и $-\lambda_A^T$ контраградиентных представлений.) Если бы мы предположили, что не существует спин-орбитальной связи, так чтобы отдельно сохранялся полный орбитальный момент L_i, то можно было бы сказать, что гамильтониан коммутирует не только с полным орбитальным моментом L_i, но также с полными спином и унитарным спином

$$S_i \equiv \frac{1}{2}\sum_n \sigma_i^{(n)}, \qquad T_A \equiv \frac{1}{2}\sum_n \lambda_A^{(n)}. \tag{24.A.1}$$

С другой стороны, если бы мы предположили, что гамильтониан зависит только от положения кварков и их импульсов и не зависит от их спинов и ароматов, то такой гамильтониан коммутировал бы не только с полным орбитальным моментом $\mathbf{L}$, но также с *каждым* из операторов $\sigma_i^{(n)}$ и $\lambda_A^{(n)}$. Между этими двумя крайними случаями есть интересная возможность, что помимо L_i, S_i и T_A гамильтониан также коммутирует с операторами

$$R_{iA} \equiv \frac{1}{2}\sum_n \pm\sigma_i^{(n)}\lambda_A^{(n)}, \tag{24.A.2}$$

где знак $+$ берется для кварков, а знак $-$ для антикварков*. Операторы S_i, T_A и R_{iA} образуют алгебру Ли группы $SU(6)$ с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned}
&[S_i,S_j] = i\sum_k \varepsilon_{ijk}S_k, \qquad [T_A,T_B] = i\sum_C f_{ABC}T_C, \qquad [S_i,T_A] = 0,\\
&[S_i,R_{jA}] = i\sum_k \varepsilon_{ijk}R_{kA}, \qquad [T_A,R_{iB}] = i\sum_C f_{ABC}R_{iC},\\
&[R_{Ai},R_{Bj}] = i\delta_{ij}\sum_C f_{ABC}T_C + \tfrac{2}{3}i\delta_{AB}\sum_k \varepsilon_{ijk}S_k + i\sum_{kC}\varepsilon_{ijk}d_{ABC}R_{kC}
\end{aligned} \tag{24.A.3}$$

Здесь f_{ABC} и d_{ABC} обозначают соответственно полностью антисимметричные и полностью симметричные числовые коэфициенты [14], отличные от нуля значения которых равны

$$\begin{aligned}
&f_{123} = 1, \qquad f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2,\\
&f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = 1/2,
\end{aligned} \tag{24.A.4}$$

*Знак $-$ для антикварков возникает потому, что в R_{iA} члены для антикварков должны действовать на индексы спинов и ароматов как матрицы $-(\sigma_i\iota_A)^{\mathrm{T}} = -(-\sigma_i^{\mathrm{T}})(-\iota_i^{\mathrm{T}})$.

и

$$d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = 1/2,$$
$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = 1/\sqrt{3}, \qquad (24.A.5)$$
$$d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -1/(2\sqrt{3}).$$

Эта симметрия сохраняется, если мы включим в гамильтониан двухчастичное взаимодействие, зависящее от спинов и ароматов, и коммутирующее с операторами R_{iA}, S_i и T_A. Такие взаимодействия представляются линейными комбинациями двухчастичных операторов вида

$$H^{(nm)} \propto \left(1 \pm \sum_i \sigma_i^{(n)}\sigma_i^{(m)}\right)\left(\tfrac{2}{3} \pm \sum_A \lambda_A^{(n)}\lambda_A^{(m)}\right), \qquad (24.A.6)$$

где берется знак $-$, если одна из частиц n, m — кварк, а другая антикварк, а знак $+$ берется, если обе частицы — либо кварки, либо антикварки.

Конечно, даже в нерелятивистской кварковой модели симметрия $SU(6)$ в лучшем случае приближенная. Она нарушается спин-орбитальными и спин-спиновыми силами, а также массой s-кварка, из-за чего симметрия $SU(3)$ по ароматам кварков понижается до $SU(2)$ и $U(1)$ симметрий, отвечающих за сохранение изоспина и гиперзаряда. Если мы исключим эффекты, связанные с массой этого кварка, ограничившись адронами, построенными из легких u- и d-кварков и антикварков, то единственными ненулевыми матрицами λ_A будут матрицы λ_a ($a = 1,2,3$), которые для u- и d-кварков определяются матрицами Паули (5.4.18) (в этом контексте их принято обозначать τ_a) и матрица λ_8 (равная просто числу $1/\sqrt{3}$ для кварков u и d и $-1/\sqrt{3}$ для антикварков $\bar{u}$ и $\bar{d}$). Взаимодействие (24.A.6) принимает вид

$$H^{(nm)} \propto \left(1 \pm \sum_i \sigma_i^{(n)}\sigma_i^{(m)}\right)\left(1 \pm \sum_A \tau_A^{(n)}\tau_A^{(m)}\right), \qquad (24.A.7)$$

Помимо сохранения числа кварков, остается симметрия $SU(4)$ с генераторами S_i, T_a и R_{ia}, коммутирующими с (24.A.7). Это было предложено Вигнером [2] в 1937 году в качестве симметрии ядерных сил, хотя тогда речь шла о протонах и нейтронах, а не u- и d-кварках. В ядерной теории взаимодействие (24.A.7) известно как *потенциал Майорана*, в отличие от взаимодействия, которое не зависит от спина и изоспина и называется *потенциалом Вигнера*, или от взаимодействий, содержащих в (24.A.7) множитель, зависящий только от спина, или только от изоспина, которые называются *потенциалом Бартлетта* и *потенциалом Гейзенберга* соответственно.

Интересно отметить, что хотя в нерелятивистских теориях нет теоретического барьера для симметрий типа $SU(6)$, действующих как на спин, так и на тип частицы, *нет ни одного экспериментального факта, который говорил бы, что идея о существовании $SU(6)$ симметрии в нерелятивистской кварковой модели предпочтительнее, чем предположение о полной независимости от спинов и ароматов*. Эти предположения совсем не эквивалентны. Если гамильтониан системы N нерелятивистских кварков и (или) антикварков полностью не зависит от их спинов и ароматов, то его симметрия будет $SU(6)^N$, а не $SU(6)$. Например, двухчастичное взаимодействие типа (24.A.6) и различные другие многочастичные взаимодействия нарушают $SU(6)^N$ до $SU(6)$. Конечно, в любом случае все эти симметрии приближенные. Но тогда возникает вопрос: будет ли нарушение $SU(6)$ менее сильным, чем нарушение $SU(6)^N$?

На этот вопрос нельзя ответить, изучая мультиплет, содержащий барионный октет, который состоит из нуклонов и гиперонов Λ, Σ и Ξ. В нерелятивистской кварковой модели эти частицы интерпретируется как связанные состояния трех кварков с нулевым орбитальным моментом. Поскольку эти состояния не имеют цвета, то волновая функция полностью антисимметрична по скрытым цветовым индексам и поэтому полностью симметрична при комбинированной перестановке спина и аромата. Следовательно, барионным октет следует поместить в симметричное тензорное представление третьего ранга **56** группы $SU(6)$, содержащее помимо барионного октета декуплет спина 3/2, который можно считать состоящим из знаменитого «3-3» резонанса Δ и частиц $\Sigma(1385)$, $\Xi(1530)$, Ω. (Числа в скобках дают массы в МэВ, если необходимо отличать эти частицы от частиц с одинаковыми изоспином и странностью, но меньшей массой.) $SU(6)$ симметрия дает хорошие предсказания для магнитных моментов барионов. Оператор заряда кварка имеет вид $q = e(\lambda_3/2 + \lambda_8/2\sqrt{3})$. Поэтому, если кварки имеют магнитные моменты $3q/2m_N$ дираковских частиц с этим зарядом и массой $m_N/3$, то оператор магнитного момента равен

$$\mu_i = 3\mu_N\left(\frac{1}{2}R_{i3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}R_{i8}\right),$$

где $\mu_N \equiv e/2m_N$ — ядерный магнетон, а R_{iA} определяется соотношением (24.A.2). Несложно вычислить матричные элементы этого генератора группы симметрии между членами мультиплета **56**. В результате получаются магнитные моменты в единицах μ_N, равные +3, −2, −1, +3, −1, −1, −2 для p, n, Λ, Σ^+, Σ^-, Ξ^- и Ξ^0 соответственно, которые можно сравнить с соответствующими экспериментальными значениями +2.79, −1.91, −0.61, +2.46, −1.16, −0.65, −1.25. Согласие достаточно хорошее (за исключением Σ^-), и оно может даже улучшиться, если взять магнитный момент кварка немного меньше $3\mu_N$. Если мы предположим, что гамильтониан полностью не зависит от спина и аромата, то в силу симметрии трехкварковой волновой функции мы не получим ничего нового. Состояния с нулевым угловым моментом попрежнему будут принадлежать мультиплету, состоящему из $6 \times 7 \times 8/6! = 56$ членов. В частности, оператор (24.А.6) имеет то же самое собственное значение 4 для любого состояния двух кварков, симметричного при одновременной перестановке их спинов и ароматов, независимо от того, будет ли оно симметрично или антисимметрично при перестановке спинов и ароматов по отдельности.

Чтобы решить, имеются ли у $SU(6)$ какие-то преимущества по сравнению с $SU(6)^N$, полезнее изучать мезоны, которые в нерелятивистской кварковой модели интерпретируются как связанные состояния кварка и антикварка. Если гамильтониан этих состояний полностью независим от спинов и ароматов, то его симметрия определяется группой $SU(6)^2$, и мезонные состояния принадлежат 36-мерному представлению $(6, \bar{6})$; в то время как для группы $SU(6)$ мы можем только сказать, что мезоны принадлежат одному из двух представлений группы $SU(6)$, содержащихся в $\mathbf{6} \times \bar{\mathbf{6}}$: присоединенному представлению **35** или синглетному представлению. Более точно, представление **35** состоит из синглета группы $SU(3)$ спина $S = 1$, октета группы $SU(3)$ спина $S = 0$ и октета группы $SU(3)$ спина $S = 1$, соответствующими генераторам S_i, T_A и R_{iA} группы $SU(6)$, который отщепляется от синглета группы $SU(3)$ спина $S = 0$ за счет взаимодействия (24.А.6). Поскольку все эти предположения, конечно, приближенные, то вопрос о том, будет ли симметрия $SU(6)$ более точной, чем предположение о полной независимости от спинов и ароматов, сводится к вопросу о том, будет ли расщепление между синглетом группы $SU(3)$ со спином $S = 0$ и остальными 35-ю состояниями с тем же орбитальным моментом больше, чем расщепление внутри самого супермультиплета **35**.

Кварк-антикварковые состояния с орбитальным моментом $L = 0$ имеют отрицательную четность P и положительную зарядовую четность C (для зарядово самосопряженных состояний), если полный спин S равен нулю, и отрицательную C-четность, если $S = 1$. (Объяснение см. в разделе 5.5.) Поэтому мультиплет **35** состоит из синглета с $J^{\mathsf{PC}} = 1^{--}$, октета 0^{-+} и октета 1^{--}, которые, соответственно, идентифицируются как $\varphi(1020)$, псевдоскалярный октет π, η, K, $\bar{K}$ и векторный октет ρ, ω, K^*, $\bar{K}^*$. При энергии 958 МэВ существует еще $SU(3)$ синглет η' с квантовыми числами 0^{-+}, который может рассматриваться как синглет группы $SU(6)$. Отщепление этого синглета от частиц в мультиплете **35** ничуть не больше расщепления внутри самого этого мультиплета.

Можно возразить, что мезоны с орбитальным моментом $L = 0$ не позволяют успешно проверить симметрии нерелятивистской кварковой модели, потому что они включают голдстоуновские бозоны π, η, K и $\bar{K}$, становящиеся безмассовыми при нулевых массах кварков u и d

и, следовательно, не очень хорошо описываемые этой моделью. Поэтому рассмотрим кварк-антикварковые состояния с $L = 1$. Эти состояния имеют положительные P и C для $S = 1$ и отрицательные P и C для $S = 0$. Поэтому p-волновые мультиплеты **35** состоят из синглетов группы $SU(3)$ с $S = 1$ и $J^{PC} = 0^{++}, 1^{++}, 2^{++}$, которые можно отождествить с $f_0(1370)$, $f_1(1285)$ и $f_2(1270)$; октета 1^{++} с $S = 0$, отождествляемого с $h_1(1170)$, $b_1(1235)$, $K_1(1400)$ и $\bar{K}_1(1400)$; октетов $S = 1$: 0^{++}, отождествляемого с $f_0(980)$, $a_0(980)$, $K_0^+(1950)$ и $\bar{K}_0^+(1950)$, 1^{++}, отождествляемого с $f_1(1420)$, $a_1(1260)$, $K_0^+(1650)$ и $\bar{K}_1^+(1650)$, 2^{++}, отождествляемого с $f_2(1430)$, $a_2(1320)$, $K_2^+(1980)$ и $\bar{K}_2^+(1980)$. Кроме этих 35×3 состояний, существует еще одна частица с правильными квантовыми числами, соответствующими p-волновому синглету группы $SU(6)$ — 1^{+-} изоскаляр $h_1(1380)$. Конечно, мы можем переставить местами $h_1(1170)$ и $h_1(1380)$, или определять синглет группы $SU(3)$ и состояния изоскалярного октета 1^{+-}, как ортогональные линейные комбинации $h_1(1170)$ и $h_1(1380)$. Важно то, что эти *два* изоскаляра 1^{+-} существуют безо всякого намека, что один из них, принадлежащий синглету группы $SU(6)$, отщепляется от частиц мультиплета **35** более сильно, чем сами частицы мультиплета **35** друг от друга. И опять у нас нет никакого свидетельства, что симметрия $SU(6)$ выполняется точнее, чем более сильное предположение о полной независимости от спинов и ароматов.

Приложение В. Теорема Коулмена–Мандулы

В этом приложении мы даем доказательство знаменитой теоремы Коулмена–Мандулы [5], согласно которой единственно возможная алгебра Ли (в противоположность супералгебре) генераторов симметрии состоит из генераторов трансляций P_μ, однородных преобразований Лоренца $J_{\mu\nu}$ и возможных генераторов внутренней симметрии, коммутирующих с P_μ и $J_{\mu\nu}$ и действующих на физические состояния путем умножения их на не зависящие от спина и импульса эрмитовые матрицы*. Под «генераторами симметрии» здесь подразумеваются любые эрмитовые операторы, которые: коммутируют с S-матрицей; имеют коммутаторы, являющиеся генераторами симметрии; переводят одночастичные состояния в одночастичные; действуют на многочастичные состояния как прямая сумма их действий на одночастичные состояния (как в (24.В.1)). Дальнейшие технические требования будут вводиться по мере необходимости в процессе доказательства.

---

*Как мы потом увидим, в теориях, включающих только безмассовые частицы, есть еще одна возможность: к генераторам P_μ и $J_{\mu\nu}$ добавляются генераторы D и K_μ, дополняющие алгебру Ли до конформной группы [15].

Помимо общих принципов релятивистской квантовой механики, описанных в главах 2 и 3, единственные другие предположения, требуемые для доказательства, таковы.

Предположение 1. *Для любого M существует лишь конечное число типов частиц массой, меньшей M.*

Предположение 2. *Любое двухчастичное состояние участвует в какой-то реакции почти при всех значениях энергий (т. е. при всех энергиях, за исключением, возможно, изолированного множества значений).*

Предположение 3. *Амплитуды упругого рассеяния двух частиц являются аналитическими функциями угла рассеяния почти при всех значениях энергий и углов**.

Нет необходимости предполагать, что S-матрица определяется локальной квантовой теорией поля. Представленное здесь доказательство немного переделано и упрощено, в нем приводятся шаги, которые Коулмен и Мандула оставили для читателя.

Удобно начать с доказательства теоремы для подалгебры, содержащей те генераторы симметрии B_α, которые коммутируют с оператором 4-импульса P_μ. (Эта часть теоремы интересна сама по себе; она исключает симметрии в релятивистских теориях, действующие подобно $SU(6)$ симметрии в нерелятивистской кварковой модели.) Действие таких генераторов симметрии на многочастичные состояния дается выражением

$$\begin{aligned} B_\alpha|pm,qn,\ldots\rangle &= \sum_{m'}(b_\alpha(p))_{m'm}|pm',qn,\ldots,\rangle \\ &+\sum_{n'}(b_\alpha(q))_{n'n}|pm,qn',\ldots,\rangle+\ldots, \end{aligned} \tag{24.B.1}$$

*Строго говоря, это предположение не выполняется в теориях с инфракрасными расходимостями, такими, как квантовая электродинамика, где, как показано в разделе 13.3, элемент S-матрицы для любого рассеяния, включающего заряженные частицы, обращается в нуль, за исключением упругого рассеяния вперед. В абелевых калибровочных теориях, подобных электродинамике, эта проблема исключается применением теоремы Коулмена–Мандулы к теории с фиктивной массой калибровочного бозона. Тогда можно работать с «инфракрасно-безопасными» величинами, типа масс и проинтегрированными соответствующим образом сечениями рассеяния, которые конечны при стремлении массы калибровочного бозона к нулю. Такой проблемы нет в неабелевых калибровочных теориях, подобных квантовой хромодинамике, когда все безмассовые частицы заперты. Симметрии, если они не нарушены, будут определять элементы S-матрицы только для калибровочно-нейтральных связанных состояний, таких, как мезоны и барионы в квантовой хромодинамике. Насколько мне известно, теорема Коулмена–Мандулы не была доказана для неабелевых калибровочных теорий со свободными безмассовыми частицами, например, в квантовой хромодинамике с большим числом ароматов кварков.

где m, n и т. д. — дискретные индексы, обозначающие z-компоненты спина и сорт частицы (аромат) для частиц определенной массы $\sqrt{-p_\mu p^\mu}$; $b_\alpha(p)$ — конечные эрмитовые матрицы, определяющие действие B_α на одночастичные состояния.

Из уравнения (24.В.1) можно видеть, что отображение, переводящее B_α в b_α для некоторого фиксированного p является гомоморфизмом в том смысле, что коммутационные соотношения

$$[B_\alpha, B_\beta] = i\sum_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta} B_\gamma \tag{24.B.2}$$

также справедливы для эрмитовых матриц b_α:

$$[b_\alpha(p), b_\beta(p)] = i\sum_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta} b_\gamma(p). \tag{24.B.3}$$

Хорошо известная теорема, доказанная в разделе 15.2, утверждает, что любая алгебра Ли конечных эрмитовых матриц типа b_α должна быть прямой суммой компактной полупростой алгебры Ли и алгебр $U(1)$. Однако, мы не можем немедленно применить этот результат к операторным алгебрам B_α, потому что гомоморфизм между операторами B_α и матрицами $b_\alpha(p)$ не обязательно является изоморфизмом. Для того, чтобы отображение было изоморфизмом, надо потребовать также, что если только $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p) = 0$ для некоторых коэффициентов c^α и импульса p, то $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(k) = 0$ для всех импульсов k, что эквивалентно условию $\sum_\alpha c^\alpha B_\alpha = 0$.

Вместо рассмотрения гомоморфизма, отображающего B_α в одночастичные матрицы $b_\alpha(p)$, Коулмен и Мандула рассмотрели гомоморфизм, который отображает B_α в матрицы, определяющие действие B_α на *двухчастичные состояния* с фиксированными 4-импульсами p и q:

$$\big(b_\alpha(p,q)\big)_{m'n',mn} = \big(b_\alpha(p)\big)_{m'm}\delta_{n'n} + \big(b_\alpha(q)\big)_{n'n}\delta_{m'm}. \tag{24.B.4}$$

Инвариантность S-матрицы для упругого и квазиупругого рассеяния двух частиц с 4-импульсами p и q с переходом в две частицы с импульсами p' и q' и массами $\sqrt{-p'_\mu p'^\mu} = \sqrt{-p_\mu p^\mu}$ и $\sqrt{-q'_\mu q'^\mu} = \sqrt{-q_\mu q^\mu}$ приводит к условию

$$b_\alpha(p',q')S(p',q';p,q) = S(p',q';p,q)b_\alpha(p,q). \tag{24.B.5}$$

Здесь $S(p',q';p,q)$ является матрицей той же размерности, что $b(p,q)$ и $b(p',q')$, определенной через связные матричные элементы S-матрицы $S(pm,qn \to p'm',q'n')$ по формуле

$$S(pm,qn \to p'm',q'n') \equiv \delta^4(p'+q'-p-q)\,\big(S(p',q';p,q)\big)_{m'n',mn}. \tag{24.B.6}$$

Согласно предположению 2 и оптической теореме (см. раздел 3.6) для почти любого выбора p и q амплитуда упругого рассеяния не обращается в нуль при рассеянии вперед, и тогда из предположения 3 следует, что матрица $S(p',q';p,q)$ несингулярна почти для всех значений p' и q', лежащих на тех же массовых поверхностях и удовлетворяющих условию сохранения 4-импульса $p'+q'=p+q$. Таким образом, формула (24.B.5) почти для всех таких значений 4-импульсов является *преобразованием подобия.*

Отсюда следует, что если $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p,q)=0$ почти для любых фиксированных значений 4-импульсов p и q, то $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p',q')=0$ почти для любых значений 4-импульсов p' и q', удовлетворяющих условию $p'+q'=p+q$ и лежащих на одних и тех же массовых поверхностях. К сожалению, отсюда совсем не следует, что $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p')$ и $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(q')$ обращаются в нуль. Мы можем только сказать, что эти матрицы пропорциональны единичной матрице (с противоположными коефициентами). Чтобы двигаться дальше, необходимо рассмотреть не $b_\alpha(p)$ или $b_\alpha(p,q)$, а их части, имеющие равный нулю след.

Из соотношения (24.B.5) немедленно вытекает, что

$$\mathrm{Tr}\, b_\alpha(p',q')=\mathrm{Tr}\, b_\alpha(p,q). \tag{24.B.7}$$

Если учесть соотношение (24.B.4), то

$$\begin{aligned} &N(\sqrt{-q_\mu q^\mu})\,\mathrm{tr}\, b_\alpha(p')+N(\sqrt{-p_\mu p^\mu})\,\mathrm{tr}\, b_\alpha(q') \\ &\quad = N(\sqrt{-q_\mu q^\mu})\,\mathrm{tr}\, b_\alpha(p)+N(\sqrt{-p_\mu p^\mu})\,\mathrm{tr}\, b_\alpha(q), \end{aligned} \tag{24.B.8}$$

где $N(m)$ — число типов частиц массой $m^\star$. Маленькая буква «t» в знаке следа обозначает сумму по одночастичным, а не по двухчастичным индексам. Чтобы это соотношение выполнялось почти для всех 4-импульсов, лежащих на массовой поверхности и удовлетворяющих условию $p'+q'=p+q$, необходимо, чтобы функция $\mathrm{tr}\, b_\alpha(p)/N(\sqrt{-p_\mu p^\mu})$ была линейной** по p:

$$\frac{\mathrm{tr}\, b_\alpha(p)}{N(\sqrt{-p_\mu p^\mu})}=a^\mu_\alpha p_\mu, \tag{24.B.9}$$

*Эти множители не были приведены Коулменом и Мандулой явно. Но они необходимы для определения генераторов симметрии $B^\sharp_\alpha$, ядра которых имеют равный нулю след. Коулмен и Мандула сделали этот шаг без объяснения.

**Легко видеть, что постоянный член в (24.B.9) исключается существованием процессов, в которых не сохраняется число частиц. Эти процессы неизбежны в любой релятивистской квантовой теории, удовлетворяющей принципу кластерного разложения. Но даже если мы рассмотрим только двухчастичные процессы и не воспользуемся этим аргументом, постоянный член в (24.B.9) приведет только к изменению действия внутренних симметрий на физические состояния.

где a^μ_α не зависит от p (и от ничего больше, кроме выписанных индексов). Мы можем определить новые генераторы симметрии, вычитая члены, линейные по оператору импульса P_μ:

$$B^\sharp_\alpha \equiv B_\alpha - a^\mu_\alpha P_\mu, \tag{24.B.10}$$

которые, в соответствии с (24.B.9), представляются матрицами по одночастичным состояниям и имеют равный нулю след:

$$\left(b^\sharp_\alpha(p)\right)_{n'n} = (b_\alpha(p))_{n'n} - \frac{\mathrm{tr}\, b_\alpha(p)}{N(\sqrt{-p_\mu p^\mu})}\delta_{n'n}. \tag{24.B.11}$$

Поскольку P_μ коммутирует с B_α, и единичная матрица коммутирует со всеми матрицами, то коммутаторы для $B^\sharp_\alpha$ будут такими же, как и для B_α, а коммутаторы матриц $b^\sharp_\alpha$ – такими же, как коммутаторы матриц $b_\alpha(p)$:

$$[B^\sharp_\alpha, B^\sharp_\beta] = i\sum_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta} B_\gamma = i\sum_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta}\left[B^\sharp_\gamma + a^\mu_\gamma P_\mu\right], \tag{24.B.12}$$

$$\left[b^\sharp_\alpha(p), b^\sharp_\beta(p)\right] = i\sum_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta} b_\gamma(p) = i\sum_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta}\left[b^\sharp_\gamma(p) + a^\mu_\gamma p_\mu\right]. \tag{24.B.13}$$

Кроме того, из формулы (24.B.13) и того факта, что коммутаторы конечных матриц $b^{\sharp(p)}_\alpha$ имеют нулевой след, следует, что* $\sum_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta} a^\mu_\gamma = 0$. Подстановка в соотношение (24.B.12), показывет, что коммутаторы матриц $B^\sharp_\alpha$ удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и матрицы B_α:

$$[B^\sharp_\alpha, B^\sharp_\beta] = i\sum_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta} B^\sharp_\gamma. \tag{24.B.14}$$

Поскольку $B^\sharp_\alpha$ является генератором группы, амплитуда рассеяния удовлетворяет соотношению

$$b^\sharp_\alpha(p', q') S(p', q'; p, q) = S(p', q'; p, q) b^\sharp_\alpha(p, q), \tag{24.B.15}$$

где $b^\sharp_\alpha(p,q)$ являются матрицами, представляющими $B^\sharp_\alpha$ на двухчастичных состояниях:

$$\left(b^\sharp_\alpha(p,q)\right)_{m'n',mn} = \left(b^\sharp_\alpha(p)\right)_{m'm}\delta_{n'n} + \left(b^\sharp_\alpha(p)\right)_{n'n}\delta_{m'm} \tag{24.B.16}$$

*Это одно из тех мест, где мы используем предположение 1, без чего коммутаторы не обязательно имет нулевой след. Кроме того, здесь важно, что мы работаем с коммутаторами, а не с антикоммутаторами, поскольку единичные матрицы не антикоммутируют с другими матрицами, а антикоммутаторы конечных матриц не обязательно имеют нулевой след.

и удовлетворяющих тем же коммутационным соотношениям, что и $B^\sharp_\alpha$:

$$\left[b^\sharp_\alpha(p,q), b^\sharp_\beta(p,q)\right] = i\sum_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta} b^\sharp_\gamma(p,q). \tag{24.B.17}$$

Преимущество работы с этими двухчастичными матрицами состоит в том, что поскольку $S(p',q';p,q)$ несингулярна, то, если $\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(p,q) = 0$ для некоторых фиксированных 4-импульсов p и q, находящихся на массовых поверхностях, то $\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(p',q') = 0$ почти для всех p' и q', находящихся на тех же массовых поверхностях и удовлетворяющих условию $p'+q' = p+q$. Так как мы рассматриваем матрицы, след которых равен нулю, то

$$\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(p') = \sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(q') = 0. \tag{24.B.18}$$

Из этого хотелось бы сделать вывод, что $\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(k) = 0$ для *всех* 4-импульсов k, лежащих на массовой поверхности. Но до сих пор мы доказали только, что $\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(p') = 0$ почти для всех тех p', для которых $q' = p+q-p'$, причем p' и q' должны лежать на массовой поверхности. Чтобы обойти это ограничение, используем прием Коулмена и Мандулы. Заметим, что если $\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(p,q) = 0$, то из формул (24.B.18) и (24.B.16) вытекает, что

$$\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(p,q') = 0.$$

Следовательно, согласно соотношению (24.B.15)), имеем

$$\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(k, p+q'-k) = 0,$$

и поэтому

$$\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(k) = 0 \tag{24.B.19}$$

почти для всех 4-импульсов k, при условии, что 4-импульс $p+q'-k$ лежит на массовой поверхности. Условия, что q' и $p+q-q'$ лежат на массовой поверхности, оставляют два свободных параметра в q', так что у нас есть достаточно свободы для выбора q'; условие, что $p+q'-k$ тоже лежит на массовой поверхности, в свою очередь, оставляет нам свободу выбрать любое значение $\mathbf{k}$ по крайней мере внутри конечного объема импульсного пространства. Выбирая $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ достаточно большими, этот объем можно сделать таким большим, как нам это нужно. Поэтому, если $\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(p,q) = 0$ для некоторых фиксированных и лежащих на массовой поверхности 4-импульсов p

и q, то $\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(k) = 0$ почти для всех 4-импульсов k, лежащих на массовой поверхности. Но тогда, если $\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(k_0) \neq 0$ для некоторого значения 4-импульса k_0, лежащего на массовой поверхности, то процесс рассеяния частиц с начальными 4-импульсами k_0 и k, лежащими на массовой поверхности, и конечными k' и k'', будет запрещен генерированной $\sum_\alpha c^\alpha B^\sharp_\alpha$ симметрией почти для всех k, k' и k'', что противоречит нашему предположению об аналитичности амплитуды рассеяния. Мы приходим к заключению, что если $\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(p,q) = 0$ для некоторых фиксированных значений 4-импульсов p и q, лежащих на массовой поверхности, то $\sum_\alpha c^\alpha b^\sharp_\alpha(k) = 0$ для *всех* значений k и поэтому $\sum_\alpha c^\alpha B^\sharp_\alpha = 0$, так что отображение, переводящее B_α в $b^\sharp_\alpha(p,q)$, является изоморфизмом.

Отсюда немедленно следует, что поскольку число независимых матриц $b^\sharp_\alpha(p,q)$ не может быть больше $N(\sqrt{-p_\mu p^\mu})N(\sqrt{-q_\mu q^\mu})$, то и число независимых генераторов симметрии B_α может быть только конечным. Поэтому, как это подчеркивали Коулмен и Мандула в доказательстве своей теоремы, не обязательно делать независимое предположение о конечномерности алгебры симметрии.

Далее, теоремы раздела 15.2 говорят нам, что алгебра Ли конечных эрмитовых матриц типа $b^\sharp_\alpha(p,q)$ для фиксированных p и q является, самое большее, прямой суммой полупростой компактной алгебры Ли и некоторого числа алгебр Ли $U(1)$. Мы уже видели, что эта алгебра Ли изоморфна алгебре генераторов симметрии $B^\sharp_\alpha$, и поэтому $B^\sharp_\alpha$ должны также покрывать, самое большее, прямую сумму компактной полупростой алгебры Ли и алгебр Ли группы $U(1)$.

Сначала обратимся к алгебрам Ли $U(1)$. Для любой пары 4-импульсов p и q, лежащих на массовой поверхности, можно найти генератор группы Лоренца J, оставляющий 4-импульсы p и q инвариантными. (Если p и q светоподобны и параллельны, то возьмем J, генерирующий вращения вокруг общего направления векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. В противном случае $p+q$ будет времениподобным, и тогда мы можем взять J, генерирующий вращения вокруг общего направления $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ в системе центра масс, где $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$.) Мы можем выбрать базис двухчастичных состояний, в котором J диагонален, так что

$$J|pm,qn\rangle = \sigma(m,n)|pm,qn\rangle. \tag{24.В.20}$$

Оператор P_μ коммутирует со всеми $B^\sharp_\alpha$, и $[J,P_\mu]$ является линейной комбинацией компонент P_μ, так что P_μ коммутирует со всеми $[J,B^\sharp_\alpha]$, и поэтому генератор симметрии $[J,B^\sharp_\alpha]$ должен быть линейной комбинацией B_β, которые, по определению, образуют полный набор генераторов симметрии, коммутирующих с P_μ. Более конкретно, поскольку все матрицы, представляющие коммутатор генераторов симметрии, имеют нулевой след, то $[J, B^{\sharp}_{\alpha}]$ должен быть линейной комбинацией $B^{\sharp}_{\beta}$. Но любой эрмитовый генератор $B^{\sharp}_{i}$ группы $U(1)$ из алгебры $B^{\sharp}_{\beta}$ должен коммутировать со всеми $B^{\sharp}_{\beta}$, и, в частности, должен коммутировать с $[J, B^{\sharp}_{i}]$:

$$[B^{\sharp}_{i}, [J, B^{\sharp}_{i}]] = 0.$$

Вычисляя среднее значение этого двойного коммутатора в двухчастичном базисе, в котором J диагонален, получаем

$$0 = \sum_{m',n'} \left(\sigma(m',n') - \sigma(m,n)\right) \left|\left(b^{\sharp}_{i}(p,q)\right)_{m'n',mn}\right|^2, \tag{24.B.21}$$

для любых m и n. Эти индексы принимают конечные значения, поэтому если бы для любого σ существовали m и n, для которых $\sigma(m,n) = \sigma$ и m' и n', для которых $\sigma(m',n') \neq \sigma$, при условии, что $(b^{\sharp}_{i}(p,q))_{m'n',mn} \neq 0$, то тогда должно было бы существовать *наименьшее* σ, для которого правая часть формулы (24.B.21) с этими m и n была бы положительно определенной, что противоречит (24.B.21). Итак, мы делаем вывод, что матричный элемент $(b^{\sharp}_{i}(p,q))_{m'n',mn}$ должен быть равен нулю при всех m, n, m' и n', для которых $\sigma(m'n') \neq \sigma(m,n)$. Поскольку алгебра $b^{\sharp}_{i}(p,q)$ изоморфна алгебре $B^{\sharp}_{i}$, то каждый из $U(1)$ генераторов $B^{\sharp}_{i}$ коммутирует с J. Так как можно выбрать вектор $p+q$ в любом времениподобном направлении, то каждый из генераторов $U(1)$ $B^{\sharp}_{i}$ коммутирует со всеми генераторами $J_{\mu\nu}$ однородной группы Лоренца. Тот факт, что они коммутируют с теми операторами, которые в разделе 2.5 мы называли «бустами», означает, что $(b^{\sharp}_{i}(p))_{n'n}$ независимы от трехмерного импульса. Кроме того, они коммутируют с вращениями, и, следовательно, $(b^{\sharp}_{i}(p))_{n'n}$ действуют на спиновые индексы как единичные матрицы. Но тогда эти генераторы являются генераторами обычной внутренней симметрии.

Все это позволяет сказать, что $B^{\sharp}_{\alpha}$ генерируют полупростую компактную алгебру Ли. Из рассуждений раздела 24.1 (и отчасти более явно изложенных аргументов Коулмена и Мандулы) следует, что генераторы полупростой компактной части алгебры Ли коммутируют с преобразованиями Лоренца и, как это было показано для генераторов группы $U(1)$, означает, что они тоже являются генераторами внутренних симметрий. Итак, мы показали, что генераторы симметрии B_{α}, коммутирующие с P_{μ}, являются либо генераторами внутренней симметрии, либо линейными комбинациями компонент самого P_{μ}.

Теперь следует рассмотреть возможность, когда генераторы симметрии не коммутируют с оператором импульса. Действие произвольного генератора симметрии A_α на одночастичное состояние $|pn\rangle$ 4-импульсом p дается формулой

$$A_\alpha|p,n\rangle = \sum_{n'} \int d^4p' \left(\mathscr{A}_\alpha(p',p)\right)_{n',n} |p',n'\rangle, \tag{24.B.22}$$

где n и n' – дискретные индексы, обозначающие z-ую компоненту спина и сорт частицы. Конечно, ядро $\mathscr{A}_\alpha(p',p)$ должно обращаться в нуль, если только p и p' не лежат на массовой поверхности. Сначала мы покажем, что $\mathscr{A}_\alpha(p',p)$ равно нулю для любых $p' \neq p$.

С этой целью заметим, что A_α является генератором группы, тогда

$$A_\alpha^f \equiv \int d^4x \exp(ip\cdot x) A_\alpha \exp(-ip\cdot x) f(x), \tag{24.B.23}$$

где P_μ — оператор 4-импульса, а $f(x)$ — функция, которую можно выбрать произвольно. Действуя на одночастичное состояние, получаем

$$A_\alpha^f|p,n\rangle = \sum_{n'} \int d^4p' \tilde{f}(p'-p) \left(\mathscr{A}_\alpha(p',p)\right)_{n'n} |p',n'\rangle, \tag{24.B.24}$$

где $\tilde{f}$ – фурье-преобразование

$$\tilde{f}(k) \equiv \int d^4x \exp(ix\cdot k) f(x). \tag{24.B.25}$$

Предположим, что на массовой поверхности существуют такие два 4-импульса p и $p+\Delta$ с $\Delta \neq 0$, что $\mathscr{A}(p+\Delta,p) \neq 0$. Исходные, лежащие на массовой поверхности 4-импульсы q, p' и q', связаны условием $p'+q' = p+q$ и поэтому $q+\Delta$, $p'+\Delta$ и $q'+\Delta$ не могут лежать на массовой поверхности. Если мы возьмем такую функцию $\tilde{f}(k)$, чтобы она обращалась в нуль вне достаточно малой области вокруг Δ, то оператор A_α^f уничтожит все одночастичные состояния с 4-импульсами q, p' и q'. Останутся только одночастичные состояния с 4-импульсом p. Поэтому такая симметрия запрещала бы любой процесс рассеяния, когда частицы с импульсами p и q переходят в состояния с импульсами p' и q', что противоречит предположениям 2 и 3, согласно которым рассеяние возможно почти при всех значениях энергий и углов.

Этот результат не означает, что любой генератор симметрии A_α должен коммутировать с P_μ, потому что ядра $\mathscr{A}_\alpha(p',p)$ могут содержать члены, пропорциональные как самой $\delta^4(p'-p)$, так и ее производным. Для учета такой возможности, Коулмен и Мандула сделали «грубое техническое предположение», что ядра $\mathscr{A}_\alpha(p',p)$ являются *обобщенными функциями*. Это означает, что каждое ядро может содержать, в лучшем случае, конечное число D_α производных от $\delta^4(p'-p)$. Иными словами, предполагается, что каждый генератор симметрии A_α действует на одночастичные состояния как полином порядка D_α по производным $\partial/\partial p_\mu$ с матричными коэффициентами, которым в этой точке разрешается зависеть от импульса и спина. Чтобы использовать ранее полученные результаты для генераторов симметрии, коммутирующих с операторами импульса, Коулмен и Мандула рассмотрели D_α-кратный коммутатор операторов импульса с A_α

$$B_\alpha^{\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}} \equiv \left[P^{\mu_1},\left[P^{\mu_2},\ldots\left[P^{\mu_{D_\alpha}},A_\alpha\right]\right]\ldots\right]. \tag{24.B.26}$$

Матричные элементы коммутаторов $B_\alpha^{\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}$ с P_μ между состояниями с 4-импульсами p' и p пропорциональны $D_\alpha+1$ множителям $p'-p$, умноженным на полином порядка D_α по производным по импульсу, действующим на $\delta^4(p'-p)$, и поэтому они обращаются в нуль. Поскольку генераторы $B_\alpha^{\mu_1\cdots\mu_{D_\alpha}}$ коммутируют с операторами импульса, то в соответствии с уже полученными результатами, они действуют на одночастичные состояния как матрицы вида

$$b_\alpha^{\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}(p) = b_\alpha^{\sharp\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}} + a_\alpha^{\mu\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}p_\mu 1, \tag{24.B.27}$$

где $b_\alpha^{\sharp\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}$ — независящие от импульса эрмитовые матрицы со следом, равным нулю, генерирующие алгебру обычной внутренней симметрии; $a_\alpha^{\mu\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}$ — численные постоянные, не зависящие от импульса, причем и $b_\alpha^{\sharp\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}$, и $a_\alpha^{\mu\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}$ симметричны по индексам $\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}$. Кроме того, хотя A_α и не обязаны коммутировать с P_μ, они не могут уводить одночастичные состояния с массовой поверхности. Тогда, поскольку предположение 1 требует, чтобы оператор $-P_\mu P^\mu$ имел только дискретные собственные значения, генераторы A_α должны коммутировать с $-P_\mu P^\mu$. Отсюда, в частности, следует, что при $D \geqslant 1$

$$0 = [P^{\mu_1}P_{\mu_1},[P^{\mu_2},\ldots[P^{\mu_{D_\alpha}},A_\alpha]]\ldots] = 2P_{\mu_1}B_\alpha^{\mu_1\cdots\mu_{D_\alpha}},$$

следовательно

$$0 = p_{\mu_1}b_\alpha^{\mu_1\cdots\mu_{D_\alpha}}(p). \tag{24.B.28}$$

До тех пор, пока теория содержит массовые частицы, это равенство должно выполняться для 4-импульса p в любом времениподобном направлении, так что при $D_\alpha \geqslant 1$ должны выполняться условия

$$b_\alpha^{\sharp\mu_1\cdots\mu_{D_\alpha}} = 0, \tag{24.B.29}$$

и

$$a_\alpha^{\mu\mu_1\cdots\mu_{D_\alpha}} = -a_\alpha^{\mu_1\mu\cdots\mu_{D_\alpha}} \tag{24.B.30}$$

Но для $D_\alpha \geqslant 2$ условие (24.В.30) вместе с симметрией $a_\alpha^{\mu\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}$ по индексам $\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}$ приводит к $a_\alpha^{\mu\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}} = 0$. (Тогда $a_\alpha^{\mu\mu_1\mu_2\ldots\mu_{D_\alpha}} = a_\alpha^{\mu\mu_2\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}$ $= -a_\alpha^{\mu_2\mu\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}} = -a_\alpha^{\mu_2\mu_1\mu\ldots\mu_{D_\alpha}} = a_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu\ldots\mu_{D_\alpha}} = a_\alpha^{\mu_1\mu\mu_2\ldots\mu_{D_\alpha}} = -a_\alpha^{\mu\mu_1\mu_2\ldots\mu_{D_\alpha}}$.) Итак, у нас осталось, самое большее, два типа ненулевых генераторов симметрии: те генераторы симметрии с $D_\alpha = 0$, для которых генератор A_α коммутирует с P_μ и поэтому должен быть либо генератором внутренней симметрии, либо линейной комбинацией P_μ, и те генераторы симметрии с $D_\alpha = 1$, для которых

$$\left[P^\nu, A_\alpha\right] = a_\alpha^{\mu\nu} P_\mu, \tag{24.B.31}$$

где $a_\alpha^{\mu\nu}$ — антисимметричные по μ и ν числовые константы. Из коммутатора (24.В.31) следует, что

$$A_\alpha = -\frac{1}{2} i a_\alpha^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + B_\alpha, \tag{24.B.32}$$

где $J_{\mu\nu}$ — генератор преобразований собственной группы Лоренца, который в силу (2.4.13) удовлетворяет условию $[P^\nu, J^{\rho\sigma}] = -i\eta^{\nu\rho}P^\sigma + i\eta^{\nu\sigma}P^\rho$, а оператор B_α коммутирует с P_μ. Поскольку A_α и $J_{\mu\nu}$ являются генераторами симметрии, то оператор B_α должен быть линейной комбинацией генераторов внутренней симметрии и (или) линейной комбинацией компонент P_μ. Поэтому равенство (24.В.32) завершает доказательство теоремы Коулмена–Мандулы.

* * *

В теориях только с безмассовыми частицами условие (24.В.30) не обязано следовать из (24.В.28). Поскольку $p_\mu p^\mu = 0$, мы можем также иметь

$$a_\alpha^{\mu\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}} + a_\alpha^{\mu_1\mu\ldots\mu_{D_\alpha}} \propto \eta^{\mu\mu_1}. \tag{24.B.33}$$

В этом случае алгебра симметрии состоит из алгебр внутренних симметрий и алгебры конформной группы, которая определяется генераторами K^μ и D вместе с генераторами $J^{\mu\nu}$ и P^μ группы Пуанкаре. Коммутационные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} &[P^\mu, D] = iP^\mu, && [K^\mu, D] = -iK^\mu, \\ &[P^\mu, K^\nu] = 2i\eta_{\mu\nu}D + 2iJ^{\mu\nu}, && [K^\mu, K^\nu] = 0, \\ &[J^{\rho\sigma}, K^\mu] = i\eta^{\mu\rho}K^\sigma - i\eta^{\mu\sigma}K^\rho, && [J^{\rho\sigma}, D] = 0, \end{aligned} \tag{24.B.34}$$

а коммутационные соотношения (2.4.12)–(2.4.14) для алгебры Пуанкаре

$$\begin{aligned} &i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}, \\ &i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho, \\ &[P^\mu, P^\rho] = 0. \end{aligned} \tag{24.B.35}$$

Бесконечно малый элемент группы

$$U(1+\omega,\varepsilon,\lambda,\rho) = 1 + (i/2)J_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + iP_\mu\varepsilon^\mu + i\lambda D + iK_\mu\rho^\mu \qquad (24.B.36)$$

индуцирует бесконечно малое пространственно-временное преобразование

$$x^\mu \to x^\mu + \omega^{\mu\nu}x_\nu + \varepsilon^\mu + \lambda x^\mu + \rho^\mu x^\nu x_\nu - 2x^\mu\rho^\nu x_\nu. \qquad (24.B.37)$$

Эти формулы дают наиболее общий вид бесконечно малых преобразований пространства-времени, инвариантных на световом конусе.

Задачи

1. Покажите, что в случае безмассовых частиц самая общая алгебра симметрии, допускаемая предположениями теоремы Коулмена–Мандулы, состоит из генераторов внутренней симметрии и либо алгебры Пуанкаре, либо конформной алгебры (24.B.34), (24.B.35).
2. Покажите, что действие Жерве–Сакиты (24.2.5) инвариантно относительно преобразования суперсимметрии на мировом листе (24.2.7).
3. Вычислите изменение плотности лагранжиана Весса–Зумино (24.2.9) при пространственно-временном преобразовании суперсимметрии (24.2.8).

Список литературы

1. B. Sakita, *Phys. Rev.* **136**, B 1756 (1964); F. Gursey and L. A. Radicati, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 173 (1964); A. Pais, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 175 (1964); F. Gursey, A. Pais, and L. A. Radicati, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 299 (1964). Эти статьи перепечатаны в сб.: *Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics*, F. J. Dyson, ed. (W. A. Benjamin, New York, 1966), вместе с полезными лекциями Дайсона по этим вопросам.
2. E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **51**, 106 (1937). Это воспроизведено в сб.: *Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics* [1].
3. A. Salam, R. Delbourgo, and J. Strathdee, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A 284**, 146 (1965); M. A. B. Beg and A. Pais, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 267 (1965); B. Sakita and K. C. Wali, *Phys. Rev.* **139**, B 1355 (1965). Это воспроизведено в сб.: *Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics* [1].
4. W. D. McGlinn, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 467 (1964); O. W. Greenberg, *Phys. Rev.* **135**, B 1447 (1964); L. Michel, *Phys. Rev.* **137**, B 405

(1964); L. Michel and B. Sakita *Ann. Inst. Henri-Poincaré*, **2**, 167 (1965); M. A. B. Beg and A. Pais, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 509, 577 (1965); S. Coleman, *Phys. Rev.* **138**, B 1262 (1965); S. Weinberg, *Phys. Rev.* **139**, B 587 (1965); L. O'Raifeartaigh, *Phys. Rev.* **139**, B 1052 (1965). Это воспроизведено в сб.: *Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics* [1].

5. S. Coleman and J. Mandula, *Phys. Rev.* , **159**, 1251 (1967).

6. В качестве введения со ссылками на оригинальную литературу см. монографию M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987); J. Polchinski, *String Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).

7. P. Ramond, *Phys. Rev.* **D3**, 2415 (1971). Эта статья перепечатана в сб.: *Superstrings — The First 15 Years of SuperString Theory*, J. H. Schwarz, ed. (World Scientific, Singapore, 1985)

8. A. Neveu and J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.* , **B31**, 85 (1971); *Phys. Rev.* **D4**, 1109 (1971). Эта статья перепечатана в сб.: *Superstrings — The First 15 Years of SuperString Theory* [7]. См. также Y. Aharonov, A. Casher, and L. Susskind, *Phys. Rev.* , **D5**, 988 (1972).

9. J.-L. Gervais and B. Sakita, *Nucl. Phys.* **B34**, 632 (1971). Эта статья перепечатана в сб.: *Superstrings — The First 15 Years of SuperString Theory* [7].

10. J. Wess and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B70**, 39 (1974). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersymmetry*, S. Ferrara, ed. (North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapore, 1987).

11. J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.* **49B**, 52 (1974). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersymmetry* [10].

11*a*. F. Gliozzi, J. Scherk, and D. Olive, *Nucl. Phys.* **B122**, 253 (1977).

12. Yu. A. Gol'fand and E. P. Likhtman, *JETP Letters* **13**, 323 (1971). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersymmetry* [10].

13. D. V. Volkov and V. P. Akulov, *Phys. Lett.* **46B**, 109 (1973). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersymmetry* [10].

14. M. Gell-Mann, Cal. Tech. Synchrotron Laboratory Report CTSL–20 (1961), не опубликовано. Эта работа перепечатана наряду с другими статьями по $SU(3)$ симметрии в сб.: M. Gell-Mann and Y. Neeman, *The Eightfold Way* (Benjamin, New York, 1964).

15. R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. F. Sohnius, *Nucl. Phys.* , **B88**, 257 (1975). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersymmetry* [10].

25

Алгебры суперсимметрии

В этой главе, следуя работе Хаага, Лопушанского и Сониуса [1], исходя из первых принципов, будет развита форма алгебры суперсимметрии. Как мы увидим, в условиях применимости теоремы Коулмена–Мандулы эта структура почти однозначно фиксируется требованием лоренц-инвариантности. Затем непосредственно из алгебры суперсимметрии будет выведена структура супермультиплетов одночастичных состояний.

25.1. Градуированные алгебры Ли и градуированные параметры

В разделе 2.2 мы видели, как выразить любое непрерывное преобразование симметрии в терминах алгебры Ли линейно независимых генераторов симметрии t_a, удовлетворяющих коммутационным соотношениям $[t_a, t_b] = i\sum_c C^c_{ab} t_c$. Почти таким же путем суперсимметрия выражается в терминах генераторов симметрии t_a, которые образуют *градуированную* алгебру Ли [2], реализуемую коммутационными *и* антикоммутационными соотношениями вида

$$t_a t_b - (-1)^{\eta_a \eta_b} t_b t_a = i \sum_c C^c_{ab} t_c. \tag{25.1.1}$$

(В этом разделе условие суммирования по дважды повторяющимся индексам временно отменено.) Здесь величина η_a, называемая обычно *градуировкой* оператора t_a, для каждого a есть либо $+1$, либо 0, а C^c_{ab} — набор числовых структурных констант. Генераторы t_a, для которых $\eta_a = 1$, называются *фермионными*; те генераторы, для которых $\eta_a = 0$, называются *бозонными*. Соотношение (25.1.1) содержит в себе коммутационные соотношения бозонных операторов друг с другом и с фермионными операторами, но антикоммутационные соотношения между фермионными операторами. Мы вернемся вскоре к мотивировке формулы (25.1.1), а пока только посмотрим на ее следствия для структурных констант.

Согласно формуле (25.1.1), структурные константы должны удовлетворять условиям

$$C^c_{ba} = -(-1)^{\eta_a\eta_b}C^c_{ab}. \qquad (25.1.2)$$

Для любого оператора, образованного как функционал полевых операторов, произведение двух бозонных или двух фермионных операторов есть бозонный оператор, а произведение фермионного и бозонного операторов — фермионный оператор, так что

$$C^c_{ab} = 0, \text{ если не выполнено условие } \eta_c = \eta_a + \eta_b \pmod 2. \qquad (25.1.3)$$

Кроме того, для любого оператора, образованного указанным способом, эрмитово-сопряженный оператор к бозонному или фермионному оператору есть, соответственно, бозонный или фермионный оператор. Если операторы t_a эрмитовы, то структурные константы удовлетворяют условию действительности

$$C^c_{ab}{}^* = -C^c_{ba}. \qquad (25.1.4)$$

Структурные константы удовлетворяют также нелинейным ограничениям, следующим из тождества Якоби для супералгебры

$$(-1)^{\eta_c\eta_a}\big[[t_a,t_b\},t_c\big\} + (-1)^{\eta_a\eta_b}\big[[t_b,t_c\},t_a\big\} + (-1)^{\eta_b\eta_c}\big[[t_c,t_a\},t_b\big\} = 0. \quad (25.1.5)$$

Здесь «$[\ldots\}$» означает коммутатор/антикоммутатор, подобный тому, что стоит в левой стороне формулы (25.1.1), но обобщенный на любые градуированные операторы O, O' и т. п.

$$[O,O'\} \equiv OO' - (-1)^{\eta(O)\eta(O')}O'O = -(-1)^{\eta(O)\eta(O')}[O',O\}, \qquad (25.1.6)$$

причем имеется в виду, что любому произведению генераторов $O = t_at_bt_c\cdots$ соответствует градуировка $\eta(O) \equiv \eta_a + \eta_b + \eta_c\cdots \pmod 2$. (Чтобы доказать формулу (25.1.5), достаточно доказать, что коэффициенты при $t_at_bt_c$ и $t_at_ct_b$ обращаются в нуль. Тогда, благодаря симметрии левой стороны соотношения (25.1.5) при циклических перестановках $abc \to bca \to cab$, коэффициенты при всех остальных произведениях генераторов также обращаются в нуль. Коэффициент при $t_at_bt_c$ в формуле (25.1.5) равен

$$(-1)^{\eta_c\eta_a} - (-1)^{\eta_a\eta_b}(-1)^{\eta_a(\eta_b+\eta_c)} = 0,$$

а коэффициент при $t_at_ct_b$ равен

$$(-1)^{\eta_a\eta_b}(-1)^{\eta_b\eta_c}(-1)^{\eta_a(\eta_b+\eta_c)} - (-1)^{\eta_b\eta_c}(-1)^{\eta_c\eta_a} = 0,$$

что и требовалось доказать.) Подставляя формулу (25.1.1) в соотношение (25.1.5), получим упомянутые выше ограничения

$$\sum_d(-1)^{\eta_c\eta_a}C^d_{ab}C^e_{dc}+\sum_d(-1)^{\eta_a\eta_b}C^d_{bc}C^e_{da}+\sum_d(-1)^{\eta_b\eta_c}C^d_{ca}C^e_{db}=0 \qquad (25.1.7)$$

Разумеется, если все генераторы являются бозонными, то формула (25.1.5) переходит в обычное тождество Якоби, а формула (25.1.7) – в обычное нелинейное условие (2.2.22) на структурные константы.

Соотношение (25.1.1) можно взять в качестве исходного, но ему можно также дать обоснование, подобное тому, которое было дано в разделе 2.2 для обычных алгебр Ли, как необходимого свойства конечных непрерывных преобразований симметрии. Отличие лишь в том, что теперь эти преобразования зависят от непрерывных *градуированных* параметров. Элементы набора градуированных c-числовых параметров, включающего грассмановы параметры (см. раздел 9.5) наряду с обычными числами, можно рассматривать как «числа», которые удовлетворяют ассоциативному и дистрибутивному правилам, но вместо простой коммутативности удовлетворяют соотношениям

$$\alpha^a\beta^b=(-1)^{\eta_a\eta_b}\beta^b\alpha^a, \qquad (25.1.8)$$

где обозначения $\alpha^a,\beta^a,\ldots$ использованы для того, чтобы отличать различные значения a-го параметра, подобно тому, как в векторной алгебре мы можем обозначить через v^a и u^a a-ые компоненты различных значений некоторого действительного вектора. Как и ранее, a-ый градуированный параметр характеризуется градуировкой η_a, равной +1 или 0 для фермионного или бозонного параметра α^a соответственно. Иными словами, эти параметры коммутируют, если хотя бы один из них бозонный, и антикоммутируют, если они оба фермионные. Произведение $\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots$ множества градуированных параметров имеет градуировку $\eta_a+\eta_b+\eta_c+\cdots \pmod 2$; иначе говоря, такое произведение является фермионным параметром, если оно содержит нечетное число фермионных параметров, и бозонным параметром во всех остальных случаях. Легко видеть, что при такой градуировке произведения градуированных параметров удовлетворяют такому же коммутационному или антикоммутационному соотношению, как (25.1.8).

Рассмотрим непрерывное преобразование $T(\alpha)$, заданное формальным степенным рядом по градуированным параметрам α^a:

$$T(\alpha)=1+\sum_a\alpha^a t_a+\sum_{ab}\alpha^a\alpha^b t_{ab}+\cdots, \qquad (25.1.9)$$

где t_a, t_{ab}, и т. д. — множество не зависящих от α операторных коэффициентов. При этом для них не предполагаются выполненными какие-либо алгебраические соотношения типа (25.1.1). Поскольку параметры α^a

удовлетворяют соотношению (25.1.8), коэффициенты $t_{ab\dots}$ должны удовлетворять условиям симметрии/антисимметрии, таким, как

$$t_{ab} = (-1)^{\eta_a \eta_b} t_{ba}. \tag{25.1.10}$$

Удобно также предположить, что преобразование $T(\beta)$ коммутирует с любым значением α^a любого градуированного параметра. В этом случае операторные коэффициенты в (25.1.9) удовлетворяют условиям

$$\alpha^a t_b = (-1)^{\eta_a \eta_b} t_b \alpha^a, \tag{25.1.11}$$

$$\alpha^a t_{bc} = (-1)^{\eta_a(\eta_b+\eta_c)} t_{bc} \alpha^a. \tag{25.1.12}$$

Это означает, что t_b и t_{bc} коммутируют или антикоммутируют с градуированными параметрами, как если бы они сами были градуированными параметрами с градуировкой η_b и $\eta_b + \eta_c \pmod 2$ соответственно.

Другие ограничения на эти операторы следуют из требования, что $T(\alpha)$ образуют полугруппу, т. е., что произведение операторов для различных значений α и β градуированных параметров само есть T-оператор,

$$T(\alpha)T(\beta) = T(f(\alpha,\beta)), \tag{25.1.13}$$

где $f^c(\alpha,\beta)$ тоже является формальным степенным рядом по градуированным параметрам. Поскольку $T(0)T(\beta) = T(\beta)$ и $T(\alpha)T(0) = T(\alpha)$, должны выполняться соотношения

$$f^c(0,\beta) = \beta^c, \qquad f^c(\alpha,0) = \alpha^c, \tag{25.1.14}$$

и поэтому разложение $f^c(\alpha,\beta)$ в степенной ряд должно иметь вид

$$f^c(\alpha,\beta) = \alpha^c + \beta^c + \sum_{ab} f^c_{ab} \alpha^a \beta^b + \cdots, \tag{25.1.15}$$

где f^c_{ab} — набор обычных (т. е. бозонных) констант, а «$\cdots$» обозначает члены третьего и более высоких порядков по градуированным параметрам. Чтобы величина $f^c(\alpha,\beta)$ была градуированным параметром, все члены в (25.1.15) должны иметь одну и ту же градуировку, для чего необходимо, чтобы

$$f^c_{ab} = 0, \text{ если не выполнено условие } \eta_c = \eta_a + \eta_b \pmod 2. \tag{25.1.16}$$

Подстановка степенных рядов (25.1.9) и (25.1.15) в правило умножения (25.1.13) дает

$$\begin{aligned} &\Big[1 + \sum_a \alpha^a t_a + \sum_{ab} \alpha^a \alpha^b t_{ab} + \cdots\Big]\Big[1 + \sum_a \beta^a t_a + \sum_{ab} \beta^a \beta^b t_{ab} + \cdots\Big] \\ &\quad = 1 + \sum_c \Big(\alpha^c + \beta^c + \sum_{ab} f^c_{ab} \alpha^a \alpha^b + \cdots\Big) t_c \\ &\qquad + \sum_{cd} (\alpha^c + \beta^c + \cdots)(\alpha^d + \beta^d + \cdots) t_{cd} + \cdots. \end{aligned}$$

Коэффициенты при 1, α^a, β^a, $\alpha^a\alpha^b$ и $\beta^a\beta^b$ в обеих сторонах уравнения совпадают, а условие, что должны совпадать также коэффициенты при $\alpha^a\beta^b$, дает нетривиальное соотношение

$$(-1)^{\eta_a\eta_b}t_a t_b = \sum_c f^c_{ab}t_c + t_{ab} + (-1)^{\eta_a\eta_b}t_{ba} = \sum_c f^c_{ab}t_c + 2t_{ab}. \tag{25.1.17}$$

(Знаковый множитель в левой стороне возникает из-за перестановки t_a и β^b.) Вместе с аналогичными соотношениями высших порядков это позволяет вычислить всю функцию (25.1.9), если известны генераторы t_a и функция групповой композиции $f^a(\alpha, \beta)$. Но чтобы это было возможно, t_a должны удовлетворять ограничению. Разность или сумма выражения (25.1.17) и такого же выражения с переставленными a и b дает, с учетом (25.1.10), соотношения суперáлгебры Ли (25.1.1) со структурными константами

$$iC^c_{ab} = (-1)^{\eta_a\eta_b}f^c_{ab} - f^c_{ba}. \tag{25.1.18}$$

Из формул (25.1.16) и (25.1.18) непосредственно следует также соотношение (25.1.3).

Комплексное сопряжение α^* антикоммутирующего c-числа α определено так, что эрмитово сопряжение произведения α и произвольного оператора $\mathscr{O}$ есть

$$(\alpha\mathscr{O})^* = \mathscr{O}^*\alpha^*. \tag{25.1.19}$$

Отсюда следует, что произведение c-чисел ведет себя при комплексном сопряжении так же, как произведение операторов при эрмитовом сопряжении:

$$(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*, \tag{25.1.20}$$

а α^* имеет ту же градуировку, что и α.

Пространственно-временные симметрии строго ограничивают имеющие значение для физики градуированные алгебры Ли. Обратимся к рассмотрению этих ограничений.

25.2. Алгебры суперсимметрии

Рассмотрим произвольную градуированную алгебру Ли генераторов симметрии, коммутирующих с S-матрицей. Если Q — любой из фермионных генераторов симметрии, то таким же будет генератор $U^{-1}(\Lambda)QU(\Lambda)$, где $U(\Lambda)$ — квантово-механический оператор, соответствующий произвольному однородному преобразованию Лоренца $\Lambda^\mu{}_\nu$. Поэтому $U^{-1}(\Lambda)QU(\Lambda)$ есть линейная комбинация полного набора фермионных генераторов симметрии, и, следовательно, этот набор генераторов должен реализовывать представление однородной группы Лоренца. Тогда отдельные генераторы можно классифицировать согласно неприводимому представлению однородной группы Лоренца, к которому они принадлежат.

Как описано в разделе 5.6, представление однородной группы Лоренца, реализованное посредством любого набора операторов, можно определить по их коммутационным соотношениям с генераторами **A** и **B**, которые определены следующим образом:

$$\mathbf{A} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J}+i\mathbf{K}), \quad \mathbf{B} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J}-i\mathbf{K}), \tag{25.2.1}$$

где **J** и **K** — эрмитовые генераторы пространственных поворотов и лоренцевских бустов соответственно. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[A_i,A_j\right] = \sum_k \varepsilon_{ijk}A_k, \quad \left[B_i,B_j\right] = \sum_k \varepsilon_{ijk}B_k, \quad \left[A_i,B_j\right] = 0, \tag{25.2.2}$$

где i, j и k пробегают значения $1, 2, 3$, а ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор, причем $\varepsilon_{123} = +1$. Таким образом, представления однородной группы Лоренца, подобно состояниям с двумя независимыми спинами, индексируются парой целых или полуцелых чисел A и B, а элементы представления различаются парой индексов a и b, которые пробегают с единичным шагом, значения от $-A$ до $+A$ и от $-B$ до $+B$ соответственно. Конкретнее, набор $(2A+1)(2B+1)$ операторов Q^{AB}_{ab}, образующий (A,B) представление однородной группы Лоренца, удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$\left[\mathbf{A},Q^{AB}_{ab}\right] = -\sum_{a'} \mathbf{J}^{(A)}_{aa'}Q^{AB}_{a'b}, \quad \left[\mathbf{B},Q^{AB}_{ab}\right] = -\sum_{a'} \mathbf{J}^{(B)}_{bb'}Q^{AB}_{ab'}, \tag{25.2.3}$$

где $\mathbf{J}^{(j)}$ — матрица трехмерного вектора спина для углового момента j:

$$\left(J^{(j)}_1 \pm iJ^{(j)}_2\right)_{\sigma'\sigma} = \delta_{\sigma',\sigma\pm 1}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}, \quad \left(J^{(j)}_3\right)_{\sigma'\sigma} = \delta_{\sigma',\sigma}\sigma. \tag{25.2.4}$$

Из (25.2.4) следует, что*

$$-\left(\mathbf{J}^{(j)}\right)^*_{\sigma'\sigma} = (-1)^{\sigma'-\sigma}\left(\mathbf{J}^{(j)}\right)_{-\sigma',-\sigma}. \tag{25.2.5}$$

---

*Напомним, что мы используем звездочку $*$ для обозначения эрмитового сопряжения оператора или комплексного сопряжения числа; крест † будет использоваться для транспонирования матрицы, образованной из эрмитово-сопряженных операторов или комплексно-сопряженных чисел.

Таким образом, если Q^j_σ — набор операторов, которые преобразуются по представлению спина j группы вращений, тогда таким же образом преобразуются операторы $(-1)^{j-\sigma}Q^{j*}_{-\sigma}$. Формула (25.2.1) показывает также, что $\mathbf{A}^* = \mathbf{B}$. Выполнив эрмитовое сопряжение в формуле (25.2.3), можно видеть, что эрмитово-сопряженные операторы Q^{AB*}_{ab}, которые преобразуются по представлению (A,B) однородной группы Лоренца, связаны преобразованием подобия с операторами $\bar{Q}^{BA}_{ba}$, преобразующимися по (B,A) представлению:

$$Q^{AB*}_{ab} = (-1)^{A-a}(-1)^{B-b}\overline{Q}^{BA}_{-b,-a}. \qquad (25.2.6)$$

Теорема Хаага–Лопушанского–Сониуса [1] утверждает, в частности, что генераторы фермионной симметрии могут принадлежать лишь представлениям $(0,1/2)$ и $(1/2,0)$. Как мы видели, эрмитово-сопряженные операторов $(0,1/2)$ или $(1/2,0)$ есть линейные комбинации операторов $(1/2,0)$ или $(0,1/2)$, соответственно, так что полный набор операторов фермионной симметрии можно разделить на генераторы Q_{ar} представления $(0,1/2)$ (с опущенным индексом $(0,1/2)$) и им эрмитово-сопряженные генераторы Q^*_{ar} представления $(1/2,0)$, где a — спинорный индекс, пробегающий значения $\pm 1/2$, а r используется, чтобы отличать разные двухкомпонентные генераторы с одинаковыми свойствами по отношению к преобразованию Лоренца*. Далее теорема утверждает, что фермионные генераторы можно определить так, чтобы они удовлетворяли антикоммутационным соотношениям

$$\{\mathrm{Q}_{ar}, \mathrm{Q}^*_{bs}\} = 2\delta_{rs}\sigma^\mu_{ab}P_\mu, \qquad (25.2.7)$$

$$\{\mathrm{Q}_{ar}, \mathrm{Q}_{bs}\} = e_{ab}Z_{rs}, \qquad (25.2.8)$$

где P_μ — оператор 4-импульса, $Z_{rs} = -Z_{sr}$ — генераторы бозонной симметрии, а σ_μ и e — матрицы 2×2 (со строками и столбцами, помеченными индексами $+1/2, -1/2$):

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (25.2.9)$$

---

*Для двухкомпонентных вейлевских спиноров Q_{ar} мы используем прямые латинские буквы вместо курсива, чтобы отличить их от 4-компонентных спиноров Дирака, которые будут введены в этом разделе позже. Существуют также обозначения, введенные ван-дер-Варденом, в которых $(0,1/2)$ операторы типа Q записываются с точкой над индексом, $\mathrm{Q}_{\dot{a}}$, а $(1/2,0)$ операторы записываются без точки над индексом. Мы не будем использовать здесь эти обозначения, но вместо этого будем явно указывать, по какому из представлений однородной группы Лоренца, $(0,1/2)$ или $(1/2,0)$, преобразуются двухкомпонентные спиноры.

Наконец, фермионные генераторы коммутируют с энергией и импульсом:

$$\left[P_\mu, Q_{ar}\right] = \left[P_\mu, Q^*_{ar}\right] = 0, \tag{25.2.10}$$

а Z_{rs} и Z^*_{rs} представляют набор центральных зарядов этой алгебры, в том смысле, что

$$\begin{aligned} 0 &= \left[Z_{rs}, Q_{at}\right] = \left[Z_{rs}, Q^*_{at}\right] = \left[Z_{rs}, Z_{tu}\right] = \left[Z_{rs}, Z^*_{tu}\right] \\ &= \left[Z^*_{rs}, Q_{at}\right] = \left[Z^*_{rs}, Q^*_{at}\right] = \left[Z^*_{rs}, Z^*_{tu}\right]. \end{aligned} \tag{25.2.11}$$

Чтобы доказать эти утверждения, начнем с рассмотрения ненулевых генераторов фермионной симметрии, которые принадлежат некоторому неприводимому представлению (A,B) однородной группы Лоренца и поэтому могут быть обозначены как Q^{AB}_{ab}, где a и b пробегают с шагом единица значения от $-A$ до $+A$ и от $-B$ до $+B$ соответственно. Как уже отмечалось, эрмитово-сопряженные операторы связаны согласно соотношению (25.2.6) с операторами, принадлежащими представлению (B,A), так что антикоммутатор этих операторов должен иметь вид

$$\begin{aligned} \left\{Q^{AB}_{ab}, Q^{AB*}_{a'b'}\right\} =& (-1)^{A-a'}(-1)^{B-b'} \sum_{C=|A-B|}^{A+B} \sum_{D=|A-B|}^{A+B} \sum_{c=-C}^{C} \sum_{d=-D}^{D} \\ &\times C_{AB}(Cc; a, -b') C_{AB}(Dd; -a'b) X^{CD}_{cd}, \end{aligned} \tag{25.2.12}$$

где $C_{AB}(j\sigma; ab)$ — обычный коэффициент Клебша–Гордана для связи спинов A и B в спин j, а X^{CD}_{cd} — (c,d)-компонента оператора, который преобразуется согласно (C,D) представлению однородной группы Лоренца. Используя хорошо известные свойства унитарности коэффициентов Клебша–Гордана, можно выразить оператор X^{CD}_{cd} через эти антикоммутаторы:

$$\begin{aligned} X^{CD}_{cd} = & \sum_{a=-A}^{A} \sum_{b=-B}^{B} \sum_{a'=-A}^{A} \sum_{b'=-B}^{B} (-1)^{A-a'}(-1)^{B-b'} \\ &\times C_{AB}(Cc; a, -b') C_{AB}(Dd; -a'b) X^{CD}_{cd} \left\{Q^{AB}_{ab}, Q^{AB*}_{a'b'}\right\}. \end{aligned} \tag{25.2.13}$$

Не все из этих операторов обязательно отличны от нуля. Но коэффициенты Клебша–Гордана $C_{AB}(j\sigma, ab)$ при $j = \sigma = A + B$ или $j = -\sigma = A + B$ отличны от нуля лишь при $a = A$, $b = B$ и $a = -A$, $b = -B$, соответственно, причем оба равны единице. Поэтому, подставляя в формулу (25.2.13) $C = D = c = -d = A + B$, находим

$$X^{A+B,A+B}_{A+B,-A-B} = (-1)^{2B}\left\{Q^{AB}_{A,-B}, Q^{AB*}_{A,-B}\right\}. \tag{25.2.14}$$

Это выражение не может обращаться в нуль, если только не выполнено условие $Q^{AB}_{A,-B} = 0$, которое означало бы (что можно видеть, рассматривая коммутаторы с «понижающими» операторами $A_1 - iA_2$ и «повышающими» операторами $B_1 + iB_2$), что все Q^{AB}_{ab} равны нулю. Следовательно, если имеются любые неисчезающие (A,B) фермионные операторы, то их антикоммутаторы с им же сопряженными должны, по крайней мере, содержать ненулевые генераторы бозонной симметрии, принадлежащие представлению $(A+B, A+B)$.

Далее, теорема Коулмена–Мандулы утверждает, что генераторы бозонной симметрии состоят из $(1/2,1/2)$ генераторов трансляций P_μ, $(1,0)+(0,1)$ генераторов собственных преобразований Лоренца $J_{\mu\nu}$ и, возможно, $(0,0)$ генераторов различных внутренних симметрий T_A. (Напомним, что симметричные тензоры ранга N с нулевым следом преобразуются по представлению $(N/2,N/2)$, антисимметричные тензоры ранга 2 преобразуются по представлению $(1,0)+(0,1)$, а дираковские поля преобразуются по представлению $(1/2,0)+(0,1/2)$.) Следовательно, генераторы фермионной симметрии могут принадлежать только представлениям $(A+B)$ только с $A+B \leqslant 1/2$. Эти операторы переводят бозоны в фермионы и обратно, так что они не могут быть скалярами, и остаются только представления $(1/2,0)$ и $(0,1/2)$, что и требовалось доказать. Если Q_{ar} — линейно независимые $(0,1/2)$ фермионные генераторы, то антикоммутатор $\{Q_{ar}, Q^*_{bs}\}$ принадлежит представлению $(0,1/2)\times(1/2,0) = (1/2,1/2)$, поэтому он должен быть пропорционален единственному $(1/2,1/2)$ генератору бозонной симметрии, 4-вектору импульса P_μ. Лоренц-инвариантность требует, чтобы это соотношение имело вид

$$\{Q_{ar}, Q^*_{bs}\} = 2N_{rs}\sigma^\mu_{ab}P_\mu, \tag{25.2.15}$$

где N_{rs} — числовая матрица.

Чтобы убедиться в этом, используем обсуждавшийся в разделе 2.7 изоморфизм группы Лоренца (или, более строго, ее накрывающей группы) с группой $SL(2,C)$ двумерных унимодулярных комплексных матриц λ. Действие преобразования Лоренца $\Lambda^\mu{}_\nu$ на $(0,1/2)$ фермионные генераторы есть

$$U^{-1}(\Lambda)Q_{ar}U(\Lambda) = \sum_b \lambda_{ab}Q_{br}, \tag{25.2.16}$$

где Λ — преобразование Лоренца, определенное соотношением

$$\lambda\sigma_\mu\lambda^\dagger = \Lambda^\nu{}_\mu\sigma_\nu. \tag{25.2.17}$$

Можно проверить, что соотношение (25.2.16) применимо для $(0,1/2)$ операторов, если заметить, что при инфинитезимальном преобразовании Лоренца $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, где $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, соотношение (25.2.17) удовлетворяется при

$$\lambda = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}i\varepsilon_{ijk}\omega_{ij} + \omega_{k0}\right]\sigma_k,$$

в то время как*

$$U(\Lambda) = 1 + \frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} = 1 + \frac{1}{2}i\varepsilon_{ijk}\omega_{ij}J_k - i\omega_{i0}K_i.$$

(Подразумевается суммирование по повторяющимся латинским индексам i, j, k от 1 до 3.) В этом случае, приравнивая коэффициенты при ω_{ij} и ω_{i0} в формуле (25.2.16), находим, что

$$[\mathbf{J}, \mathrm{Q}_a] = -\frac{1}{2}\sum_b \sigma_{ab}\mathrm{Q}_b, \quad [\mathbf{K}, \mathrm{Q}_a] = -\frac{1}{2}i\sum_b \sigma_{ab}\mathrm{Q}_b,$$

или, эквивалентно,

$$[\mathbf{B}, \mathrm{Q}_a] = -\frac{1}{2}\sum_b \sigma_{ab}\mathrm{Q}_b, \quad [\mathbf{A}, \mathrm{Q}_a] = 0,$$

откуда видно, что операторы, удовлетворяющие соотношению (25.2.16), принадлежат представлению $(0, 1/2)$. Далее, σ_μ образуют полный набор матриц 2×2, поэтому антикоммутатор $\{\mathrm{Q}_{ar}, \mathrm{Q}^*_{bs}\}$ можно представить как $N^\mu_{rs}(\sigma_\mu)_{ab}$, где N_μ — некоторая матрица операторов. Соотношения (25.2.16) и (25.2.17) показывают, что эти операторы есть 4-векторы, в том смысле, что $U^{-1}(\Lambda)N^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu N^\nu$, и тогда, согласно теореме Коулмена–Мандулы, они должны быть пропорциональны P^μ — единственному 4-вектору операторов бозонной симметрии P^μ. Полагая $N^\mu_{rs} = 2P^\mu N_{rs}$, получим соотношение (25.2.15).

Применим теперь линейное преобразование к генераторам Q_{ar}, чтобы представить их антикоммутаторы в виде (25.2.7). Для этого нужно установить, что матрица N_{rs} эрмитова и положительно определена. То, что она эрмитова, сразу следует из результата применения эрмитового сопряжения к соотношению (25.2.15). Чтобы убедиться, что она положительно определена, напомним прежде всего, что Q_{ar} выбраны линейно независимыми, так что для любой ненулевой линейной комбинации $\mathrm{Q} \equiv \sum_{ar} d_a c_r \mathrm{Q}_{ar}$ должно существовать некоторое состояние $|\Psi\rangle$, при действии на которое оператором Q не получится нуль. Вычисление среднего значения соотношения (25.2.15) в этом состоянии дает

$$2\langle\Psi|\sum_{ab}\sigma^\mu_{ab}P_\mu d_a d_b^*|\Psi\rangle \sum_{rs} c_r c_s^* N_{rs} = \langle\Psi|\{\mathrm{Q}, \mathrm{Q}^*\}|\Psi\rangle > 0.$$

*Здесь K_i определено как J_{i0}. В двух первых изданиях тома I была ошибка: K_i было определено как J^{i0} в разделах 2.4, 3.3 и 3.5, но как J_{i0} в разделах 5.6 и 5.9, тогда как **A** и **B** всюду определены согласно (25.2.1).

Отсюда сразу следует, что $\sum_{rs} c_r c_s^* N_{rs}$ не может обращаться в нуль для любых c_r, которые не все одновременно равны нулю. Поэтому матрица N_{rs} является либо положительно определенной, либо отрицательно определенной. Но оператор $\sum_{ab}(\sigma_\mu)_{ab}P^\mu d_a d_b^*$ является положительным в пространстве физических состояний с $-P^\mu P_\mu \geqslant 0$ и $P^0 > 0$, так что матрица N_{rs} должна быть положительно определенной*.

Теперь можно определить новые фермионные генераторы

$$Q'_{ar} \equiv \sum_s N_{rs}^{-1/2} Q_{as},$$

для которых антикоммутаторы принимают вид

$$\left\{Q'_{ar}, A'^{*}_{bs}\right\} = 2\delta_{rs}\sigma^\mu_{ab}P_\mu .$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что фермионные генераторы определены именно таким образом, и опустим штрихи, так что соотношение (25.2.7) выполняется.

Далее нужно показать, что Q_{ar} коммутируют с 4-вектором импульса P_μ. Коммутатор $(1/2, 1/2)$ оператора, подобного P_μ, с $(0, 1/2)$ оператором, подобным Q, может быть только $(1/2, 0)$ или $(1/2, 1)$ оператором. Но мы видели, что не существует $(1/2, 1)$ генераторов симметрии, поэтому коммутатор P_μ с Q может быть пропорционален только $(1/2, 0)$ генератору симметрии Q^*. Лоренц-инвариантность требует, чтобы это соотношение имело вид

$$\left[\mathcal{M}_{ab}, Q_{cr}\right] = \sum_s e_{ac} K_{rs} Q^*_{bs}, \tag{25.2.18}$$

где K — числовая матрица, а $\mathcal{M}$ — матрица операторов

$$\mathcal{M} \equiv \sigma_\mu P^\mu. \tag{25.2.19}$$

(Матрица e_{ac} — коэффициент Клебша–Гордана для связи двух спинов $1/2$ в суммарный спин 0.) Тогда прямые вычисления дают

$$\left[\mathcal{M}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}, \left[\mathcal{M}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}, \left\{Q_{\frac{1}{2}r}, Q^*_{\frac{1}{2}s}\right\}\right]\right] = -4(\mathcal{M})_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(KK^\dagger)_{rs}. \tag{25.2.20}$$

С учетом формулы (25.2.7), левая часть этого соотношения есть линейная комбинация двойных коммутаторов $[P_\mu, [P_\nu, P_\lambda]]$, каждый из которых равен

*Этот аргумент можно обратить. Предполагая суперсимметрию с положительно определенной матрицей N_{rs}, как в (25.2.7), можно показать, что $P^0 > 0$ для всех состояний [2]. Однако это заключение неверно при учете гравитации. Но если не учитывать гравитацию, сдвиг энергии всех состояний на одну и ту же величину не приведет к физическим эффектам.

нулю, тогда как $(\mathcal{M})_{-1/2-1/2}$ при произвольных импульсах не равняется нулю, так что $KK^\dagger = 0$, и поэтому $K = 0$. С учетом коммутатора (25.2.18), это показывает, что $[P_\mu, Q_{ar}] = 0$. Комплексное сопряжение дает $[P_\mu, Q^*_{ar}] = 0$.

Теперь можно рассмотреть антикоммутатор двух Q. Антикоммутатор двух $(0,1/2)$ генераторов симметрии должен быть линейной комбинацией $(0,1)$ и $(0,0)$ генераторов симметрии. Согласно теореме Коулмена–Мандулы, $(0,1)$ генераторы симметрии могут быть только линейными комбинациями генераторов $J_{\nu\lambda}$ собственных однородных преобразований Лоренца. Но, поскольку все Q коммутируют с P_μ, антикоммутаторы двух Q также должны коммутировать с P_μ, а формула (2.4.13) показывает, что никакая линейная комбинация генераторов $J_{\nu\lambda}$ не коммутирует с P_μ. Поэтому остаются только $(0,0)$ операторы, которые коммутируют как с P_μ, так и с $J_{\mu\nu}$. Тогда лоренц-инвариантность требует, чтобы антикоммутаторы всех Q друг с другом имели вид (25.2.8). Генераторы внутренней симметрии Z_{rs} антисимметричны по r и s, поскольку все выражение должно быть симметричным относительно одновременной перестановки r и a с s и b, а матрица e_{ab} антисимметрична по a и b.

Теперь остается только показать, что величины Z — центральные заряды. Из (25.2.8) и (25.2.10) непосредственно следует, что

$$[P_\mu, Z_{rs}] = 0. \tag{25.2.21}$$

Далее рассмотрим обобщенное тождество Якоби (25.1.5), включающее два оператора Q и один Q*:

$$0 = \left[\{Q_{ar}, Q_{bs}\}, Q^*_{ct}\right] + \left[\{Q_{bs}, Q^*_{ct}\}, Q_{ar}\right] + \left[\{Q^*_{ct}, Q_{ar}\}, Q_{bs}\right].$$

В силу формул (25.2.7) и (25.2.10), второй и третий члены обращаются в нуль, так что

$$\left[Z_{rs}, Q^*_{ct}\right] = 0. \tag{25.2.22}$$

Наконец, рассмотрим обобщенное тождество Якоби для Z, Q и Q*:

$$0 = -\left[Z_{rs}, \{Q_{at}, Q^*_{bu}\}\right] + \left\{Q^*_{bu}, \left[Z_{rs}, Q_{at}\right]\right\} - \left\{Q_{at}, \left[Q^*_{bu}, Z_{rs}\right]\right\}.$$

Первый и третий члены здесь исчезают в силу формул (25.2.21) и (25.2.22), соответственно, так что остается только второй член

$$\left\{Q^*_{bu}, \left[Z_{rs}, Q_{at}\right]\right\} = 0. \tag{25.2.23}$$

Далее, коммутатор $[Z_{rs}, Q_{at}]$ есть $(0,1/2)$ генератор симметрии, так что он должен быть линейной комбинацией Q:

$$\left[Z_{rs}, Q_{at}\right] = \sum_u M_{rstu} Q_{au}. \tag{25.2.24}$$

Тогда формула (25.2.23) дает

$$\sigma^{\mu}_{ab}P_{\mu}M_{rstu}=0$$

для всех a, b, r, s, t и u. Поскольку оператор $\sigma^{\mu}_{ab}P_{\mu}$ не равен нулю, следует заключить, что $M_{rstu}=0$, поэтому

$$\left[Z_{rs}, Q_{at}\right]=0. \tag{25.2.25}$$

Использование антикоммутационных соотношений (25.2.8) и им сопряженных вместе с коммутационными соотношениями (25.2.22), (25.2.25) и им сопряженными дает

$$\left[Z_{rs}, Z_{tu}\right]=\left[Z_{rs}, Z^{*}_{tu}\right]=\left[Z^{*}_{rs}, Z^{*}_{tu}\right]=0, \tag{25.2.26}$$

что и завершает доказательство соотношений (25.2.11), а вместе с ними и теоремы Хаага–Лопушанского–Сониуса.

Разумеется, тот факт, что Z_{rs} — центральные заряды алгебры суперсимметрии, не исключает возможности существования *других* абелевых или неабелевых внутренних симметрий. Пусть T_A натягивает полную алгебру Ли внутренних бозонных симметрий. Тогда $[T_A, Q_{ar}]$ есть $(0,1/2)$ генератор симметрии, так что он должен быть линейной комбинацией Q:

$$\left[T_A, Q_{ar}\right]=-\sum_{s}(t_A)_{rs}Q_{as}. \tag{25.2.27}$$

Из тождества Якоби для двух T и одного Q получим, что матрицы t_A образуют представление алгебры внутренней симметрии

$$\left[t_A, t_B\right]=i\sum_{C}C^{C}_{AB}t_C, \tag{25.2.28}$$

где коэффициенты C^{C}_{AB} — структурные константы алгебры внутренней симметрии

$$\left[T_A, T_B\right]=i\sum_{C}C^{C}_{AB}T_C. \tag{25.2.29}$$

Тогда Z_{rs} будут центральными зарядами не только супералгебры, образованной из всех Q, Q*, P_{μ}, Z и Z^*, но также более широкой супералгебры, которая содержит дополнительно все T_A. Чтобы убедиться в этом, заметим, что из соотношений (25.2.27) и (25.2.8) следует

$$\left[T_A, Z_{rs}\right]=-\sum_{r'}(t_A)_{rr'}Z_{r's}-\sum_{s'}(t_A)_{ss'}Z_{rs'},$$

так что Z_{rs} образуют *инвариантную* абелеву подалгебру всей алгебры бозонной симметрии. Но вспомним, что при доказательстве теоремы Коулмена–Мандулы мы нашли, что полная алгебра Ли внутренней бозонной симметрии, которая в нашем случае натянута на T_A, изоморфна прямой сумме компактной полупростой алгебры Ли и нескольких алгебр $U(1)$. Единственные инвариантные абелевы подалгебры такой алгебры Ли натянуты на генераторы $U(1)$, поэтому Z_{rs} должны быть генераторами $U(1)$ и, следовательно, должны коммутировать со всеми T_A.

Хотя Z коммутируют со всеми генераторами симметрии, они являются не просто числами, а квантовыми операторами, значения которых могут меняться от состояния к состоянию. На самом деле величины Z должны, очевидно, принимать нулевые значения для суперсимметричного вакуумного состояния, действие на которое любого суперсимметричного генератора дает нуль, но они не обязательно обращаются в нуль в общем случае. В разделе 27.9 мы увидим, как можно вычислить значения Z в калибровочных теориях с расширенной суперсимметрией.

В отсутствие центральных зарядов алгебра суперсимметрии (25.2.7), (25.2.8) инвариантна относительно группы $U(N)$ внутренних симметрий,

$$Q_{ar} \to \sum_s V_{rs} Q_{as}, \tag{25.2.30}$$

где V_{ar} — унитарная (но не обязательно унимодулярная) матрица $N \times N$. Эта симметрия известна как R–симметрия. Она может быть или не быть хорошей симметрией действия, но если она является таковой, то может нарушаться аномалиями, или может быть спонтанно нарушенной, а может быть и хорошей симметрией природы.

Алгебра суперсимметрии, в которой r, s и т. д. пробегают $N > 1$ значений, называется *N-расширенной суперсимметрией*. Если имеется только одно Q, то из условия $Z_{rs} = -Z_{sr}$ следует, что все Z исчезают, а антикоммутационные соотношения принимают более простой вид

$$\{Q_a, Q_b^*\} = 2\sigma^{\mu}_{ab} P_{\mu}, \tag{25.2.31}$$

$$\{Q_a, Q_b\} = 0. \tag{25.2.32}$$

Этот случай известен как *простая суперсимметрия* или $N = 1$ суперсимметрия. В этом случае преобразования R-симметрии есть просто $U(1)$ фазовые преобразования

$$Q_a \to \exp(i\phi) Q_a, \tag{25.2.33}$$

с действительной фазой ϕ.

Для различных целей удобно объединить $(0, 1/2)$ операторы Q_{ar} и $(1/2, 0)$ операторы, которые согласно формуле (25.2.6) можно взять как $e_{ab}\mathrm{Q}^*_{br}$, в четырехкомпонентные майорановские спинорные генераторы $Q_{\alpha r}$, определенные как

$$Q_r \equiv \begin{pmatrix} e\mathrm{Q}^*_r \\ \mathrm{Q}_r \end{pmatrix}, \tag{25.2.34}$$

или, более явно,

$$Q_{1r} = \mathrm{Q}^*_{-\frac{1}{2}r}, \quad Q_{2r} = -\mathrm{Q}^*_{-\frac{1}{2}r}, \quad Q_{3r} = \mathrm{Q}_{\frac{1}{2}r}, \quad Q_{4r} = \mathrm{Q}_{-\frac{1}{2}r}.$$

Эти величины есть майорановские спиноры в том смысле, что

$$Q_r = -\beta\varepsilon\gamma_5 Q^*_r,$$

где β, ε и γ_5 — матрицы 4×4, которые можно записать как блочные матрицы 2×2:

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Обзор свойств майорановских спиноров дан в приложении к главе 26.) Вид (25.2.34) выбран в соответствии с обычными обозначениями для четырехкомпонентного дираковского представления однородной группы Лоренца, в котором согласно формуле (5.4.4) генераторы пространственных поворотов и лоренцевских бустов, в соответствии с (5.4.19) и (5.4.20) представляются в виде

$$\mathcal{J}_i = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_i = -\frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{bmatrix}. \tag{25.2.35}$$

Вместе с (25.2.1) это показывает, что операторы **A** и **B** действуют, соответственно, только на две верхних и две нижних компоненты дираковского спинора. Отсюда ясно, почему $(0,1/2)$ операторы Q_{ar} используются в качестве нижних, а не верхних компонент в формуле (25.2.34).

В этих четырехкомпонентных обозначениях основные антикоммутационные соотношения (25.2.31) и (25.2.32) для простой суперсимметрии имеют вид

$$\{Q,\overline{Q}\} = 2\begin{pmatrix} 0 & -e(\sigma_\mu P^\mu)^{\mathrm{T}} e \\ \sigma_\mu P^\mu & 0 \end{pmatrix} = -2iP_\mu\gamma^\mu. \tag{25.2.36}$$

Наши обозначения для матриц Дирака были приведены в предисловии к этому тому; здесь нам нужно только напомнить, что

$$\gamma^0 = -i\beta = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = -i\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{25.2.37}$$

причем $e\sigma^{\mathrm{T}}e = \sigma$, $e\sigma_0 e = -\sigma_0$ и, как обычно, $\overline{Q} \equiv Q^\dagger\beta$. В случае расширенной суперсимметрии присутствие центральных зарядов будет изменять эту формулу; вместо (25.2.36) имеем

$$\left\{Q_r, \overline{Q}_s\right\} = -2iP_\mu\gamma^\mu\delta_{rs} + \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)Z^*_{sr} + \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)Z_{rs}. \tag{25.2.38}$$

Представленный здесь анализ для случая четырех пространственно-временных измерений будет повторен, в несколько менее явной форме, для общего случая произвольного числа пространственно-временных измерений в главе 32. Как будет показано, генераторы суперсимметрии всегда принадлежат фундаментальному спинорному представлению группы Лоренца соответствующей (более высокой) размерности даже в теориях с протяженными объектами, допускающих конструкции генераторов бозонной симметрии, которые отличаются от разрешенных теоремой Коулмена–Мандулы.

* * *

В теориях безмассовых частиц, которые инвариантны относительно алгебры конформной симметрии (24.B.34)–(24.B.35), имеются два дополнительных генератора бозонной симметрии D и K_μ, которые могут появляться в правой части антикоммутационных соотношений суперсимметрии. По отношению к преобразованиям Лоренца эти новые генераторы имеют свойства, соответственно, скаляра и вектора, подобные Z_{rs} и P_μ. Таким образом, повторим еще раз, фермионные генераторы должны принадлежать фундаментальному спинорному представлению $(1/2, 0)$ алгебры Лоренца и ему эрмитово-сопряженному представлению $(0, 1/2)$. Удобно также классифицировать все генераторы по их коммутаторам с генератором дилатации (растяжения) D; говорят, что оператор X имеет размерность a, если

$$[X, D] = iaX. \tag{25.2.39}$$

Внимательное рассмотрение соотношения (24.B.34) показывает, что индексы дилатации генераторов бозонной симметрии $J^{\mu\nu}$, P^μ, K^μ и D равны соответственно 0, $+1$, -1 и 0. Кроме того, генераторы любой группы Ли внутренней симметрии имеют нулевую размерность. Антикоммутатор фермионного генератора, имеющего размерность a, с ему сопряженным есть положительно определенный бозонный оператор с индексом $2a$. Но поскольку положительно определенными генераторами бозонной симметрии могут быть только линейные комбинации компонент P_μ и K_μ, размерности генераторов фермионной симметрии могут принимать только значения $+1/2$ и $-1/2$.

Как и выше, $(0,1/2)$ генераторы фермионной симметрии размерностью 1/2 и им сопряженные можно объединить в майорановские спиноры $Q_{r\alpha}$, причем

$$\{Q_{r\alpha}, \overline{Q}_{s\beta}\} = -2iP_\mu(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\delta_{rs}, \tag{25.2.40}$$

$$\left[P_\mu, Q_{r\alpha}\right] = 0, \tag{25.2.41}$$

$$\left[D, Q_{r\alpha}\right] = -\frac{1}{2}iQ_{r\alpha}. \tag{25.2.42}$$

(Заметим, что центральные заряды здесь отсутствуют, поскольку их размерности были бы равны 0, а не +1.) Коммутаторы K_μ с $Q_{r\alpha}$ есть линейные комбинации майорановских генераторов фермионной симметрии $Q^\sharp_{r\alpha}$, поэтому, с учетом лоренц-инвариантности, можно записать

$$\left[K^\mu, Q_{r\alpha}\right] = i(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}Q^\sharp_{r\beta}. \tag{25.2.43}$$

(Произвольный множитель в правой части равенства включен в нормировку $Q^\sharp_{r\alpha}$, а фаза в правой части выбрана так, чтобы $Q^\sharp_{r\alpha}$ удовлетворяли стандартным условиям действительности (26.A.2) для майорановских спиноров.) Размерность генераторов $Q^\sharp_{r\alpha}$ равна $+1/2-1=-1/2$, так что

$$\left[D, Q^\sharp_{r\alpha}\right] = +\frac{1}{2}iQ^\sharp_{r\alpha}. \tag{25.2.44}$$

Вычисление коммутаторов обеих частей равенства (25.2.43) с P^ν с учетом коммутатора K^μ с P^ν (24.B.34) дает

$$\left[P^\nu, Q^\sharp_{r\alpha}\right] = -i(\gamma^\nu)_{\alpha\beta}Q_{r\beta}. \tag{25.2.45}$$

Как видно, Q и $Q^\sharp$ образуют пары. Беря коммутатор антикоммутационного соотношения (25.2.40) с K_μ, находим антикоммутаторы Q и $Q^\sharp$:

$$\{Q^\sharp_{r\alpha}, \overline{Q}_{s\beta}] = 2iD\delta_{rs}\delta_{\alpha\beta} + 2J_{\mu\nu}\delta_{rs}\mathcal{J}^{\mu\nu}_{\alpha\beta} + O_{rs}\delta_{\alpha\beta} + O'_{rs}(\gamma_5)_{\alpha\beta}, \tag{25.2.46}$$

где $\mathcal{J}^{\mu\nu} \equiv -i[\gamma_\mu, \gamma^\nu]/4$, а O_{rs} и O'_{rs} — лоренц-инвариантные операторы с нулевой размерностью, причем

$$O_{rs} = -O_{sr}, \quad O'_{rs} = +Q'_{sr}. \tag{25.2.47}$$

Вычисляя коммутаторы обеих частей (25.2.43) с K_ν и учитывая, что $[K_\nu, K_\mu] = 0$, убеждаемся, что выражение $(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}[K^\nu, Q_{r\beta}]$ симметрично по μ и ν, откуда с помощью несложных выкладок можно получить

$$\left[K^\nu, Q_{r\beta}\right] = 0. \tag{25.2.48}$$

Кроме того, вычисление коммутатора обеих частей (25.2.46) с K_ν дает

$$\left\{Q^\sharp_{r\alpha}, \overline{Q^\sharp}_{s\beta}\right\} = +2iK_\mu(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\delta_{rs}. \tag{25.2.49}$$

Наконец, вычисление коммутаторов обеих частей равенства (25.2.46) с $Q_{t\gamma}$ показывает, что O_{rs} и O'_{rs} действуют как генераторы группы R-симметрии $U(N)$, причем левые и правые части $Q_{r\alpha}$ преобразуются соответственно по представлениям $\mathbf{N}$ и $\bar{\mathbf{N}}$, тогда как P_μ, K_μ и D являются $U(N)$-инвариантными. Коммутационные $U(N)$ соотношения этих генераторов друг с другом и с другими генераторами, вместе с соотношениями (24.B.34), (24.B.35), (25.2.40)–(25.2.49) и с коммутаторами $J_{\mu\nu}$ и D с различными генераторами, образуют *суперконформную алгебру*. Одно из наиболее важных отличий этой алгебры от алгебры простой или N-расширенной суперсимметрии состоит в том, что симметрия $U(N)$ есть не просто внешний автоморфизм алгебры, который может быть, а может и не быть симметрией действия, а есть часть суперконформной алгебры, которая поэтому должна быть симметрией любого суперсимметричного и конформно-инвариантного действия.

25.3. Свойства генераторов суперсимметрии при пространственной инверсии

В теориях с сохранением четности результат $\mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}_{ar}\mathsf{P}$ действия оператора четности P на генераторы фермионной симметрии Q_{ar} также должен быть генератором фермионной симметрии. Поскольку J_i и K_i являются, соответственно, четными и нечетными относительно пространственной инверсии, то, как видно из формулы (25.2.1), действие оператора четности на A_i дает

$$\mathsf{P}^{-1}A_i\mathsf{P} = B_i. \tag{25.3.1}$$

Согласно формуле (25.2.3), определение Q_{ar} как $(0,1/2)$ оператора означает, что

$$\left[B_i, \mathsf{Q}_{ar}\right] = -\frac{1}{2}\sum_b (\sigma_i)_{ab}\mathsf{Q}_{br}, \quad \left[A_i, \mathsf{Q}_{ar}\right] = 0. \tag{25.3.2}$$

Действие оператора четности дает

$$\left[A_i, \mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}_{ar}\mathsf{P}\right] = -\frac{1}{2}\sum_b (\sigma_i)_{ab}\mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}_{br}\mathsf{P}, \quad \left[B_i, \mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}_{ar}\mathsf{P}\right] = 0, \tag{25.3.3}$$

так что $\mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}_{ar}\mathsf{P}$ есть $(1/2,0)$ генератор симметрии, который должен быть линейной комбинацией генераторов Q^*_{ar}. Согласно выражению (25.2.6), лоренц-инвариантность требует, чтобы это соотношение имело вид

$$\mathsf{P}^{-1}Q_{ar}\mathsf{P} = \sum_{bs}\mathscr{P}_{rs}e_{ab}\mathsf{Q}^*_{bs}, \tag{25.3.4}$$

где $\mathcal{P}$ — числовая матрица, а матрица e определена согласно (25.2.9).

Некоторые свойства матрицы $\mathcal{P}$ можно установить из требования, чтобы (25.3.4) было согласовано с фундаментальным антикоммутационным соотношением (25.2.7). Соотношение (25.3.4) и ему сопряженное дают

$$\mathsf{P}^{-1}\left\{Q_{ar}, Q^*_{bs}\right\}\mathsf{P} = \sum_{cdtu} \mathcal{P}_{rt} e_{ac} \mathcal{P}^*_{su} e_{bd} \left\{Q^*_{ct}, Q_{du}\right\}.$$

Подставляя сюда (25.2.7), получим

$$\delta_{rs}\sigma^{\mu}_{ab} P^{-1} P_{\mu} P = \sum_{cdtu} \mathcal{P}_{rt} e_{ac} \mathcal{P}^*_{su} e_{bd} \delta_{ti} \sigma^{\mu}_{dc} P_{\mu}.$$

Однако $e\sigma^T_i e^{-1} = -\sigma_i$, а $e\sigma^T_0 e^{-1} = +\sigma_0$, тогда как $\mathsf{P}^{-1}P_i\mathsf{P} = -P_i$ и $\mathsf{P}^{-1}P_0\mathsf{P} = P_0$, поэтому приведенное выше соотношение сводится к утверждению, что матрица $\mathcal{P}$ унитарна,

$$\mathcal{P}\mathcal{P}^{\dagger} = 1. \tag{25.3.5}$$

Матрица $\mathcal{P}$ до некоторой степени произвольна, поскольку для любого набора фермионных генераторов Q_{ar}, удовлетворяющих (25.3.2) и (25.2.7), можно с помощью унитарного преобразования

$$Q'_{ar} = \sum_s \mathcal{U}_{rs} Q_{as}, \quad \mathcal{U}^{\dagger} = \mathcal{U}^{-1}, \tag{25.3.6}$$

построить другой набор Q'_{ar}, также удовлетворяющий соотношениям (25.3.2) и (25.2.7), так что правило преобразования четности (25.3.4) принимает вид

$$\mathsf{P}^{-1} Q'_{ar} \mathsf{P} = \sum_{bs} \mathcal{P}'_{rs} e_{ab} Q'^*_{bs}, \tag{25.3.7}$$

где

$$\mathcal{P}' = \mathcal{U}\mathcal{P}\mathcal{U}^{-1*} = \mathcal{U}\mathcal{P}\mathcal{U}^{\mathrm{T}}. \tag{25.3.8}$$

Для простой суперсимметрии $\mathcal{P}$ есть матрица 1×1, т. е. просто фазовый множитель, а соотношение (25.3.4) принимает вид

$$\mathsf{P}^{-1} Q_a \mathsf{P} = \mathcal{P} \sum_b e_{ab} Q^*_b. \tag{25.3.9}$$

Комбинируя его с сопряженным, можно получить

$$\mathsf{P}^{-2} Q_a \mathsf{P}^2 = -Q_a, \tag{25.3.10}$$

независимо от выбора величины фазового множителя $\mathcal{P}$. Из этого вытекает поразительное следствие, что если бозон в супермультиплете частиц имеет действительную внутреннюю четность, то фермионы, получающиеся действием Q_a на это бозонное состояние, имеют *мнимые* внутренние четности.

Поскольку для простой суперсимметрии $\mathscr{U}$ и $\mathscr{P}$ есть просто фазовые множители, из (25.3.8) очевидно, что подходящим выбором $\mathscr{U}$ можно сделать фазовый множитель $\mathscr{P}'$ каким угодно. Удобно выбрать $\mathscr{P}' = +\mathrm{i}$, так что формула (25.3.7) принимает простой вид (штрихи далее опускаем):

$$\mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}_a\mathsf{P} = i\sum_b e_{ab}\mathsf{Q}_b^*. \tag{25.3.11}$$

Как и для операторов спинорного поля, представление пространственной инверсии упрощается, если скомбинировать $(0,1/2)$ операторы Q_a и $(1/2,0)$ операторы $\sum_b e_{ab}\mathsf{Q}_b^*$ в четырехкомпонентные дираковские спинорные генераторы Q_α, определенные согласно (25.2.34). В этих обозначениях соотношение (25.3.11) и ему сопряженное объединяются в одно соотношение

$$\mathsf{P}^{-1}Q\mathsf{P} = i\beta Q. \tag{25.3.12}$$

(Мы используем для матриц Дирака определения, приведенные в разделе 5.4 и в предисловии к этому тому, согласно которым

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где под 1 и 0 понимаются субматрицы 2×2.)

Для расширенной суперсимметрии не всегда возможно выбрать $\mathscr{U}$ так, чтобы $\mathscr{P}'$ была диагональной. Однако, теорема матричной алгебры (доказанная в приложении Б к главе 2) показывает, что можно выбрать $\mathscr{U}$ так, чтобы $\mathscr{P}'$ была блочно-диагональной. В общем случае диагональными блоками матрицы будут некоторые субматрицы 1×1, которые можно выбрать равными i (или любому другому фазовому множителю), и другие субматрицы 2×2, которые можно выбрать в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & \exp(i\phi) \\ \exp(-i\phi) & 0 \end{pmatrix},$$

с различными фазами ϕ. Соответственно, при таком выборе $\mathscr{U}$ двухкомпонентные Q (штрихи снова опущены) будут двух типов. Операторы Q первого типа по-прежнему удовлетворяют соотношению (25.3.11):

$$\mathsf{P}^{-1}\mathsf{Q}_{ar}\mathsf{P} = i\sum_b e_{ab}\mathsf{Q}_{br}^*. \tag{25.3.13}$$

Двухкомпонентные операторы Q второго типа образуют пары, которые будем обозначать как Q_{as1} и Q_{as2}, причем s-ая пара преобразуется относительно преобразования четности по правилу:

$$\mathsf{P}^{-1}Q_{as1}\mathsf{P} = e^{i\phi_s}\sum_b e_{ab}Q^*_{bs2}, \quad \mathsf{P}^{-1}Q_{as2}\mathsf{P} = e^{-i\phi_s}\sum_b e_{ab}Q^*_{bs1}. \tag{25.3.14}$$

В частности, имеем

$$\mathsf{P}^{-2}Q_{as1}\mathsf{P}^2 = -e^{2i\phi_s}Q_{as1}, \quad \mathsf{P}^{-2}Q_{as2}\mathsf{P}^2 = -e^{-2i\phi_s}Q_{as2}. \tag{25.3.15}$$

Эти соотношения показывают, что генераторы суперсимметрии первого типа невозможно образовать из линейных комбинаций генераторов расширенной суперсимметрии второго типа, если только не выполнено условие $\phi_s = 0 \pmod{\pi}$.

В терминах четырехкомпонентных спиноров (25.2.34) действие оператора четности на генераторы расширенной суперсимметрии первого типа есть

$$\mathsf{P}^{-1}Q_r\mathsf{P} = i\beta Q_r, \tag{25.3.16}$$

тогда как для генераторов второго типа

$$\mathsf{P}^{-1}Q_{s1}\mathsf{P} = \beta\gamma_5\exp(i\gamma_5\phi_s)Q_{s2}, \quad \mathsf{P}^{-1}Q_{s2}\mathsf{P} = \beta\gamma_5\exp(-i\gamma_5\phi_s)Q_{s1}. \tag{25.3.17}$$

25.4. Супермультиплеты безмассовых частиц

Суперсимметрия требует, чтобы в неприводимых представлениях алгебры суперсимметрии всем известным частицам сопутствовали «счастицы»: бозонные «скварки» и «слептоны» сопутствуют кваркам или лептонам, а фермионные «калибрино» сопровождают калибровочные бозоны. Ни одна из этих частиц не наблюдалась, так что суперсимметрия определенно нарушена, причем массы счастиц почти наверняка много больше, чем массы кварков, лептонов и калибровочных бозонов, которые определяются спонтанным нарушением электрослабой калибровочной группы $SU(2)\times U(1)$, и, следовательно, того же порядка величины, что и расщепления внутри супермультиплетов. Поэтому весьма вероятно, что при энергиях достаточно больших, чтобы можно было пренебречь нарушением симметрии и этим расщеплением масс, известные кварки, лептоны, калибровочные бозоны и их суперпартнеры можно рассматривать как безмассовые. Поэтому мы будем специально интересоваться супермультиплетами безмассовых частиц.

Рассмотрим состояние, содержащее одну безмассовую частицу, принадлежащую некоторому супермультиплету. Другие состояния того же супермультиплета получим действием операторов Q_{ar} и(или) Q^*_{ar} на это состояние. Так как Q_{ar} и Q^*_{ar} коммутируют с P_μ, все эти состояния имеют одно и то же значение 4-импульса. Мы будем работать в лоренцевой системе отсчета, в которой 4-импульс этих состояний имеет компоненты $p^1 = p^2 = 0$ и $p^3 = p^0 = E$. При таком выборе 4-импульса

$$\sigma_\mu p^\mu = E(\sigma_0 + \sigma_3) = 2E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{25.4.1}$$

и если не учитывать множитель $2E$, это есть матрица проектирования на подпространство спиральности $+1/2$. Тогда антикоммутационное соотношение (25.2.7) показывает, что действие оператора $\{Q_{(-1/2)r}, Q^*_{(-1/2)r}\}$ на любое состояние с этим импульсом в супермультиплете дает нуль, а, следовательно, так же действуют $Q_{(-1/2)r}$ и $Q^*_{(-1/2)r}$. Поэтому мы должны конструировать состояния супермультиплета, действуя только операторами $Q_{(1/2)r}$ и $Q^*_{(1/2)r}$. Кроме того, мы нумеруем операторы Q по их значениям J_3, в том смысле, что

$$[J_3, Q_{ar}] = -aQ_{ar}, \tag{25.4.2}$$

так что $Q_{(1/2)r}$ и $Q^*_{(1/2)r}$ соответственно понижают и повышают спиральность на $1/2$.

Сначала рассмотрим случай простой суперсимметрии. Будем рассматривать супермультиплет с максимальной спиральностью $\lambda_{\rm max}$, и пусть $|\lambda_{\rm max}\rangle$ есть одночастичное состояние с такой спиральностью и с 4-импульсом p^μ. Тогда

$$Q^*_{\frac{1}{2}}|\lambda_{\rm max}\rangle = 0, \tag{25.4.3}$$

в то время, как действие $Q_{1/2}$ на это состояние дает состояние $|\lambda_{\rm max} - 1/2\rangle$ со спиральностью $\lambda_{\rm max} - 1/2$. Определим это состояние следующим образом:

$$|\lambda_{\rm max} - 1/2\rangle \equiv (4E)^{-1/2} Q_{\frac{1}{2}} |\lambda_{\rm max}\rangle. \tag{25.4.4}$$

Фундаментальное антикоммутационное соотношение (25.2.7), вместе с соотношениями (25.4.1) и (25.4.3), показывает, что это состояние нормировано так же, как $|\lambda_{\rm max}\rangle$:

$$\langle\lambda_{\rm max} - 1/2|\lambda_{\rm max} - 1/2\rangle = \langle\lambda_{\rm max}|\lambda_{\rm max}\rangle, \tag{25.4.5}$$

и, в частности, это состояние не может обратиться в нуль. Как следует из (25.2.32), $Q^2_{1/2} = 0$, поэтому действие оператора $Q_{1/2}$ на $|\lambda_{\rm max} - 1/2\rangle$ дает нуль:

$$Q_{\frac{1}{2}}|\lambda_{\rm max} - 1/2\rangle = (4E)^{-1/2} Q^2_{\frac{1}{2}} |\lambda_{\rm max}\rangle = 0. \tag{25.4.6}$$

С другой стороны, действие $Q^*_{1/2}$ на это состояние дает исходное состояние, с которого мы начали:

$$Q^*_{\frac{1}{2}}|\lambda_{\max}-1/2\rangle = (4E)^{-1/2}Q^*_{\frac{1}{2}}Q_{\frac{1}{2}}|\lambda_{\max}\rangle = (4E)^{-1/2}\{Q^*_{\frac{1}{2}},Q_{\frac{1}{2}}\}|\lambda_{\max}\rangle,$$

так что из формулы (25.4.1) и антикоммутационного соотношения (25.2.31) следует

$$Q^*_{\frac{1}{2}}|\lambda_{\max}-1/2\rangle = (4E)^{1/2}|\lambda_{\max}\rangle. \tag{25.4.7}$$

Таким образом, супермультиплет состоит всего из двух состояний спиральностями $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\max}-1/2$. Операторы $Q_{1/2}$ и $Q^*_{1/2}$ в базисе этих состояний представляются в виде матриц

$$q_{\frac{1}{2}} = \sqrt{4E}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad q^\dagger_{\frac{1}{2}} = \sqrt{4E}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{25.4.8}$$

тогда как операторы $Q_{-1/2}$ и $Q^*_{-1/2}$ равны нулю.

Следует особо подчеркнуть, что это *единственный* тип безмассового супермультиплета в теориях с простой суперсимметрией. Не существует безмассовых частиц, которым бы не сопутствовали суперпартнеры, и ни одна из таких частиц не имеет более одного суперпартнера. Разумеется, CPT-инвариантность требует, чтобы для каждого супермультиплета безмассовых частиц спиральностями $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\max}-1/2$ существовал антимультиплет спиральностями $-\lambda_{\max}+1/2$ и $-\lambda_{\max}$. В частности, безмассовые частица и античастица спиральностями $+1/2$ и $-1/2$ должны сопровождаться безмассовыми частицами, имеющими либо спиральности $+1$ и -1, либо с обеими спиральностями, равными нулю.

Каким образом известные кварки, лептоны и калибровочные бозоны должны вписываться в эту картину? Будем предполагать, что генератор суперсимметрии коммутирует с генераторами калибровочной группы $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$*. Кварки и лептоны принадлежат представлению калибровочной группы, отличному от представления калибровочных бозонов, поэтому они не могут находиться в одном супермультиплете. Тогда мы должны прийти к выводу, что в пределе высоких энергий, когда нарушением $SU(2)\times U(1)$ симметрии можно пренебречь, безмассовые кварки и лептоны каждого «цвета» и «аромата» входят в супермультиплеты вместе с *парами* безмассовых скварков и слептонов нулевой спиральности и того же самого цвета и аромата, тогда как безмассовые калибровочные бозоны сопровождаются безмассовыми калибрино спиральностью $\pm 1/2$, входящими в сопряженное представление $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$.

---

*В простой суперсимметрии генератор Q_α в любом случае должен коммутировать с $SU(3)\times SU(2)$ генераторами, поскольку полупростые алгебры, подобные $SU(3)\times SU(2)$, не имеют нетривиальных одномерных представлений.

Поскольку существует гравитация, в дополнение к частицам стандартной модели должна также существовать безмассовая частица спиральностью ± 2, *гравитон*. Безмассовые частицы спиральностью λ, такой, что $|\lambda| > 1/2$, должны при малых импульсах взаимодействовать с сохраняющимися величинами*. Мягкие безмассовые частицы спиральностью ± 1 могут взаимодействовать с различными генераторами внутренней симметрии, мягкие безмассовые частицы спиральностью $\pm 3/2$ могут взаимодействовать с генераторами суперсимметрии Q_a, а мягкие безмассовые частицы спиральностью ± 2 — с единственной сохраняющейся величиной, вектором 4-импульса P_μ, но не существует сохраняющихся величин, с которыми могли бы взаимодействовать мягкие безмассовые частицы с $|\lambda| > 2$. Мы приходим к заключению, что гравитон не может находиться в супермультиплете с частицами спиральностью $\pm 5/2$, поэтому он должен входить в один супермультиплет с безмассовой частицей спиральностью $\pm 3/2$, известной как *гравитино*, взаимодействующей с самими генераторами суперсимметрии. Теория поля этого супермультиплета, известная как *супергравитация*, будет обсуждаться в главе 31.

Рассмотрим теперь случай расширенной суперсимметрии с N генераторами суперсимметрии. Прежде всего заметим, что поскольку все $Q_{(-1/2)r}$ дают нуль при действии на состояния супермультиплета (включая состояния, полученные действием $Q_{(1/2)s}$ на любое другое состояние мультиплета), центральные заряды Z_{rs} также должны аннигилировать любое состояние мультиплета. В картине без центральных зарядов генераторы суперсимметрии $Q_{(1/2)s}$, действующие на супермультиплет безмассовых частиц, антикоммутируют, так что действие n таких генераторов на одночастичное состояние максимальной спиральностью $\lambda_{\max}$ и 4-импульсом p^μ дает $N!/n!(N-n)!$ одночастичных состояний с тем же 4-импульсом и спиральностью $\lambda - n/2$, образующих антисимметричное тензорное представление ранга n $SU(N)$ R-симметрии** (25.2.30). Максимальное значение величины n, которое дает ненулевое состояние, есть $n = N$, так что минимальная спиральность в супермультиплете есть

$$\lambda_{\min} = \lambda_{\max} - N/2. \tag{25.4.9}$$

Если мы хотим исключить безмассовые частицы с $|\lambda| > 2$, то должно выполняться условие $\lambda_{\max} - \lambda_{\min} \leqslant 4$, поэтому разрешены расширенные суперсимметрии только с $N \leqslant 8$.

Для $N = 8$, с исключенными спиральностями $|\lambda| > 2$, имеется только один возможный супермультиплет, содержащий: 1 гравитон каждой из

---

*Для случая целой спиральности это обсуждалось в разделе 13.1. Доказательство для полуцелой спиральности было дано Грисару и Пендлтоном [3].

**Часть $U(1)$ в R-симметрии $U(N)$ часто нарушается квантово-механическими аномалиями.

спиральностей ± 2; 8 гравитино каждой из спиральностей $\pm 3/2$; 28 калибровочных бозонов каждой из спиральностей ± 1; 56 фермионов каждой из спиральностей $\pm 1/2$ и 70 бозонов нулевой спиральности.

Сравним это со случаем $N = 7$, снова исключая спиральности $|\lambda| > 2$. Здесь имеются два супермультиплета. Первый содержит: 1 гравитон спиральностью $+2$; 7 гравитино спиральностью $+3/2$; 21 калибровочный бозон спиральностью $+1$; 35 фермионов спиральностью $+1/2$; 35 бозонов нулевой спиральности; 21 фермион спиральностью $-1/2$; 7 калибровочных бозонов спиральностью -1 и 1 гравитино спиральностью $-3/2$. Другой супермультиплет является CPT-сопряженным по отношению к первому, со спиральностями противоположного знака. Складывая числа частиц в этих двух мультиплетах, имеем 1 гравитон каждой из спиральностей ± 2; $7 + 1 = 8$ гравитино каждой из спиральностей $\pm 3/2$; $21 + 7 = 28$ калибровочных бозонов каждой из спиральностей ± 1; $35 + 21 = 56$ фермионов каждой из спиральностей $\pm 1/2$ и $35 + 35 = 70$ бозонов нулевой спиральности. Таким образом, теории расширенной супергравитации с $N = 8$ и $N = 7$ содержат один и тот же состав частиц и фактически идентичны.

С другой стороны, теории расширенной супергравитации с $N \leqslant 6$ содержат ровно N гравитино каждой из спиральностей $\pm 3/2$, поэтому они все различны.

Для $N \leqslant 4$ возможны также теории *глобальной* суперсимметрии с супермультиплетами, не включающими гравитоны или гравитино. Для глобальной $N = 4$ суперсимметрии имеется только один супермультиплет, содержащий: 1 калибровочный бозон каждой из спиральностей нулевой спиральности. Это эквивалентно теории глобальной суперсимметрии с $N = 3$, в которой имеется два супермультиплета: один супермультиплет, в котором 1 калибровочный бозон спиральности $+1$, 3 фермиона спиральности $+1/2$, 3 бозона нулевой спиральности и 1 фермион спиральности $-1/2$; в другом, CPT-сопряженном супермультиплете, спиральности противоположны. Сложение числа частиц каждой спиральности в этих двух $N = 3$ супермультиплетах дает такой же состав частиц, как и в $N = 4$ глобальной суперсимметрии. Калибровочная теория поля с $N = 4$ суперсимметрией обладает замечательными свойствами, которые будут обсуждаться в разделе 27.9.

Для $N = 2$ расширенной глобальной суперсимметрии имеются супермультиплеты двух разных типов, помимо CPT-сопряженных. Имеются *калибровочные* супермультиплеты, каждый из которых содержит один калибровочный бозон спиральностью $+1$, два фермиона спиральносттю $+1/2$, образующих дублет $SU(2)$ R-симметрии (25.2.30), и один бозон нулевой спиральности; их CPT-сопряженные супермультиплеты имеют противоположные спиральности. Вместе каждый калибровочный супермультиплет и его антимультиплет содержат один калибровочный бозон каждой из спиральностей ± 1, $SU(2)$ дублет фермионов каждой из спиральностей $\pm 1/2$ и два $SU(2)$-синглетных бозона нулевой спиральности. Затем имеются *гипермультиплеты*, содержащие один фермион каждой из спиральностей $\pm 1/2$ и $SU(2)$ дублет бозонов спиральностью нуль, а также им CPT-сопряженные гипермультиплеты. (В квантовой теории поля гипермультиплет не может совпадать со своим антимультиплетом, поскольку тогда частицы нулевой спиральности должны были бы описываться всего двумя *действительными* скалярными полями, которые не могут образовать $SU(2)$ дублет.) Разумеется, в реальном мире нужно было бы также иметь гравитонный супермультиплет, содержащий гравитон спиральностью $+2$, $SU(2)$ дублет гравитино спиральностью $+3/2$ и один калибровочный бозон спиральностью $+1$, а также CPT-сопряженный супермультиплет с противоположными спиральностями. Калибровочные теории с $N = 2$ суперсимметрией будут сконструированы в разделе 27.9 и непертурбативно исследованы в разделе 29.5.

Состав частиц в супермультиплетах выявляет трудность включения расширенной суперсимметрии в реалистические теории частиц при достижимых энергиях. Во всех случаях, за исключением одного, фермионы спиральностью $+1/2$ входят в супермультиплеты вместе калибровочными бозонами спиральностью $+1$. Калибровочные бозоны принадлежат сопряженному представлению калибровочной группы, так что, если генераторы суперсимметрии инвариантны относительно калибровочной группы, то фермионы спиральности $+1/2$ также должны принадлежать сопряженному представлению, которое действительно. Это противоречит тому факту, что известные кварки и лептоны принадлежат представлению $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, которое является *киральным*, т. е. в котором фермионы спиральностью $+1/2$ принадлежат комплексному представлению, которое поэтому обязательно отличается от представления, в которое входят им CPT-сопряженные фермионы спиральностью $-1/2$. Единственное исключение, где фермионы спиральностью $+1/2$ не находятся в одном супермультиплете с калибровочными бозонами, это обсуждавшийся выше гипермультиплет $N = 2$. Но в этом случае частицы обеих спиральностей $+1/2$ и $-1/2$ находятся в одном и том же супермультиплете, поэтому они должны преобразовываться одинаково при любых калибровочных преобразованиях, оставляющих генераторы суперсимметрии инвариантными. Они могут принадлежать комплексному представлению этой калибровочной группы, но тогда CPT-сопряженный к этому гипермультиплет принадлежит комплексно-сопряженному представлению, а фермионы каждой спиральности тогда принадлежат сумме двух представлений, которая вещественна, снова в противоречии с киральной природой известных кварков и лептонов.

В противоположность этому в случае простой суперсимметрии имеются супермультиплеты, содержащие только спиральности $+1/2$ и 0, которые могут находиться в комплексном представлении калибровочной группы, отличном от представления, реализуемого CPT-сопряженным супермультиплетом. Здесь нет конфликта с киральностью. По этой причине основная часть обсуждений суперсимметрии как симметрии, остающейся ненарушенной при достижимых энергиях, фокусируется на простой, а не на расширенной суперсимметрии.

25.5. Супермультиплеты массивных частиц

Известные кварки, лептоны, калибровочные бозоны и их суперпартнеры можно, по-видимому, рассматривать как безмассовые при энергиях, где нарушение суперсимметрии пренебрежимо мало. Но это не обязательно справедливо для других частиц, в том числе для дополнительных калибровочных бозонов большой массы, требуемых теориями, которые объединяют сильные и электрослабые взаимодействия. Кроме того, начиная с модели Весса–Зумино, теории с массивными частицами всегда были полезны как тесты для изучения суперсимметричных теорий. Поэтому заслуживает внимания краткое рассмотрение применения ненарушенной суперсимметрии для массивных частиц.

Как и в предыдущем разделе, будем получать различные одночастичные состояния в супермультиплете, действуя на одно из них операторами Q_{ar} и Q^*_{ar}, так что все эти состояния имеют один и тот же 4-импульс. В отличие от случае нулевой массы, для массы $M > 0$ этот 4-импульс можно считать 4-импульсом покоящейся частицы с $p^i = 0$ для $i = 1,2,3$ и $p^0 = M$. В этой системе отсчета имеем

$$\sigma_\mu p^\mu = M\sigma_0 = M\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{25.5.1}$$

Тогда действие антикоммутационного соотношения (25.2.7) на любое состояние $|\rangle$ в супермультиплете с таким 4-импульсом дает

$$\{Q_{ar}, Q^*_{bs}\}|\rangle = 2M\delta_{ab}\delta_{rs}|\rangle. \tag{25.5.2}$$

В противоположность случаю нулевой массы, здесь ни одна из компонент Q_{ar} или Q^*_{ar} не может обращаться в нуль на всем мультиплете, так что имеются два набора повышающих и понижающих операторов: два оператора $Q_{(1/2)r}$ и $Q^*_{(-1/2)r}$ понижают третью компоненту спина на 1/2, а два других $Q_{(-1/2)r}$ и $Q^*_{(1/2)r}$ повышают ее на 1/2. Однако, как будет видно, для расширенной суперсимметрии могут обращаться в нуль определенные линейные комбинации Q и Q^*.

Рассмотрим сначала случай простой суперсимметрии. Покажем, используя алгебру суперсимметрии (25.2.31), (25.2.32), что произвольный массивный супермультиплет содержит частицу спина $j+1/2$, *пару* частиц спина j и частицу спина $j-1/2$. Когда четность сохраняется, частицы спина $j\pm 1/2$ имеют одинаковую внутреннюю четность, задаваемую некоторой фазой η, тогда как две частицы спина j имеют четности $+i\eta$ и $-i\eta$. Здесь j — любое целое или полуцелое число, большее нуля. Имеется также усеченный (при $j=0$) супермультиплет, состоящий из двух частиц спина 0 и одной частицы спина 1/2. Когда четность сохраняется, частицы нулевого спина имеют четности $i\eta$ и $-i\eta$, где η — четность частицы спина 1/2.

Для доказательства сначала покажем, что любой супермультиплет содержит, по крайней мере, один спиновый мультиплет состояний $|j,\sigma\rangle$, со значениями третьей компоненты спина σ от $-j$ до $+j$ (с шагом 1), который обладает следующим специальным свойством: для всех σ и для $a=\pm 1/2$

$$Q_a|j,\sigma\rangle = 0. \tag{25.5.3}$$

Начиная с любого ненулевого состояния $|\psi\rangle$ в супермультиплете, можно определить ненулевые состояния

$$|\psi'\rangle \equiv \begin{cases} (2M)^{-1/2}Q_{1/2}|\psi\rangle & Q_{1/2}|\psi\rangle \neq 0 \\ |\psi\rangle & Q_{1/2}|\psi\rangle = 0 \end{cases},$$

и

$$|\psi''\rangle \equiv \begin{cases} (2M)^{-1/2}Q_{1/2}|\psi'\rangle & Q_{1/2}|\psi'\rangle \neq 0 \\ |\psi'\rangle & Q_{1/2}|\psi'\rangle = 0 \end{cases}.$$

Поскольку операторы Q_a антикоммутируют, $Q_{1/2}|\psi'\rangle = 0$, и поэтому $Q_{1/2}|\psi''\rangle = 0$ для $a=\pm 1/2$. Если любое состояние $|\psi''\rangle$ удовлетворяет условию $Q_{1/2}|\psi''\rangle = 0$, то такому же условию удовлетворяет состояние $U(R)|\psi''\rangle$, где $U(R)$ — унитарный оператор, представляющий произвольное пространственное вращение. Следовательно, состояния, которые удовлетворяют этому условию, можно разложить на полные спиновые мультиплеты $|j,\sigma\rangle$, удовлетворяющие условию (25.5.3).

Теперь сконцентрируем внимание на каком-либо одном из спиновых мультиплетов, удовлетворяющих условию (25.5.3), нормированному так, что

$$\langle j,\sigma'|j,\sigma\rangle = \delta_{\sigma'\sigma}. \tag{25.5.4}$$

Для $j>0$, действуя операторами* Q_a^* спина 1/2 на эти состояния, можно

*Так как Q_a преобразуется при поворотах подобно полю, которое уничтожает частицу спина 1/2 и третьей компонентой спина a, то Q_a^* преобразуется подобно полю, рождающему такую частицу, и, следовательно, преобразуется подобно самой частице. Формально это можно выразить соотношениями $[J_i,Q_a] = -\sum_b \frac{1}{2}(\sigma_i)_{ab}Q_b$, так что $[J_i,Q_a^*] = \sum_b \frac{1}{2}(\sigma_i)_{ba}Q_b^*$, что можно сравнить со свойством преобразования частицы спина 1/2, $J_i|a\rangle = \sum_b \frac{1}{2}(\sigma_i)_{ba}|b\rangle$.

сконструировать состояния спина $j \pm 1/2$:

$$|j \pm 1/2, \sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2M}} \sum_a C_{\frac{1}{2}j}(j \pm 1/2, \sigma; a, \sigma - a)\, Q_a^* |j, \sigma - a\rangle, \tag{25.5.5}$$

где $C_{jj'}(j'', \sigma''; \sigma, \sigma')$ — обычный коэффициент Клебша–Гордана для сложения спинов j и j', имеющих третьи компоненты σ и σ', в спин j'' с третьей компонентой σ''. Используя формулы (25.5.2)–(25.5.5) и свойства ортогональности коэффициентов Клебша–Гордана, можно показать, что эти состояния должным образом нормированы:

$$\langle j \pm 1/2, \sigma | j \pm 1/2, \sigma' \rangle = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \langle j \pm 1/2, \sigma | j \mp 1/2, \sigma' \rangle = 0, \tag{25.5.6}$$

так что ни одно из состояний $|j \pm 1/2, \sigma\rangle$ не обращается в нуль. Единственное исключение составляет случай $j = 0$, когда, естественно, не существует состояния $|j - 1/2, \sigma\rangle$. Можно также сконструировать другие состояния, действуя *двумя* операторами Q^* на $|j, \sigma\rangle$. Поскольку каждый оператор Q_a^* антикоммутирует с самим собой, ненулевые состояния получатся только при действии оператора $Q_{1/2}^* Q_{-1/2}^* = -Q_{-1/2}^* Q_{1/2}^*$. Его можно записать в виде $\frac{1}{2} e_{ab} Q_a^* Q_b^*$, откуда видно, что он является инвариантным относительно вращений, так что это дает второй спиновый мультиплет со спином j:

$$|j, \sigma\rangle^b = \frac{1}{2M} Q_{1/2}^* Q_{-1/2}^* |j, \sigma\rangle, \tag{25.5.7}$$

который отличается от $|j, \sigma\rangle$ тем, что вместо соотношения (25.5.3) имеем

$$Q_a^* |j, \sigma\rangle^b = 0. \tag{25.5.8}$$

Используя снова соотношения (25.5.2)–(25.5.4), находим, что эти состояния также являются нормированными:

$$^b\langle j, \sigma' | j, \sigma \rangle^b = \delta_{\sigma'\sigma}, \qquad \langle j, \sigma' | j, \sigma \rangle^b = 0. \tag{25.5.9}$$

Тогда легко показать, что построенные до сих пор состояния образуют полное представление алгебры суперсимметрии. Свойства ортогональности коэффициентов Клебша–Гордана позволяют переписать соотношение (25.5.5) в виде

$$Q_a^* |j, \sigma\rangle = \sqrt{2M} \sum_{\pm} C_{1/2j}(j \pm 1/2, \sigma + a; a, \sigma)\, |j \pm 1/2, \sigma + a\rangle. \tag{25.5.10}$$

Кроме того, соотношение (25.5.2) показывает, что для любого состояния $|\rangle$ в супермультиплете

$$\left[Q_a, Q_{\frac{1}{2}}^* Q_{-\frac{1}{2}}^*\right] |\rangle = 2M \sum_b e_{ab} Q_b^* |\rangle, \tag{25.5.11}$$

так что соотношения (25.5.7) и (25.5.3) дают

$$
\begin{aligned}
Q_a|j,\sigma\rangle^\flat &= \sum_b e_{ab} Q_b^* |j,\sigma\rangle \\
&= \sqrt{2M} \sum_b e_{ab} \sum_{\pm} C_{\frac{1}{2}j}(j\pm 1/2, \sigma+b; b, \sigma)\, |j\pm 1/2, \sigma+b\rangle. \qquad (25.5.12)
\end{aligned}
$$

Из соотношений (25.5.2), (25.5.3) и (25.5.5) имеем

$$
Q_a|j\pm 1/2,\sigma\rangle = \sqrt{2M} C_{\frac{1}{2}j}(j\pm 1/2, \sigma; a, \sigma - a)\, |j, \sigma - a\rangle, \qquad (25.5.13)
$$

а соотношения (25.5.5), (25.2.31) и (25.5.7) дают

$$
Q_a^*|j\pm 1/2,\sigma\rangle = \sqrt{2M} \sum_b e_{ab} C_{\frac{1}{2}j}(j\pm 1/2, \sigma; b, \sigma - b)\, |j, \sigma - b\rangle^\flat. \qquad (25.5.14)
$$

Соотношения (25.5.3), (25.5.8), (25.5.10) и (25.5.12)–(25.5.14) описывают действие операторов Q и Q^* на все состояния супермультиплета.

Для $j=0$ имеем усеченный супермультиплет: соотношения (25.5.3), (25.5.8), (25.5.10) и (25.5.12)–(25.5.14) принимают вид:

$$
\begin{aligned}
&Q_a|0,0\rangle = 0, && Q_a^*|0,0\rangle^\flat = 0, \\
&Q_a^*|0,0\rangle = \sqrt{2M}|1/2,a\rangle, && Q_a|0,0\rangle^\flat = \sqrt{2M}\sum_b e_{ab}|1/2,b\rangle, \\
&Q_a|1/2,b\rangle = \sqrt{2M}\delta_{ab}|0,0\rangle, && Q_a^*|1/2,b\rangle = \sqrt{2M} e_{ab}|0,0\rangle^\flat. \qquad (25.5.15)
\end{aligned}
$$

Теперь предположим, что четность сохраняется. Вспомним, что фазу генератора суперсимметрии можно выбрать так, чтобы действие оператора четности на эти генераторы выражалось соотношением (25.3.13). Тогда действие Q_a^* на $\mathsf{P}|j,\sigma\rangle$ есть линейная комбинация состояний $\mathsf{P}Q_a|j,\sigma\rangle$, которые обращаются в нуль, а так как состояние $\mathsf{P}|j,\sigma\rangle$ имеет такие же свойства относительно вращений, как состояние $|j,\sigma\rangle^\flat$, они должны быть просто пропорциональны друг другу:

$$
\mathsf{P}|j,\sigma\rangle = -\eta|j,\sigma\rangle^\flat. \qquad (25.5.16)
$$

Поскольку P — унитарный оператор, η есть просто фазовый множитель, $|\eta| = 1$. Аналогичные соображения показывают, что $\mathsf{P}|j,\sigma\rangle^\flat$ пропорционально $|j,\sigma\rangle$. Чтобы найти коэффициент пропорциональности, заметим, что

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}|j,\sigma\rangle^\flat &= (2M)^{-1}\mathsf{P}Q_{\frac{1}{2}}^* Q_{-\frac{1}{2}}^*|j,\sigma\rangle = -\eta(2M)^{-1}Q_{-\frac{1}{2}}Q_{\frac{1}{2}}|j,\sigma\rangle^\flat \\
&= -\eta(2M)^{-2}Q_{-\frac{1}{2}}Q_{\frac{1}{2}}Q_{\frac{1}{2}}^*Q_{-\frac{1}{2}}^*|j,\sigma\rangle = -\eta|j,\sigma\rangle.
\end{aligned}
$$

Тогда можно ввести состояния со спином j

$$|j,\sigma\rangle^{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|j,\sigma\rangle \pm i|j,\sigma\rangle^{\flat}\right), \tag{25.5.17}$$

имеющие определенную четность

$$\mathsf{P}|j,\sigma\rangle^{\pm} = \pm i\eta|j,\sigma\rangle^{\pm}. \tag{25.5.18}$$

Наконец, действуя оператором четности на соотношение (25.5.5) и используя (25.3.13) и (25.5.16), получим

$$\mathsf{P}|j \pm 1/2,\sigma\rangle = -\frac{\eta}{\sqrt{2M}}\sum_a C_{\frac{1}{2}j}(j\pm 1/2,\sigma;a,\sigma-a)\sum_b e_{ab}\mathrm{Q}_b|j,\sigma-b\rangle^{\flat}.$$

Тогда (25.5.12) и свойство ортогональности коэффициентов Клебша–Гордана дают

$$\mathsf{P}|j\pm 1/2,\sigma\rangle = \eta|j\pm 1/2,\sigma\rangle, \tag{25.5.19}$$

что и требовалось показать.

Теперь кратко рассмотрим случай расширенной суперсимметрии с числом генераторов N. Как отмечалось в предыдущем разделе, не может быть безмассовых частиц с ненулевым собственным значением любого центрального заряда. Можно пойти дальше и показать, что собственные значения операторов центрального заряда определяют нижние границы масс любого супермультиплета. Поскольку центральные заряды Z_{rs} и Z^*_{rs} коммутируют друг с другом и с P_μ, можно выбрать одночастичные состояния так, чтобы они были собственными состояниями как всех центральных зарядов, так и P_μ, а поскольку центральные заряды коммутируют с Q_{ar} или Q^*_{ar}, все состояния в супермультиплете имеют одну и ту же массу.

Чтобы получить неравенство, связывающее массу M супермультиплета и собственные значения центральных зарядов для этого мультиплета, воспользуемся антикоммутационными соотношениями (25.2.7), (25.2.8) и запишем

$$\sum_{ar}\left\{\left(\mathrm{Q}_{ar}-\sum_{bs}e_{ab}U_{rs}\mathrm{Q}^*_{bs}\right),\left(\mathrm{Q}^*_{ar}-\sum_{ct}e_{ac}U^*_{rt}\mathrm{Q}_{ct}\right)\right\}$$
$$= 8NP^0 - 2\mathrm{Tr}\left(ZU^\dagger + UZ^\dagger\right), \tag{25.5.20}$$

где U_{rs} — произвольная $N\times N$ унитарная матрица. Левая сторона равенства есть положительно определенный оператор, поэтому, действуя им на состояния супермультиплета в покое, найдем

$$M \geqslant \frac{1}{4N}\mathrm{Tr}\left(ZU^\dagger + UZ^\dagger\right), \tag{25.5.21}$$

где под Z_{rs} теперь нужно понимать значения центральных зарядов для супермультиплета массой M. Согласно теореме о полярном разложении, любую квадратную матрицу Z можно представить как произведение HV, где H — положительная эрмитова матрица, а V — унитарная матрица. Полагая $U = V$, можно из (25.2.21) получить полезное неравенство (которое фактически является оптимальным),

$$M \geqslant \frac{1}{2N} \mathrm{Tr}\, H = \frac{1}{2N} \mathrm{Tr}\, \sqrt{Z^\dagger Z}. \tag{25.5.22}$$

Состояния, для которых масса M равна минимальной величине, разрешенной этим неравенством, принято называть БПС состояниями, по аналогии с такими же конфигурациями магнитного монополя, предложенными Богомольным, Прасадом, Соммерфелдом и обсуждавшимися в разделе 23.3, для которых масса равна нижней границе допустимых масс монополя. Фактически это больше чем аналогия; в разделе 27.9 будет показано, что нижняя граница масс монополя в калибровочных теориях с расширенной суперсимметрией есть частный случай нижней границы (25.5.22).

Как можно видеть из приведенного вывода соотношения (25.5.22), для БПС супермультиплетов действие оператора $Q_{ar} - \sum_{bs} e_{ab} U_{rs} Q^*_{bs}$ на любое состояние супермультиплета дает нуль, поэтому имеется только N независимых операторов $Q_{(-1/2)r}$, понижающих спиральность, в точности как в случае безмассовых супермультиплетов. Это приводит к меньшим мультиплетам, чем можно было бы получить в общем случае.

Например, для $N = 2$ суперсимметрии центральный заряд определяется одним комплексным числом*

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & Z_{12} \\ -Z_{12} & 0 \end{pmatrix}. \tag{25.5.23}$$

Неравенство (25.5.22) здесь принимает вид

$$M \geqslant |Z_{12}|/2. \tag{25.5.24}$$

При $M = |Z_{12}|/2$ состав супермультиплета массивных частиц по спиральностям такой, как для безмассовых частиц: имеются калибровочные мультиплеты, состоящие из одной частицы спина 1, дублета $SU(2)$ R-симметрии спина 1/2 и одной частицы спина 0 (другое состояние с нулевой спиральностью принадлежит частице спина 1), и гипермультиплеты, состоящие из одной частицы спина 1/2 и дублета $SU(2)$ R-симметрии спина 0. В этом случае иногда говорят о «коротких» супермультиплетах, чтобы отличать их от больших супермультиплетов, встречающихся при $M > |Z_{12}|/2$.

---

*В некоторых статьях по $N = 2$ суперсимметрии центральным зарядом Z называют величину, которая здесь была бы равна $Z/2\sqrt{2}$.

Задачи

1. Найдите набор 2×2-матриц, которые образуют градуированную алгебру Ли, содержащую как фермионные, так и бозонные генераторы.

2. Следуя подходу Хаага, Лопушанского и Сониуса, выведите вид супералгебры наиболее общей симметрии в $2+1$ пространственно-временном измерении. (Указание: Если обозначить генераторы группы Лоренца в $2+1$ пространственно-временном измерении через $A_1 = -iJ_{10}$, $A_2 = -iJ_{20}$, $A_3 = J_{12}$, то коммутационные соотношения алгебры Пуанкаре есть $[A_i, A_j] = i\sum_k \varepsilon_{ijk} A_k$, так что представления однородной группы Лоренца в $2+1$ пространственно-временном измерении определяются *одним* положительным целым или полуцелым числом A.) Предполагается, что здесь выполнены условия теоремы Коулмена–Мандулы.

3. Предположим, что не было бы безмассовых частиц со спиральностью больше $+3/2$ или меньше $-3/2$. Найдите наиболее общие мультиплеты безмассовых частиц для $N = 6$ расширенной суперсимметрии и (используя CPT-симметрию) $N = 5$ расширенной суперсимметрии. Что можно предположить об этих двух расширенных суперсимметриях, сравнивая найденные составы частиц?

4. Какие четности частиц возможны в коротких супермультиплетах расширенной $N = 2$ суперсимметрии?

Список литературы

1. R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sonius, *Nucl. Phys.* **B88**, 257 (1975). Эта статья была перепечатана в сб.: *Supersymmetry*, S. Ferrara, ed. (North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapore, 1987).

2. B. Zumino, *Nucl. Phys.* . **B89**, 535 (1975). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersymmetry* [1].

3. M. T. Grisaru and H. N. Pendleton, *Phys. Lett.* **67B**, 323 (1977).

26

Суперсимметричные теории поля

Теперь нам известна структура наиболее общих алгебр суперсимметрии и мы видели, как использовать следствия этой симметрии для анализа спектра частиц. Чтобы понять, что может сказать суперсимметрия о взаимодействиях частиц, необходимо разобраться в том, как строятся суперсимметричные теории поля.

Первоначально супермультиплеты полей строились непосредственно с помощью многократного использования тождеств Якоби, во многом так же, как строились супермультиплеты одночастичных состояний в разделах 25.4 и 25.5. В разделе 26.1 представлен один пример применения этого метода для построения супермультиплетов, содержащих только скалярное и дираковское поля. К счастью, существует разработанный Саламом и Стратди [1] более легкий метод, в котором супермультиплеты полей собраны в «суперполя», зависящие как от фермионных координат, так и от обычных четырех пространственно-временных координат. Суперполя вводятся в разделе 26.2 и используются в разделах 26.3–26.8 для построения суперсимметричных теорий поля и изучения некоторых их следствий. В этой главе рассматривается только $N = 1$ суперсимметрия, для которой формализм суперполей особенно полезен. В конце следующей главы мы построим теории с N-расширенной суперсимметрей, наложив условие $U(N)$ R симметрии на теории $N = 1$ суперполей.

26.1. Прямое построение супермультиплетов полей

Чтобы проиллюстрировать прямое построение супермультиплета полей, рассмотрим поля, которые могут уничтожать частицы, принадлежащие обсуждавшемуся в разделе 25.2 простейшему супермультиплету произвольной массы: две бесспиновые частицы и одна частица спина $1/2$. Из формулы (25.5.15) видно, что одночастичное состояние нулевого спина $|0,0\rangle$

уничтожается генератором суперсимметрии Q_a, но не генератором Q_a^*. Поэтому мы могли бы ожидать, что скалярное поле $\varphi(x)$, которое рождает эту частицу из вакуума (подразумевается, что он аннигилируется всеми генераторами суперсимметрии), коммутирует с Q_a, но не с Q_a^*. Иными словами

$$[Q_a, \varphi(x)] = 0, \tag{26.1.1}$$

$$-i\sum_b e_{ab}\,[Q_b^*, \varphi(x)] \equiv \zeta_a(x) \neq 0. \tag{26.1.2}$$

Антисимметричная 2×2-матрица e_{ab} (в которой $e_{1/2,-1/2} = +1$) введена здесь потому, что именно $\sum_b e_{ab} Q_b^*$ преобразуется при однородных преобразованиях Лоренца по представлению $(1/2, 0)$. Отсюда следует, что $\zeta_a(x)$ — двухкомпонентное спинорное поле, также принадлежащее $(1/2, 0)$ представлению однородной группы Лоренца*.

Из формул (26.1.1)–(26.1.2) и антикоммутатора (25.2.31) находим:

$$\{Q_b, \zeta_a\} = -\sum_c e_{ac}\,[\{Q_b, Q_c^*\}, \varphi(x)] = 2i(\sigma^\mu e)_{ba}[P_\mu, \varphi],$$

и

$$\{Q_b, \zeta_a(x)\} = -2(\sigma^\mu e)_{ba}\partial_\mu \varphi(x). \tag{26.1.3}$$

С другой стороны формула (26.1.2) и соотношение антикоммутации (25.2.32) дают

$$-i\sum_c e_{ac}\,\{Q_b^*, \zeta_c\} = \{Q_b^*, [Q_a^*, \varphi]\} = -\{Q_a^*, [Q_b^*, \varphi]\} = i\sum_c e_{bc}\,\{Q_a^*, \zeta_c\},$$

т. е. выражение $\sum_c e_{ac}\{Q_b^*, \zeta_c\}$ антисимметрично и поэтому пропорционально антисимметричной 2×2 матрице e_{ab}:

$$i\{Q_b^*, \zeta_a(x)\} = 2\delta_{ab}\mathscr{F}(x). \tag{26.1.4}$$

Лоренц-инвариантность требует, чтобы коэффициент $\mathscr{F}(x)$ был скалярным полем.

Теперь мы должны сделать следующий шаг и вычислить коммутаторы генераторов суперсимметрии с $\mathscr{F}(x)$. Используя соотношения (26.1.4), (26.1.2) и (25.2.32), имеем

$$\delta_{ab}\,[Q_c^*, \mathscr{F}] = \frac{1}{2}i\,[Q_c^*, \{Q_b^*, \zeta_a\}] = \frac{1}{2}i\,[\{Q_c^*, \zeta_a\}, Q_b^*] = -\delta_{ac}\,[Q_b^*, \mathscr{F}].$$

---

*Здесь мы ничего не предполагаем о массах или взаимодействиях частиц, описываемых этими полями, но можно заметить что, как объяснялось в разделе 5.9, свободное поле $(1/2, 0)$ может рождать безмассовые частицы только спиральности $1/2$, в согласии с результатом (25.5.15), в силу которого безмассовые бесспиновые одночастичные состояния $|0,0\rangle$, аннигилируемые Q_a, находятся в супермультиплете со значением спиральности $+1/2$.

Положив $a = b \neq c$, видим, что этот коммутатор обращается в нуль:

$$[Q_c^*, \mathscr{F}(x)] = 0. \tag{26.1.5}$$

Наконец, используя (26.1.4), (25.2.31) и (26.1.3), получим

$$\begin{aligned}\delta_{ab}[Q_c, \mathscr{F}] &= \frac{1}{2}i[Q_c, \{Q_b^*, \zeta_a\}] = \frac{1}{2}i[\{Q_c, Q_b^*\}, \zeta_a] - [Q_b^*, \{Q_c, \zeta_a\}] \\ &= -\sigma_{cb}^{\mu}\partial_\mu\zeta_a + i(\sigma^\mu e)_{ca}[Q_b^*, \partial_\mu\varphi] \\ &= -\sigma_{cb}^{\mu}\partial_\mu\zeta_a + \sum_d e_{bd}(\sigma^\mu)_{ca}\partial_\mu\zeta_d.\end{aligned}$$

В результате свертки с помощью δ_{ab} это равенство принимает вид

$$[Q_c, \mathscr{F}(x)] = -\sum_a \sigma_{ca}^{\mu}\partial_\mu\zeta_a(x). \tag{26.1.6}$$

Из соотношений (26.1.1)–(26.1.6) следует, что поля $\varphi(x), \zeta_a(x)$ и $\mathscr{F}(x)$ реализуют полное представление алгебры суперсимметрии. Эти поля неэрмитовы, поэтому комплексно сопряженные им поля реализуют еще один супермультиплет:

$$[Q_a^*, \varphi^*(x)] = 0, \tag{26.1.7}$$

$$-i\sum_b e_{ab}[Q_b, \varphi^*(x)] = \zeta_a^*(x), \tag{26.1.8}$$

$$\{Q_b^*, \zeta_a^*(x)\} = 2(e\sigma^\mu)_{ab}\partial_\mu\varphi^*(x), \tag{26.1.9}$$

$$-i\{Q_b, \zeta_a^*(x)\} = 2\delta_{ab}\mathscr{F}^*(x), \tag{26.1.10}$$

$$[Q_c, \mathscr{F}(x)] = 0, \tag{26.1.11}$$

$$[Q_c^*, \mathscr{F}(x)] = \sum_a \sigma_{ac}^{\mu}\partial_\mu\zeta_a^*(x). \tag{26.1.12}$$

Мы можем представить эти соотношения коммутации и антикоммутации как законы преобразования при таких преобразованиях суперсимметрии, которые сдвигают любой оператор бозонного или фермионного поля $\mathscr{O}(x)$ на бесконечно малую величину

$$\delta\mathscr{O}(x) \equiv \left[\sum_a (\varepsilon_a^* Q_a + \varepsilon_a Q_a^*), \mathscr{O}(x)\right], \tag{26.1.13}$$

где ε_a — бесконечно малый фермионный c-числовой спинор. (Так как ε_a и ε_a^* антикоммутируют с Q_a и Q_a^*, величина $\varepsilon_a^* Q_a + \varepsilon_a Q_a^*$ *антиэрмитова* и из формулы (26.1.13) следует, что $(\delta Q)^* = \delta Q^*$.) Коммутационные и антикоммутационные соотношения (26.1.1)–(26.1.6) эквивалентны законам преобразования

$$\delta\varphi(x) = -i\sum_{ab}\varepsilon_a e_{ab}\zeta_b(x), \tag{26.1.14}$$

$$\delta\zeta_a(x) = -2\sum_{b}\varepsilon_b^*(\sigma^\mu e)_{ba}\partial_\mu\varphi(x) - 2i\varepsilon_a\mathscr{F}(x), \tag{26.1.15}$$

$$\delta\mathscr{F}(x) = -\sum_{ab}\varepsilon_b^*\sigma^\mu_{ba}\partial_\mu\zeta_a(x). \tag{26.1.16}$$

Их можно переписать в четырехкомпонентных дираковских обозначениях, введя бесконечно малый майорановский* четырехкомпонентный спинорный параметр преобразования

$$\alpha \equiv -i\begin{pmatrix}\varepsilon_a\\ \sum_b e_{ab}\varepsilon_b^*\end{pmatrix}, \tag{26.1.17}$$

так что формула (26.1.13) принимает вид

$$i\delta\mathscr{O}(x) \equiv [\overline{\alpha}Q, \mathscr{O}(x)]. \tag{26.1.18}$$

Правила преобразований (26.1.14)–(26.1.16) и им комплексно сопряженные можно представить в удобной ковариантой форме, если ввести набор действительных бозонных полей, определяемых соотношениями

$$\frac{A+iB}{\sqrt{2}} \equiv \varphi, \qquad \frac{F-iG}{\sqrt{2}} \equiv \mathscr{F}, \tag{26.1.19}$$

и четырехкомпонентный майорановский спинор ψ, определяемый как

$$\psi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\zeta_a\\ -\sum_b e_{ab}\zeta_b^*\end{pmatrix}. \tag{26.1.20}$$

---

*С учетом принятого соглашения о фазах, четырехкомпонентный майорановский спинор, образованный из $(1/2,0)$ двухкомпонентного спинора u_a, имеет вид

$$\begin{pmatrix}u\\ -eu^*\end{pmatrix}.$$

Выражение (26.1.17) согласуется с этим определением при $u = -i\varepsilon$. Аналогично, майорановский спинор можно образовать из двухкомпонентного $(0,1/2)$ спинора v_a

$$\begin{pmatrix}ev^*\\ v\end{pmatrix}.$$

Выражение (25.2.34) представляет собой пример такого спинора. Свойства майорановских спиноров подробно рассмотрены в приложении к этой главе.

Напомним также соотношение между 4×4-матрицами Дирака и 2×2-матрицами σ_μ

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -ie\sigma_\mu^{\mathrm{T}}e \\ i\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь законы преобразования принимают вид

$$\begin{aligned} &\delta A = (\bar{\alpha}\psi), && \delta B = -i\bar{\alpha}\gamma_5\psi, \\ &\delta\psi = \partial_\mu(A + i\gamma_5 B)\gamma^\mu\alpha + (F - i\gamma_5 G)\alpha, && \\ &\delta F = \left(\bar{\alpha}\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right), && \delta G = -i\left(\bar{\alpha}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right), \end{aligned} \tag{26.1.21}$$

Прямое, хотя и утомительное вычисление показывает, что это преобразование оставляет инвариантным действие

$$\begin{aligned} I = \int d^4x \Big\{ &-\frac{1}{2}\partial_\mu A\partial^\mu A - \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B - \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ &+ \frac{1}{2}(F^2 + G^2) + m\left[FA + GB - \frac{1}{2}\overline{\psi}\psi\right] \\ &+ g\left[F(A^2 + B^2) + 2GAB - \overline{\psi}(A + i\gamma_5 B)\psi\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{26.1.22}$$

Соотношения (26.1.21) и (26.1.22) согласуются с правилами преобразований (24.2.8) и с плотностью лагранжиана (24.2.9), найденными в оригинальной работе Весса и Зумино. В следующих трех разделах мы применим технику, удобную для проверки суперсимметричности выражения (26.1.22) и для вывода более общих суперсимметричных действий.

В том случае, когда фермионное поле $\psi(x)$ удовлетворяет свободному уравнению Дирака $(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = 0$, эти правила преобразований указывают, что $F + mA$ и $G + mB$ инвариантны и поэтому коммутируют с Q_a и Q_a^*, а следовательно, и с P_μ. Это не доказывает, что $F = -mA$ и $G = -mB$, однако, не изменяя ни одного из правил коммутации или антикоммутации (26.1.1)–(26.1.6) или правил преобразований (26.1.21), мы можем переопределить поля F и G, вычтя, соответственно, постоянные $F + mA$ и $G + mB$ так, что новыми полями F и G будут $F = -mA$ и $G = -mB$, и поэтому $\mathscr{F} = -m\varphi^*$. Это несправедливо в присутствии взаимодействий, но даже в случае со взаимодействием $\mathscr{F}(x)$, $F(x)$ и $G(x)$ — типично вспомогательные поля, которые можно выразить через другие поля супермультиплета, как в случае действия (26.1.22).

26.2. Произвольные суперполя

Продемонстрированный в предыдущем разделе прямой способ позволяет непосредственно строить мультиплеты суперполей, но чтобы построить суперсимметричное действие, необходимо также знать, как перемножать супермультиплеты полей, чтобы получать другие супермультиплеты. Работу можно заметно упростить, используя предложенный Саламом и Стратди [1] формализм, в котором поля в каждом супермультиплете собраны в единое суперполе.

Так же как операторы компонент четырехмерного импульса определены как генераторы трансляций обычных пространственно-временных координат x_μ, четыре генератора суперсимметрии Q_a и Q_a^* можно считать генераторами трансляций четырех фермионных c-числовых координат суперпространства, которые антикоммутируют друг другом и с фермионными полями, но коммутируют с x_μ и со всеми бозонными полями. Наша цель состоит в построении лоренц-инвариантной плотности лагранжиана, поэтому удобно избрать четырехкомпонентный дираковский формализм, описанный в разделе 25.2. Генераторы суперсимметрии объединяются в четырехкомпонентный майорановский спинор Q_α и, соответственно, координаты суперпространства объединяются в другой четырехкомпонентный майорановский спинор θ_α. (Различные свойства майорановских спиноров приведены в приложении к этой главе.) Генераторы суперсиммметрии имеют неисчезающие антикоммутаторы, так что мы не можем просто считать их пропорциональными операторам трансляции суперкоординат $\partial/\partial\theta_\alpha$. Взамен этого Салам и Стратди нашли, что алгебра суперсимметрии удовлетворялась бы, если бы мы предположили, что коммутатор или антикоммутатор генератора суперсимметрии Q с любым бозонным или фермионным суперполем $S(X,\theta)$ имеет вид

$$[Q,S\} = i\mathscr{D}\, S, \tag{26.2.1}$$

где $\mathscr{D}$ — дифференциальный оператор в суперпространстве.

$$\mathscr{D} \equiv -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + \gamma^\mu\theta\frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{26.2.2}$$

(Как обычно, $\bar{\theta} \equiv \theta^\dagger\beta$. Все производные по фермионным c-числовым переменным нужно понимать как *левые* производные, для вычисления которых переменная, по которой происходит дифференцирование, предварительно перемещается к левому краю выражения.) Для майорановских спиноров $\bar{\theta} = \theta^{\mathrm{T}}\gamma_5\varepsilon$ с 4×4-матрицей ε, определенной в (26.A.3), так что выражение

(26.2.2) можно представить в более явной форме

$$\mathscr{D}_\alpha = \sum_\gamma (\gamma_5\varepsilon)_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta_\gamma} + \sum_\gamma \gamma^\mu_{\alpha\gamma}\theta_\gamma\frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{26.2.3}$$

Аналогично

$$\overline{\mathscr{D}}_\beta = \sum_\gamma \mathscr{D}_\gamma(\gamma_5\varepsilon)_{\gamma\beta} = \frac{\partial}{\partial\theta_\beta} - \sum_\gamma (\gamma_5\varepsilon\gamma^\mu)_{\beta\gamma}\theta_\gamma\frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{26.2.4}$$

Прямым вычислением можно убедиться, что

$$\left\{\mathscr{D}_\alpha, \overline{\mathscr{D}}_\beta\right\} = (\gamma_5\varepsilon\gamma^\mu\gamma_5\varepsilon)_{\beta\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{26.2.5}$$

Но из выражения (5.4.35) следует, что $\gamma^{\mathrm{T}}_\mu = -\mathscr{C}\gamma_\mu\mathscr{C}^{-1}$, где матрица $\mathscr{C} = -\gamma_5\varepsilon$, так что два слагаемых в правой части (26.2.5) одинаковы и поэтому

$$\left\{\mathscr{D}_\alpha, \overline{\mathscr{D}}_\beta\right\} = 2\gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{26.2.6}$$

Соотношения (26.2.6) и (26.2.1) вместе с обобщенными тождествами Якоби (25.1.5) дают

$$\left[\left\{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\right\}, S\right] = \left\{\mathscr{D}_\alpha, \overline{\mathscr{D}}_\beta\right\} S = 2\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu S = -2i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\left[P_\mu, S\right], \tag{26.2.7}$$

в согласии с антикоммутационными соотношениями (25.2.36).

Часто удобнее представлять коммутационные и антикоммутационные соотношения (26.2.1) как законы преобразований относительно бесконечно малых преобразований суперсимметрии. Совместно используя равенства (26.1.18), (26.2.1) и (26.2.2), видим, что преобразование суперсимметрии с бесконечно малым майорановским спинорным параметром α изменяет суперполе $S(x,\theta)$ на величину

$$\delta S = (\overline{\alpha}\mathscr{D})S = -\left(\alpha\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}}\right) + (\overline{\alpha}\gamma^\mu\theta)\frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \tag{26.2.8}$$

Напомним, что $\partial/\partial\overline{\theta}$ действует на любое выражение слева. В частности, если M — некоторая линейная комбинация матриц $1, \gamma_5\gamma_\mu$ и γ_5, для которой $\overline{\theta}M\theta$ не равно нулю, то $\overline{\theta}'M\theta'' = \overline{\theta}''M\theta'$, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}(\overline{\theta}M\theta) = 2M\theta. \tag{26.2.9}$$

Компоненты θ антикоммутируют, поэтому любое произведение компонент обращается в нуль, если две из них одинаковы. Но θ имеет только четыре компоненты, значит степенное разложение любой функции от θ заканчивается членом четвертой степени. Более того, как показано в приложении к этой главе, произведение двух θ пропорционально линейной комбинации $(\bar{\theta}\theta)$, $(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\theta)$ и $(\bar{\theta}\gamma_5\theta)$; произведение трех θ пропорционально $(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\theta$, а произведение четырех θ пропорционально $(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2$. Поэтому самая общая функция от x^μ и θ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} S(x,\theta) &= C(x) - i\left(\bar{\theta}\gamma_5\omega(x)\right) - \frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)M(x) - \frac{1}{2}\left(\bar{\theta}\theta\right)N(x) \\ &+ \frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta\right)V^\mu(x) - i\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)\left(\bar{\theta}\left[\lambda(x) + \frac{1}{2}\not{\partial}\omega(x)\right]\right) \\ &- \frac{1}{4}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)^2\left(D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)\right). \end{aligned} \tag{26.2.10}$$

(Для удобства члены $\frac{1}{2}\not{\partial}\omega$ и $\frac{1}{2}\Box C(x)$ отделены, соответственно, от $\lambda(x)$ и $D(x)$.) Если $S(x,\theta)$ — скаляр, то $C(x)$, $M(x)$, $N(x)$ и $D(x)$ — скалярные (или псевдоскалярные) поля, $\omega(x)$ и $\lambda(x)$ — четырехкомпонентные спинорные поля, а $V^\mu(x)$ — векторное поле. Используя также приведенные в приложении к этой главе свойства действительности билинейных произведений майорановских полей, мы замечаем, что если поле $S(x,\theta)$ действительно, то каждое из полей $C(x)$, $M(x)$, $N(x)$, $V^\mu(x)$ и $D(x)$ также действительно, а $\omega(x)$ и $\lambda(x)$ — майорановские спиноры, удовлетворяющие фазовому условию $s^* = -\beta\epsilon\gamma_5 s$.

Теперь необходимо выяснить поведение содержащихся в (26.2.10) компонентных полей относительно преобразований суперсимммметрии. Применение выражений (26.2.8) и (26.2.9) к разложению (26.2.10) дает

$$\begin{aligned} \delta S &= (\bar{\alpha}\gamma^\mu\theta)\frac{\partial C}{\partial x^\mu} + i(\bar{\alpha}\gamma_5\omega) - i(\bar{\alpha}\gamma^\mu\theta)\left(\bar{\theta}\gamma_5\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}\right) \\ &+ i(\bar{\alpha}\gamma_5\theta)M - \frac{i}{2}(\bar{\alpha}\gamma^\mu\theta)\,)\bar{\theta}\gamma_5\theta)\,\frac{\partial M}{\partial x^\mu} \\ &+ (\bar{\alpha}\theta)N - \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\gamma^\mu\theta)\,(\bar{\theta}\theta)\,\frac{\partial N}{\partial x^\mu} \\ &- i(\bar{\alpha}\gamma_5\gamma_\nu\theta)V^\nu + \frac{i}{2}(\bar{\alpha}\gamma^\mu\theta)\,(\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\nu\theta)\,\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} \\ &+ 2i(\bar{\alpha}\gamma_5\theta)\left(\bar{\theta}\left[\lambda + \frac{1}{2}\not{\partial}\omega\right]\right) + i(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\left(\bar{\alpha}\left[\lambda + \frac{1}{2}\not{\partial}\omega\right]\right) \\ &- i(\bar{\alpha}\gamma^\mu\theta)(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\left(\bar{\theta}\partial_\mu\left[\lambda + \frac{1}{2}\not{\partial}\omega\right]\right) + (\bar{\theta}\gamma_5\theta)\,(\bar{\alpha}\gamma_5\theta)\left[D + \frac{1}{2}\Box C\right]. \end{aligned}$$

Каждое слагаемое необходимо привести к стандартной форме (26.2.10). С этой целью заметим, что из формулы (26.A.9) следует

$$(\overline{\alpha}\gamma^\mu\theta)(\overline{\theta}\gamma_5\partial_\mu\omega) = -\frac{1}{4}(\overline{\theta}\theta)(\overline{\alpha}\not{\partial}\gamma_5\omega) - \frac{1}{4}(\overline{\theta}\gamma_5\gamma^\nu\theta)(\overline{\alpha}\not{\partial}\gamma_\nu\omega) - \frac{1}{4}(\overline{\theta}\gamma_5\theta)(\overline{\alpha}\not{\partial}\omega);$$

из формулы (26.A.16) следует

$$(\overline{\alpha}\gamma^\mu\theta)(\overline{\theta}\theta) = -(\overline{\alpha}\gamma^\mu\gamma_5\theta)(\overline{\theta}\gamma_5\theta);$$

из формулы (26.2.17) следует

$$(\overline{\alpha}\gamma^\mu\theta)(\overline{\theta}\gamma_5\gamma_\nu\theta) = -(\overline{\alpha}\gamma^\mu\gamma_\nu\theta)(\overline{\theta}\gamma_5\theta);$$

из формулы (26.A.9) следует

$$\begin{aligned}(\overline{\alpha}\gamma_5\theta)\left(\overline{\theta}[\lambda+\frac{1}{2}\not{\partial}\omega]\right) = &-\frac{1}{4}(\overline{\theta}\theta)\left(\overline{\alpha}\gamma_5[\lambda+\frac{1}{2}\not{\partial}\omega]\right)+\frac{1}{4}(\overline{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta)\left(\overline{\alpha}\gamma_\mu\left[\lambda+\frac{1}{2}\not{\partial}\omega\right]\right)\\ &-\frac{1}{4}(\overline{\theta}\gamma_5\theta)\left(\overline{\alpha}[\lambda+\frac{1}{2}\not{\partial}\omega]\right);\end{aligned}$$

из формулы (26.A.19) следует

$$(\overline{\alpha}\gamma^\mu\theta)(\overline{\theta}\gamma_5\theta)\left(\overline{\theta}\partial_\mu[\lambda+\frac{1}{2}\not{\partial}\omega]\right) = -\frac{1}{4}\left(\overline{\alpha}\not{\partial}\gamma_5[\lambda+\frac{1}{2}\not{\partial}\omega]\right)(\overline{\theta}\gamma_5\theta)^2.$$

Используя эти соотношения и перегруппировав слагаемые в порядке возрастания числа множителей θ, получим

$$\begin{aligned}\delta S = &\, i(\overline{\alpha}\gamma_5\omega) + (\overline{\alpha}[\not{\partial}C + i\gamma_5 M + N - i\gamma_5\not{V}]\theta)\\ &-\frac{1}{2}i\,(\overline{\theta}\theta)\,(\overline{\alpha}\gamma_5[\lambda+\not{\partial}\omega]) + \frac{1}{2}i\,(\overline{\theta}\gamma_5\theta)\,(\overline{\alpha}[\lambda+\not{\partial}\omega])\\ &+\frac{1}{2}i\,(\overline{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta)\,(\overline{\alpha}\gamma_\mu\lambda) + \frac{1}{2}i\,(\overline{\theta}\gamma_5\gamma^\nu\theta)\,(\overline{\alpha}\partial_\nu\omega)\\ &+\frac{1}{2}\,(\overline{\theta}\gamma_5\theta)\left(\overline{\alpha}\left[-i\not{\partial}M - \gamma_5\not{\partial}N - i\not{\partial}\not{V} + \gamma_5\left(D+\frac{1}{2}\Box C\right)\right]\theta\right)\\ &-\frac{1}{4}i\,(\overline{\theta}\gamma_5\theta)^2\left(\overline{\alpha}\gamma_5\left[\not{\partial}\lambda+\frac{1}{2}\Box\omega\right]\right),\end{aligned}$$

или, используя свойство симметрии (26.A.7),

$$\begin{aligned}\delta S = &\, i(\overline{\alpha}\gamma_5\omega) + (\overline{\theta}[-\not{\partial}C - i\gamma_5 M + N - i\gamma_5\not{V}])\\ &-\frac{1}{2}i\,(\overline{\theta}\theta)\,(\overline{\alpha}\gamma_5[\lambda+\not{\partial}\omega]) + \frac{1}{2}i\,(\overline{\theta}\gamma_5\theta)\,(\overline{\alpha}[\lambda+\not{\partial}\omega])\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\left(\bar{\alpha}\gamma_\mu\lambda\right)+\frac{1}{2}i\left(\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\nu\theta\right)\left(\bar{\alpha}\partial_\nu\omega\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)\left(\bar{\theta}\left[i\partial\!\!\!/ M-\gamma_5\partial\!\!\!/ N-i\partial_\mu V\!\!\!/\gamma^\mu+\gamma_5\left(D+\frac{1}{2}\Box C\right)\right]\alpha\right).$$

Если мы теперь сравним это выражение с членами до второго порядка по θ в разложении (26.2.10), то найдем законы преобразований

$$\delta C = i\left(\bar{\alpha}\gamma_5\omega\right), \tag{26.2.11}$$
$$\delta\omega = \left(-i\gamma_5\partial\!\!\!/ C_M+i\gamma_5 N+V\!\!\!/\right)\alpha, \tag{26.2.12}$$
$$\delta M = -\left(\bar{\alpha}[\lambda+\partial\!\!\!/\omega]\right), \tag{26.2.13}$$
$$\delta N = i\left(\bar{\alpha}\gamma_5[\lambda+\partial\!\!\!/\omega]\right), \tag{26.2.14}$$
$$\delta V_\mu = \left(\bar{\alpha}\gamma_\mu\lambda\right)+\left(\bar{\alpha}\partial_\mu\omega\right). \tag{26.2.15}$$

Члены третьего и четвертого порядка по θ дают

$$\delta\left[\lambda+\frac{1}{2}\partial\!\!\!/\omega\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[\partial_\mu V\!\!\!/,\gamma^\mu\right]+i\gamma_5 D\right]\alpha,$$
$$\delta\left[D+\frac{1}{2}\Box C\right]=i\left(\bar{\alpha}\gamma_5\left[\partial\!\!\!/\lambda+\frac{1}{2}\Box\omega\right]\right).$$

Комбинируя последние два закона преобразования с законами преобразования (26.2.11) и (26.2.12) для C и ω, приходим к значительно более простым законам преобразований для λ и D:

$$\delta\lambda = \left(\frac{1}{2}\left[\partial_\mu V\!\!\!/,\gamma^\mu\right]+i\gamma_5 D\right)\alpha, \tag{26.2.16}$$
$$\delta D = i\left(\bar{\alpha}\gamma_5\partial\!\!\!/\lambda\right). \tag{26.2.17}$$

Именно чтобы достичь такого упрощения, в разложении (26.2.10) λ и D были отделены от слагаемых $\frac{1}{2}\partial\!\!\!/\omega$ и $\frac{1}{2}\Box C$.

Весь смысл формализма суперполей состоит в том, что он упрощает построение супермультиплетов из других супермультиплетов. Пусть даны два супермультиплета, каждый из которых преобразуется согласно (26.2.8), тогда их произведение $S\equiv S_1S_2$ удовлетворяет соотношению

$$\delta S\equiv\left[(\bar{\alpha}Q),S_1S_2\right]=(\delta S_1)S_2+S_1(\delta S_2)$$
$$=\left((\bar{\alpha}\mathscr{Q})S_1\right)S_2+S_1\left((\bar{\alpha}\mathscr{Q})\right)S_2=(\bar{\alpha}\mathscr{L})S, \tag{26.2.18}$$

и поэтому тоже является суперполем. Непосредственное вычисление с помощью формул (26.A.7), (26.A.16), (26.A.18) и (26.A.19) дает его компоненты:

$$C = C_1 C_2, \tag{26.2.19}$$

$$\omega = C_1 \omega_2 + C_2 \omega_1, \tag{26.2.20}$$

$$M = C_1 M_2 + C_2 M_1 + \frac{1}{2} i (\overline{\omega}_1 \gamma_5 \omega_2), \tag{26.2.21}$$

$$N = C_1 N_2 + C_2 N_1 - \frac{1}{2} (\overline{\omega}_1 \omega_2), \tag{26.2.22}$$

$$V^\mu = C_1 V_2^\mu + C_2 V_1^\mu - \frac{1}{2} i (\overline{\omega_1} \gamma_5 \gamma^\mu \omega_2), \tag{26.2.23}$$

$$\begin{aligned} \lambda = {} & C_1 \lambda_2 + C_2 \lambda_1 - \frac{1}{2} \gamma^\mu \omega_1 \partial_\mu C_2 - \frac{1}{2} \gamma^\mu \omega_2 \partial_\mu C_1 + \frac{1}{2} i \not{V}_1 \gamma_5 \omega_2 + \frac{1}{2} i \not{V}_2 \gamma_5 \omega_1 \\ & + \frac{1}{2} (N_1 - i\gamma_5 M_1) \omega_2 + \frac{1}{2} (N_2 - i\gamma_5 M_2) \omega_1, \end{aligned} \tag{26.2.24}$$

$$\begin{aligned} D = {} & -\partial_\mu C_1 \partial^\mu C_2 + C_1 D_2 + C_2 D_1 + M_1 M_2 + N_1 N_2 \\ & - \left(\overline{\omega}_1 \left[\lambda_2 + \frac{1}{2} \not{\partial} \omega_2 \right] \right) - \left(\overline{\omega}_2 \left[\lambda_1 + \frac{1}{2} \not{\partial} \omega_1 \right] \right) - V_{1\mu} V_2^\mu . \end{aligned} \tag{26.2.25}$$

Тривиально, что линейные комбинации суперполей являются суперполями, а также то, что пространственно-временное дифференцирование и комплексное сопряжение суперполей порождает суперполя. Но умножение суперполя на некоторую функцию от θ или его дифференцирование по θ в общем случае не приводит к суперполю. (Например, очевидно, что сама переменная θ не является суперполем, потому что θ — это фермионное c-число и поэтому оно коммутирует с $\bar{\alpha} Q$, в то время как $\mathscr{Q}\, \theta \neq 0$.) Имеется, однако, способ скомбинировать производную суперполя по θ и его умножение на θ так, чтобы получилось другое суперполе.

Рассмотрим действующий в суперпространстве дифференциальный оператор $\mathscr{D}_\alpha$, определенный формулой

$$\mathscr{D} \equiv -\frac{\partial}{\partial \overline{\theta}} - \gamma^\mu \theta \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{26.2.26}$$

или в более явной форме

$$\mathscr{D}_\alpha = \sum_\gamma (\gamma_5 \epsilon)_{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta_\gamma} - \sum_\gamma \gamma^\mu_{\alpha\gamma} \theta_\gamma \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{26.2.27}$$

Единственное различие в определениях $\mathscr{D}$ и $\mathscr{Q}$ состоит в изменении знака членов, содержащих пространственно-временную производную. Вследствие этого изменения знака при вычислении антикоммутатора $\mathscr{D}_\beta$ и $\mathscr{Q}_\alpha$, вместо того чтобы, как в (26.2.5), получить два равных члена с одинаковыми знаками, мы получаем их с противоположными знаками, так что они сокращаются:

$$\{\mathscr{D}_\beta, \mathscr{L}_\alpha\} = 0. \tag{26.2.28}$$

Поскольку α — фермионный параметр, $(\bar{\alpha}\mathscr{L})$ коммутирует с $\mathscr{D}_\beta$, и если $S(x,\theta)$ является суперполем, то

$$\delta\mathscr{D}_\beta S \equiv -i[(\bar{\alpha}Q), \mathscr{D}_\beta S] = -i\mathscr{D}_\beta[(\bar{\alpha}Q), S] = \mathscr{D}_\beta(\bar{\alpha}\mathscr{L})S = (\bar{\alpha}\mathscr{L})\mathscr{D}_\beta S, \tag{26.2.29}$$

то есть $\mathscr{D}_\beta S$ — также суперполе. *Таким образом, произвольная полиномиальная функция суперполей S и их суперпроизводных $\mathscr{D}_\beta S$, $\mathscr{D}_\beta\mathscr{D}_\gamma S$ и т. д. также является суперполем.*

Нет необходимости добавлять, что в построении суперполей из других суперполей могут участвовать их пространственно-временные производные, поскольку они могут быть получены из вторых суперпроизводных. Так как $\mathscr{D}_\alpha$ и $\mathscr{L}_\beta$ отличаются только знаком члена, содержащего ∂_μ, то антикоммутаторы компонент $\mathscr{D}$ только знаком отличаются от антикоммутаторов компонент $\mathscr{L}$

$$\{\mathscr{D}_\alpha, \overline{\mathscr{D}}_\beta\} = -2\gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{26.2.30}$$

Теперь рассмотрим, как из суперполей построить суперсимметричное действие. Не существует такого понятия, как суперсимметричный лагранжиан, потому что из соотношений антикоммутации (26.2.6) следует, что если $\delta\mathscr{L} = 0$, то $\mathscr{L}$ должен быть постоянным. Даже если лагранжиан не суперсимметричен, действие все равно было бы суперсимметричным, если бы функция $\delta\mathscr{L}(x)$ была производной, которая не дает вклада в $\delta\int\mathscr{L}d^4x$. В общем случае лагранжиан $\mathscr{L}$ можно записать как сумму членов, каждый из которых представляет собой некоторую компоненту суперполя, построенную из элементарных суперполей и их суперпроизводных. Исследование правил преобразования отдельных компонент (26.2.11)–(26.2.17) показывает, что в отсутствие специальных условий на произвольное суперполе, единственная компонента такого суперполя, вариация которой представляет собой производную, это D-компонента. Кроме того, чтобы D-компонента суперполя была скаляром, само суперполе должно быть скаляром. Поэтому если нет специальных условий на отдельные суперполя, из которых строится лагранжиан, суперсимметричное действие может быть только интегралом от D-члена скалярного суперполя Λ:

$$I = \int d^4x[\Lambda]_D. \tag{26.2.31}$$

Однако на самом деле никакое действие такого рода не могло бы быть физически удовлетворительным без специальных условий на суперполя, из которых оно построено. Для произвольного суперполя $S(x,\theta)$ единственная форма суперсимметричного кинематического действия I_0, билинейного по S и S^* и включающего не более чем две производные от компонентных полей, это

$$I_0 \propto \int d^4x\,[S^*S]_D. \tag{26.2.32}$$

Из выражения (26.2.25) видно, что S^*S имеет D-компоненту

$$\begin{aligned}[S^*S]_D = &-\partial_\mu C^*\partial^\mu C - \frac{1}{2}\left(\overline{\omega}\gamma^\mu\partial_\mu\omega\right) + \frac{1}{2}\left((\partial_\mu\overline{\omega})\gamma^\mu\omega\right)\\ &+C^*D+D^*C-(\overline{\omega}\lambda)-(\overline{\lambda}\omega)\\ &+M^*M+N^*N-V^*_\mu V^\mu.\end{aligned} \tag{26.2.33}$$

Члены четвертой степени по C или ω выглядят обнадеживающе как кинематические лагранжианы безмассовых полей спина нуль и 1/2; последние три члена не вызывают беспокойства; однако слагаемые, содержащие D или λ, приводят в функциональном интеграле к катастрофическому результату, допускающему только нулевые значения C и ω. К счастью, как мы увидим в следующем разделе, имеются суперполя со связями, из которых *можно* построить физически осмысленные действия. Введение этих суперполей со связями открывает также пути построения суперсимметричных слагаемых в действии, которые не являются D-компонентами функций от суперполей.

Если четность сохраняется, то суперсимметрия приводит к соотношению между свойствами входящих в суперполе компонентных полей относительно преобразования пространственной инверсии. Чтобы получить это соотношение, подействуем оператором четности на коммутационные/антикоммутационные соотношения (26.2.1) и используем трансформационные свойства (25.3.16) генераторов суперсимметрии. Это дает

$$i\beta\left[Q,\mathsf{P}^{-1}S(x,\theta)\mathsf{P}\right\} = \mathscr{L}\mathsf{P}^{-1}S(x,\theta)\mathsf{P}. \tag{26.2.34}$$

Решение уравнения (26.2.34) для скалярного суперполя имеет вид

$$\mathsf{P}^{-1}S(x,\theta)\mathsf{P} = \eta S(\Lambda_{\mathcal{P}}x,-i\beta\theta), \tag{26.2.35}$$

где η — некоторая фаза (внутренняя четность суперполя), а $\Lambda_{\mathcal{P}}x \equiv (-\mathbf{x},+x^0)$. (Чтобы проверить, что выражение (26.2.35) удовлетворяет уравнению (26.2.34), заметим, что с помощью (26.2.35) левая часть уравнения (26.2.34) представляется в виде

$$i\eta\beta\left(-\frac{\partial}{\partial\overline{(-i\beta\theta)}} + \gamma^\mu(-i\beta\theta)\frac{\partial}{\partial(\Lambda_{\mathcal{P}}x)^\mu}\right)S(\Lambda_{\mathcal{P}}x,\theta) = \eta\mathscr{L}S(\Lambda_{\mathcal{P}}x,-i\beta\theta),$$

в согласии с тем, что следует из (26.2.35) для правой части (26.2.34).) Используя разложение (26.2.10) в (26.2.35) получаем свойства компонентных полей при пространственной инверсии:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}^{-1}C(x)\mathsf{P} &= \eta C(\Lambda_P x),\\
\mathsf{P}^{-1}\omega(x)\mathsf{P} &= -i\eta\beta\omega(\Lambda_P x),\\
\mathsf{P}^{-1}M(x)\mathsf{P} &= -\eta M(\Lambda_P x),\\
\mathsf{P}^{-1}N(x)\mathsf{P} &= \eta N(\Lambda_P x),\\
\mathsf{P}^{-1}V^{\mu}(x)\mathsf{P} &= -\eta(\Lambda_P)^{\mu}_{\ \nu}V^{\nu}(\Lambda_P x),\\
\mathsf{P}^{-1}\lambda(x)\mathsf{P} &= i\eta\beta\lambda(\Lambda_P x),\\
\mathsf{P}^{-1}D(x)\mathsf{P} &= \eta D(\Lambda_P x).
\end{aligned} \qquad (26.2.36)$$

* * *

Произвольное действительное суперполе S включает четыре действительных бесспиновых поля C, M, N, D и одно действительное 4-векторное поле V_{μ}, т. е. всего восемь независимых бозонных компонент поля. Для сравнения, имеется два четырехкомпонентных майорановских спинорных поля ω и λ, т. е. тоже всего восемь независимых компонент поля. Равенство числа независимых бозонных и фермионных компонент поля справедливо в общем случае не только для суперполей общего вида без связей, но также для всех суперполей, получающихся из произвольных суперполей в результате наложения суперсимметричных связей, таких как киральное и другие суперполя со связями, обсуждаемые в следующем разделе.

Чтобы увидеть это в общем случае, предположим, что имеется представление алгебры суперсимметрии, образуемое N_B линейно независимыми действительными бозонными операторами поля $b_n(x)$ и N_F линейно независимыми фермионными операторами поля $f_k(x)$. Мы будем предполагать, что эти поля удовлетворяют только нетривиальным уравнениям поля, так что никакая линейная комбинация b_n или f_k с ненулевыми коэффициентами не удовлетворяет однородному линейному уравнению поля. Рассмотрим действительный генератор суперсимметрии $Q(u)$, определяемый как

$$Q(u) \equiv (\bar{u}Q) = (\overline{Q}u)\,, \qquad (26.2.37)$$

где u — некоторый обычный числовой майорановский спинор (*не* антикоммутирующее c-число). (Для расширенной суперсимметрии вместо Q_{α} мы могли бы использовать любой из спиноров $Q_{r\alpha}$, скажем, $Q_{1\alpha}$.) Чтобы b_n и f_k реализовывали представление алгебры суперсимметрии, необходимо, чтобы для некоторых матричных дифференциальных операторов $q(\partial)$ и $p(\partial)$.

$$[Q(u), b_n] = i\sum_k q_{nk}(\partial) f_k, \tag{26.2.38}$$

$$\{Q(u), f_k\} = \sum_n p_{kn}(\partial) b_n, \tag{26.2.39}$$

Взяв антикоммутатор от выражения (26.2.38) и коммутатор от выражения (26.2.39) с $Q(u)$, получим

$$[Q^2(u), b_n] = i\sum_m (q(\partial)p(\partial))_{nm} b_m, \tag{26.2.40}$$

$$\{Q^2(u), f_k] = i\sum \ell\,(p(\partial)q(\partial))_{k\ell} f_\ell. \tag{26.2.41}$$

Из антикоммутационного соотношения (25.2.36) или (25.2.38) следует, что квадрат $Q(u)$ равен $Q^2(u) = -iP_\mu(\bar{u}\gamma^\mu u)$. Отсюда следует, что обе квадратные матрицы $p(\partial)q(\partial)$ и $q(\partial)p(\partial)$ должны быть несингулярны, потому что, если бы существовали неисчезающие коэффициенты $c_n(\partial)$ или $d_k(\partial)$, для которых $\sum_n c_n(\partial)(q(\partial)p(\partial))_{nm} = 0$ или $\sum_k d_k(\partial)(p(\partial)q(\partial))_{kl} = 0$, то b_n или f_k должны были бы удовлетворять однородным линейным уравнениям поля

$$(\bar{u}\gamma^\mu u)\,\partial_\mu \sum_n c_n(\partial) b_n = 0 \quad \text{или} \quad (\bar{u}\gamma^\mu u)\,\partial_\mu \sum_k d_k(\partial) f_k = 0,$$

в противоречии с нашим предположением о том, что поля не удовлетворяют таким полевым уравнениям. Для того, чтобы матрица qp была несингулярна, должно быть $N_F \geqslant N_B$, а для того чтобы pq была несингулярна, должно быть выполнено неравенство $N_B \geqslant N_F$. Отсюда можно заключить, что $N_B = N_F$. Кроме того, обе квадратные матрицы должны быть несингулярны, а из выражения, комплексно-сопряженного уравнению (26.2.38), следует, что $f^* = q^{*-1} q f$, так что число независимых фермионных полей равно N_F, а не $2N_F$, и поэтому совпадает с числом N_B независимых бозонных полей, что и требовалось доказать.

26.3. Киральные и линейные суперполя

В предыдущем разделе мы обнаружили, что присутствие в произвольном суперполе компонент D и λ препятствует использованию таких суперполей в физически удовлетворительной плотности лагранжиана. Предположим теперь, что мы рассматриваем суперполе с

$$\lambda = D = 0. \tag{26.3.1}$$

Сохраняются ли эти условия при преобразованиях суперсимметрии? Согласно (26.2.17) и (26.216), условие $D=0$ инвариантно, если $\lambda = 0$, но условие $\lambda = 0$ инвариантно, только если мы наложим также условие $\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu = 0$, которое требует, чтобы V_μ было чистой калибровкой:

$$V_\mu(x) = \partial_\mu Z(x). \tag{26.3.2}$$

Из (26.2.15) видно, что при $\lambda = 0$ это условие сохраняется преобразованиями суперсимметрии. Таким образом мы приходим к приведенному суперполю, на которое наложены связи (26.3.1) и (26.3.2). Входящие в него компонентные поля имеют следующие трансформационные свойства:

$$\delta C = i\left(\bar{\alpha}\gamma_5\omega\right), \tag{26.3.3}$$

$$\delta\omega = \left(-i\gamma_5\,\partial\!\!\!/ C_M + i\gamma_5 N + \partial\!\!\!/ Z\right)\alpha, \tag{26.3.4}$$

$$\delta M = -\left(\bar{\alpha}\,\partial\!\!\!/\omega\right), \tag{26.3.5}$$

$$\delta N = i\left(\bar{\alpha}\gamma_5\,\partial\!\!\!/\omega\right), \tag{26.3.6}$$

$$\delta Z = \left(\bar{\alpha}\omega\right). \tag{26.3.7}$$

Сравнивая с (26.1.21), видим, что если отождествить

$$C = A, \quad \omega = -i\gamma_5\psi, \quad M = G, \quad N = -F, \quad Z = B. \tag{26.3.8}$$

то это совпадает с супермультиплетом, построенным прямым методом в разделе 26.1. Суперполе, удовлетворяющее условиям (26.3.1) и (26.3.2), называется *киральным**.

Чтобы отличить киральное суперполе $X(x,\theta)$ от суперполя общего вида $S(x,\theta)$ из предыдущего раздела, для обозначения его компонент мы будем использовать A, B, F, G и ψ вместо C, M, N, Z и ω. Подставив (26.3.1), (26.3.2) и (26.3.8) в (26.2.10), найдем общий вид кирального суперполя

$$X(x,\theta) = A(x) - \left(\bar{\theta}\psi(x)\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{\theta}\theta\right)F(x) - \frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)G(x)$$

*Некоторые авторы применяют термин «киральный» для описания вводимых ниже частных случаев таких суперполей, которые называются левокиральными или правокиральными. То значение, которое придается термину «киральный» здесь, может на первый взгляд показаться странным, поскольку оно не имеет аналога для дираковских спиноров. Любой дираковский спинор является суммой левокирального и правокирального дираковских спиноров в том смысле, что они, соответственно, пропорциональны $1+\gamma_5$ и $1-\gamma_5$, и для таких сумм дираковских спиноров не требуется специальный термин. В противоположность этому, только суперполя, удовлетворяющие (26.3.1) и (26.3.2), могут быть представлены в виде суммы левокирального и правокирального суперполей.

$$+\frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\partial^\mu B(x)+\frac{1}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)\left(\bar{\theta}\gamma_5\not{\partial}\psi(x)\right)-\frac{1}{8}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)\right)^2\Box A(x). \qquad (26.3.9)$$

(Точно так же мы могли бы положить $C=-B$, $\omega=\psi$, $M=-F$, $N=-G$ и $Z=A$. Мы выбрали отождествления (26.3.8) потому, что, как нетрудно заметить, для скалярных полей они совместимы с обычным соглашением о том, что A и F — скаляры, а B и G — псевдоскаляры.)

Киральное суперполе (26.3.9) может быть затем представлено в виде суммы

$$X(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Phi(x,\theta)+\tilde{\Phi}(x,\theta)\right], \qquad (26.3.10)$$

где

$$\Phi(x,\theta)=\varphi(x)-\sqrt{2}\left(\bar{\theta}\psi_L(x)\right)+\mathscr{F}(x)\left(\bar{\theta}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\theta\right)+\frac{1}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta\right)\partial^\mu\varphi(x)$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)\left(\bar{\theta}\not{\partial}\psi_L(x)\right)-\frac{1}{8}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)^2\Box\varphi(x), \qquad (26.3.11)$$

$$\tilde{\Phi}(x,\theta)=\tilde{\varphi}(x)-\sqrt{2}\left(\bar{\theta}\psi_R(x)\right)+\tilde{\mathscr{F}}(x)\left(\bar{\theta}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\theta\right)+\frac{1}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta\right)\partial^\mu\tilde{\varphi}(x)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)\left(\bar{\theta}\not{\partial}\psi_R(x)\right)-\frac{1}{8}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)^2\Box\tilde{\varphi}(x). \qquad (26.3.12)$$

а компонентные поля определяются равенствами

$$\varphi\equiv\frac{A+iB}{\sqrt{2}}, \quad \psi_L\equiv\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi, \quad \mathscr{F}\equiv\frac{F-iG}{\sqrt{2}}, \qquad (26.3.13)$$

$$\tilde{\varphi}\equiv\frac{A-iB}{\sqrt{2}}, \quad \psi_R\equiv\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi, \quad \tilde{\mathscr{F}}\equiv\frac{F+iG}{\sqrt{2}}. \qquad (26.3.14)$$

Входящие как в Φ, так и в $\tilde{\Phi}$ компонентные поля образуют замкнутые представления алгебры суперсимметрии:

$$\delta\psi_L=\sqrt{2}\partial_\mu\varphi\gamma^\mu\alpha_R+\sqrt{2}\mathscr{F}\alpha_L, \qquad (26.3.15)$$

$$\delta\mathscr{F}=\sqrt{2}\left(\overline{\alpha_L}\not{\partial}\psi_L\right), \qquad (26.3.16)$$

$$\delta\varphi=\sqrt{2}\left(\overline{\alpha_R}\psi_L\right), \qquad (26.3.17)$$

$$\delta\psi_R=\sqrt{2}\partial_\mu\tilde{\varphi}\gamma^\mu\alpha_L+\sqrt{2}\tilde{\mathscr{F}}\alpha_R, \qquad (26.3.18)$$

$$\delta\tilde{\mathscr{F}}=\sqrt{2}\left(\overline{\alpha_R}\not{\partial}\psi_R\right), \qquad (26.3.19)$$

$$\delta\tilde{\varphi}=\sqrt{2}\left(\overline{\alpha_L}\psi_R\right), \qquad (26.3.20)$$

где, как обычно,

$$\alpha_L = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\alpha, \quad \alpha_R = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\alpha,$$

и аналогично для θ. Суперполе вида (26.3.11) или (26.3.12) называют, соответственно, *левокиральным* или *правокиральным*. В частном случае, когда суперполе $X(x,\theta)$ *действительно*, его левокиральная часть Φ и правокиральная часть $\widetilde{\Phi}$ комплексно сопряжены, так что $\tilde{\varphi} = \varphi^*$, $\widetilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F}^*$, а поле ψ майорановское. Однако если не требовать, чтобы $X(x,\theta)$ было действительным, то в общем случае между полями Φ и $\widetilde{\Phi}$ нет никакой связи; возможно даже, что одно из них исчезает.

Компонентные поля суперполя Φ включают две комплексные бозонные компоненты φ и $\mathscr{F}$ или четыре независимых действительных бозонных компоненты и одно майорановское фермионное поле ψ, имеющее четыре независимых фермионных компоненты. Это еще один пример выведенного в конце предыдущего раздела общего результата: любой набор полей, образующих представление алгебры суперсимметрии, должен иметь равное количество независимых бозонных и фермионных компонент.

Мы можем использовать (26.A.5), (26.A.17) и (26.A.18) чтобы переписать соотношения (26.3.11) и (26.3.12) в такой форме, которая проясняет зависимость этих суперполей от θ_L и θ_R:

$$\Phi(x,\theta) = \varphi(x_+) - \sqrt{2}\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\psi_L(x_+)\right) + \mathscr{F}(x_+)\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L\right), \tag{26.3.21}$$

$$\widetilde{\Phi}(x,\theta) = \tilde{\varphi}(x_-) + \sqrt{2}\left(\theta_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\psi_R(x_-)\right) - \widetilde{\mathscr{F}}(x_-)\left(\theta_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L\right), \tag{26.3.22}$$

где

$$x_\pm^\mu = x^\mu \pm \frac{1}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta\right) = x^\mu \pm \left(\theta_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\gamma^\mu\theta_L\right). \tag{26.3.23}$$

Разложения $\varphi(x_+)$ и $\tilde{\varphi}(x_-)$ заканчиваются квадратичными членами, разложения $\psi_{L,R}(x_\pm)$ обрываются на линейных членах, в то время как разложения $\mathscr{F}(x_+)$ и $\widetilde{\mathscr{F}}(x_-)$ ограничиваются нулевым порядком, потому что в (26.3.21) и (26.3.22) вклады всех высших членов содержат три или более множителей θ_L или θ_R и поэтому исчезают. По той же причине легко заметить, что любое суперполе, которое зависит только от θ_L и x_+^μ, но не зависит от θ_R, должно представляться в виде (26.3.21), а любое суперполе, которое зависит только от θ_R и x_-^μ, но не зависит от θ_L, должно принимать вид (26.3.22).

Видно, что ответ на вопрос, будет ли суперполе левокиральным или правокиральным, полностью определяется тем, от чего это суперполе может зависеть. Отсюда сразу следует, что *любая функция левокиральных суперполей (или правокиральных суперполей), не зависящая от им комплексно сопряженных суперполей или пространственно-временных производных, — это лево- (или право-) киральное суперполе.* Это может быть также показано более формальным способом. Так как функция $\Phi(x,\theta)$зависит от θ_R только через ее зависимость от x_+, а $\widetilde{\Phi}(x,\theta)$ зависит от θ_L только через ее зависимость от x_-, то они удовлетворяют условиям

$$\mathscr{D}_{R\alpha}\Phi = \mathscr{D}_{L\alpha}\Phi = 0, \tag{26.3.24}$$

где $\mathscr{D}_R$ и $\mathscr{D}_L$ — правая и левая части суперпроизводной(26.2.26):

$$\mathscr{D}_{R\alpha}\Phi \equiv \left[\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\mathscr{D}\right]_\alpha = -\sum_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_{R\beta}} - (\gamma^\mu\theta_L)_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{26.3.25}$$

$$\mathscr{D}_{L\alpha}\Phi \equiv \left[\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\mathscr{D}\right]_\alpha = +\sum_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_{L\beta}} - (\gamma^\mu\theta_R)_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{26.3.26}$$

для которой

$$\mathscr{D}_{R\alpha}x_+^\mu = \mathscr{D}_{L\alpha}x_-^\mu = 0.$$

Справедливы и обратные утверждения: если суперполе Φ удовлетворяет условию $\mathscr{D}_R\Phi = 0$, то оно левокирально, а если оно удовлетворяет условию $\mathscr{D}_L\Phi = 0$, то оно правокирально. Любая функция $f(\Phi)$ от суперполей Φ_n, каждое из которых удовлетворяет условиям $\mathscr{D}_R\Phi_n = 0$ или $\mathscr{D}_L\Phi_n = 0$, будет удовлетворять условиям $\mathscr{D}_R f(\Phi) = 0$ или $\mathscr{D}_L f(\Phi) = 0$ и будет, соответственно, левокиральной или правокиральной. Но функция левокиральных *и* правокиральных суперполей в общем случае вообще не киральна.

Использование представления (26.3.21) для левокиральных суперполей облегчает выявление их мультипликативных свойств. Например, если Φ_1 и Φ_2 — два левокиральных суперполя, их произведение $\Phi = \Phi_1\Phi_2$ — левокиральное суперполе с компонентами

$$\varphi = \varphi_1\varphi_2, \tag{26.3.27}$$

$$\psi_L = \varphi_1\psi_{2L} + \varphi_2\psi_{1L}, \tag{26.3.28}$$

$$\mathscr{F} = \varphi_1\mathscr{F}_2 + \varphi_2\mathscr{F}_1 - \left(\psi_{1L}^{\mathrm{T}}\varepsilon\psi_{2L}\right). \tag{26.3.29}$$

Присутствие в теории киральных суперполей открывает дополнительные возможности для построения суперсимметричных действий. Из закона преобразования (26.3.16) следует, что преобразование суперсимметрии изменяет $\mathscr{F}$-член левокирального суперполя Φ на производную, так что интеграл от $\mathscr{F}$-члена любого левокирального поля суперсимметричен. Следовательно, можно образовать суперсимметричное действие:

$$I = \int d^4x[f]_{\mathscr{F}} + \int d^4x[f]^*_{\mathscr{F}} + \frac{1}{2}\int d^4x[K]_D, \tag{26.3.30}$$

где f и K — соответственно любое левокиральное суперполе и произвольное действительное суперполе, образованные из элементарных суперполей.

От чего могут зависеть f и K? Функция f будет левокиральной, если она зависит от только от левокиральных элементарных суперполей Φ_n, но не зависит от им комплексно сопряженных правокиральных суперполей. С другой стороны, суперпроизводная кирального суперполя не киральна, значит мы не можем свободно включать суперпроизводные от Φ_n в f. Справедливо утверждение, что, действуя на суперполе S, которое не левокирально, (например, содержит суперполя, комплексно сопряженные левокиральным суперполям), пара правых суперпроизводных дает левокиральное суперполе, потому что существуют только две независимые правые суперпроизводные и они антикоммутируют:

$$\mathscr{D}_{R\alpha}(\mathscr{D}_{R\beta}\mathscr{D}_{R\gamma}S) = 0.$$

Однако построенный таким образом $\mathscr{F}$-член любой функции f вносит в действие такой же вклад, как D-член некоторого другого составного суперполя. Так как операторы $\mathscr{D}$ антикоммутируют, то наиболее общее киральное суперполе, образованное действием двух $\mathscr{D}_R$ на произвольное суперполе S, может быть выражено через $(\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R)S$. Если одно из левокиральных суперполей в суперпотенциале имеет такую форму, то, поскольку каждый оператор $\mathscr{D}_R$ аннигилирует все остальные суперполя в суперпотенциале, мы можем написать весь суперпотенциал в виде $f = (\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R)h$, где h — некоторое другое суперполе. Далее,

$$\left(\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R\right)\left(\theta_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_R\right) = -4,$$

следовательно, если не считать производных по пространственно-временным координатам, которые не дают вклада в действие, $(\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R)h$ представляет собой коэффициент при $-(\theta_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_R)/4$ в h. Однако, снова отвлекаясь от пространственно-временных производных, $[f]_F$ — это коэффициент при $\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L$ в f, так что $[(\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R)h]_{\mathscr{F}}$ равно коэффициенту при $-(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L)(\theta_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_R)/4 = -(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2/4$ в h и поэтому

$$\int d^4x\left[\left(\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R\right)h\right]_{\mathscr{F}} = 2\int d^4x[h]_D. \tag{26.3.31}$$

Таким образом, нет необходимости включать в f члены, которые зависят от левокиральных суперполей вида $\mathscr{D}_{R\beta}\mathscr{D}_{R\gamma}S$, — любой такой член будет включен в список всех возможных D-членов. Когда функция f выражается только через элементарные левокиральные суперполя и не зависит от суперпроизводных или пространственно-временных производных, ее называют *суперпотенциалом*.

Напротив, функция K в общем случае представляет собой действительную скалярную функцию как левокиральных суперполей Φ_n и им комплексно сопряженных Φ_n^*, так и их суперпроизводных и пространственно-временных производных, которая называется *келеровым потенциалом* или *потенциалом Келера*. (Любое правокиральное суперполе комплексно сопряжено левокиральному суперполю, поэтому предположение о том, что K зависит только от левокиральных суперполей и им комплексно сопряженных не приводит к потере общности.) Однако не все полученные таким образом функции K дают различающиеся действия. Заметим такую деталь: киральные суперполя не содержат D-членов, поэтому две функции K, отличающиеся на киральное суперполе, дают одинаковый вклад в действие.

Изменить форму K, не изменяя действие, можно также с помощью интегрирования по частям в суперпространстве. D-член суперпроизводной $\mathscr{D}_\alpha S$ от произвольного суперполя не дает вклада в действие, потому что

$$\int d^4x\,[\mathscr{D}_\alpha S]_D = 0. \tag{26.3.32}$$

Чтобы увидеть это, напомним, что

$$\mathscr{D}_\alpha S = \sum_\beta (\gamma_5\epsilon)_{\alpha\beta}\frac{\partial S}{\partial\theta_\beta} - (\gamma^\mu\theta)_\alpha\frac{\partial S}{\partial x^\mu}.$$

Так как S — полином не выше четвертого порядка по θ, первое слагаемое в $\mathscr{D}_\alpha S$ — полином по θ не выше третьего порядка и поэтому не может содержать ненулевой D-член, не являющийся производной. При этом второе слагаемое также представляет собой пространственно-временную производную, так что и его D-член — пространственно-временная производная. Поэтому ни первое, ни второе слагаемые $\mathscr{D}_\alpha S$ не могут давать вклад в интеграл (26.3.32). Кроме того, суперпроизводная действует дистрибутивно, поэтому из (26.3.32) следует, что в суперпространстве можно интегрировать по частям: для любых двух бозонных суперполей S_1 и S_2

$$\int d^4x[S_1\mathscr{D}_\alpha S_2]_D = -\int d^4x[S_2\mathscr{D}_\alpha S_1]_D. \tag{26.3.33}$$

В разделах 26.4 и 26.8 мы подробно рассмотрим случай, когда f и K зависят только от элементарных суперполей, но не зависят от их суперпроизводных или обычных производных.

В предыдущем разделе мы видели, что в теориях, в которых сохраняется четность, действие оператора пространственной инверсии на произвольное скалярное суперполе состоит в том, что его аргументы подвергаются преобразованиям $x_\mu \to (\Lambda_P)_\nu^\mu x^\nu$ и $\theta \to -i\beta\theta$ и, возможно, само суперполе умножается на фазовый множитель η. При этих преобразованиях происходит замена аргументов $x_\pm^\mu$ в формулах (26.3.21) и (26.3.22)

$$x_\pm^\mu \to (\Lambda_P x)^\mu \pm \frac{1}{2}\left(\bar{\theta}\beta\gamma_5\gamma^\mu\beta\theta\right) = (\Lambda_P x_\mp)^\mu, \tag{26.3.34}$$

причем $\theta_L \to -i\beta\theta_R$ и $\theta_R \to -i\beta\theta_L$. Таким образом, пространственная инверсия превращает левокиральные суперполя в правокиральные и наоборот. Единственное правое скалярное суперполе, компонентные поля которого содержат операторы рождения и уничтожения некоторых частиц, рождаемых и уничтожаемых левым скалярным суперполем Φ, это $\widetilde{\Phi} \propto \Phi^*$, поэтому $\mathsf{P}^{-1}\Phi\mathsf{P}$ должно быть пропорционально Φ^*. Подходящим выбором фазы Φ можно привести этот закон преобразования к виду

$$\mathsf{P}^{-1}\Phi(x,\theta)\mathsf{P} = \Phi^*(\Lambda_P x, -i\beta\theta). \tag{26.3.35}$$

Для компонентных полей отсюда следует

$$\begin{aligned} \mathsf{P}^{-1}\varphi(x)\mathsf{P} &= \varphi^*(\Lambda_P x), \\ \mathsf{P}^{-1}\psi_L(x)\mathsf{P} &= -i\varepsilon\gamma_5\beta\psi_L^*(\Lambda_P x), \\ \mathsf{P}^{-1}\mathscr{F}(x)\mathsf{P} &= \mathscr{F}^*(\Lambda_P x). \end{aligned} \tag{26.3.36}$$

Имеется еще один тип допустимой симметрии, известной как *R-симметрия*. Она важна в некоторых моделях спонтанного нарушения суперсимметрии, обсуждаемых в разделе 26.5, и будет использоваться при доказательстве теорем об обсутствии перенормировки в разделе 27.6. Как отмечено в разделе 25.2, в теориях простой $N = 1$ суперсимметрии R-симметрия — это инвариантность относительно $U(1)$ преобразований, при которых левые компоненты генератора суперсимметрии (обозначенного Q_a в разделе 25.2) несут не равное нулю квантовое число, скажем, равное -1. В этом случае сопряженные им правые компоненты генератора суперсимметрии несут противоположное квантовое число $+1$. Проверка соотношения (26.2.1) показывает, что θ-координата суперпространства имеет относительно преобразований R-симметрии нетривиальные трансформационные свойства: θ_L несет квантовое число $R = +1$, а θ_R, пропорциональное θ_L^*, несет квантовое число $R = -1$. Кроме того, всему суперполю можно приписать квантовое число R. Если мы припишем левокиральному суперполю Φ квантовое число R_Φ, то его скалярная компонента φ будет иметь такое же R-квантовое число, в то время как левая спинорная компонента ψ_L имеет $R_\psi = R_\Phi - 1$, а внешнее поле $\mathscr{F}$ имеет $R_{\mathscr{F}} = R_\Phi - 2$. В частности, чтобы член с суперпотенциалом $\int d^4x[f]_{\mathscr{F}}$ сохранял R, сам суперпотенциал должен иметь $R_f = +2$, так что если f зависит от единственного левокирального суперполя, то он должен быть пропорционален Φ^{2/R_Φ}. Другими словами, если $f(\Phi)$ — чисто массовый член, пропорциональный Φ^2, мы должны выбрать $R_\Phi = +1$, а если $f(\Phi)$ — член взаимодействия, пропорциональный Φ^3, мы обязаны выбрать $R_\Phi = 2/3$. С другой стороны, проверка с помощью выражения (26.2.10) показывает, что D-член суперполя обладает таким же значением R, как само суперполе, и для того, чтобы слагаемое $\int d^4x[g]_D$ в действии сохраняло R, необходимо только, чтобы келеров потенциал K имел $R = 0$. Это будет так, если каждое слагаемое K содержит равное число множителей Φ и Φ^*, какое бы значение R мы ни приписали Φ. Разумеется, не существует общей причины, по которой действие не *должно* быть R-симметричным или по которой эта симметрия не должна быть спонтанно нарушенной.

* * *

Существуют другие способы наложения связей на суперполя, приводящие к другим типам супермультиплетов полей. К наиболее простым относятся *линейные* суперполя. Чтобы сделать понятными условия, определяющие суперполе такого вида, заметим, что из суперполя S общего вида можно образовать киральное суперполе

$$S' \equiv \frac{1}{4}\left(\overline{\mathscr{D}}\mathscr{D}\right)S. \tag{26.3.37}$$

Это действительно киральное суперполе, потому что оно может быть записано в виде суммы правокирального слагаемого $\frac{1}{4}(\bar{\mathscr{D}}_L\mathscr{D})S$ и левокирального слагаемого $\frac{1}{4}(\bar{\mathscr{D}}_R\mathscr{D}_R)S$. Его компоненты выражаются через компоненты S:

$$C' = N, \tag{26.3.38}$$

$$\omega' = \lambda + \not{\partial}\omega, \tag{26.3.39}$$

$$M' = -\partial_\mu V^\mu, \tag{26.3.40}$$

$$N' = D + \Box C, \tag{26.3.41}$$

$$V'_\mu = -\partial_\mu M, \tag{26.3.42}$$

$$\lambda' = D' = 0. \tag{26.3.43}$$

Мультиплет S называется *линейным*, если определенное таким образом суперполе S' обращается в нуль:

$$\left(\overline{\mathscr{D}}\mathscr{D}\right)S = 0, \tag{26.3.44}$$

или в записи через его компоненты

$$N = M = \partial_\mu V^\mu = 0, \quad \lambda = -\not{\partial}\omega, \quad D = -\Box C. \qquad (26.3.45)$$

В результате остаются четыре независимых бозонных поля C и три компоненты поля V_μ, подчиненного условию $\partial_\mu V^\mu = 0$, а также четыре независимых фермионых поля — компоненты майорановского четырехкомпонентного спинора ω. В разделе 26.6 мы увидим, что суперполя токов, V_μ-члены которых представляют собой сохраняющиеся токи, связанные с преобразованиями симметрии, являются линейными суперполями.

26.4. Перенормируемые теории киральных суперполей

Рассмотрим теперь детали устройства произвольной перенормируемой теории скалярных киральных суперполей. Это прольет некоторый свет на применения суперсимметрии, а теория, которую мы получим, станет частью суперсимметричной стандартной модели, которая будет обсуждаться в главе 28.

Как обсуждалось в разделе 12.2, лагранжиан перенормируемой теории может содержать только операторы размерности четыре или меньше (полагая $\hbar = c = 1$ и подсчитывая степени энергии и импульса). Из (26.2.6) следует, что $\mathcal{Q}_\alpha$ и следовательно $\partial/\partial\theta_\alpha$ имеют размерность 1/2, тогда $\mathcal{D}_\alpha$ имеет размерность $+1/2$, а θ_α — размерность $-1/2$. $\mathcal{F}$- и D-члены суперполя S — это коэффициенты, соответственно, при двух и четырех множителях θ, поэтому, если суперполе имеет размерность $d(S)$, то его $\mathcal{F}$- и D-члены имеют размерности $d(\mathcal{F}^S) = d(S) + 1$ и $d(D^S) = d(S) + 2$. Таким образом, в перенормируемой теории функции f и K в соотношении (26.3.30) состоят из операторов размерности не больше чем три или два соответственно.

Размерность элементарного скалярного суперполя Φ_n совпадает с размерностью элементарного скалярного поля, т. е. равна $+1$ и, для того чтобы каждое слагаемое в функции f имело размерность три или меньше, оно может содержать самое большее три множителя Φ_n и(или) производных $\partial/\partial x^\mu$ и(или) пар спинорных суперпроизводных $\mathcal{D}_\alpha$. Как обсуждалось в предыдущем разделе, любое левокиральное слагаемое в f, содержащее суперпроизводные, может быть заменено на слагаемое в K, поэтому суперпроизводные в f могут быть опущены. Из формулы (26.2.30) следует, что пространственно-временные производные могут быть выражены через суперпроизводные, так что и они тоже могут быть опущены. (В любом случае, лоренц-инвариантность исключила бы члены с одной пространственно-временной производной, а члены с двумя производными в перенормируемой теории могут включать только один множитель Φ_n, на который эти производные должны были бы действовать, поэтому такие члены не давали бы вклада в действие.) Мы заключаем, что $f(\Phi)$ — не более, чем кубический полином по Φ_n, не содержащий пространственно-временных производных или суперпроизводных.

Тот же размерный анализ показывает, что в перенормируемой теории K представляет собой самое большее квадратичную функцию Φ_n и Φ_n^* без производных. Но любой член в $K(\Phi,\Phi^*)$, включающий только Φ_n или только Φ_n^*, был бы киральным суперполем, а киральные суперполя, по определению, не имеют D-членов, поэтому вклады в $[K(\Phi,\Phi^*)]_D$ дают только те слагаемые $K(\Phi,\Phi^*)$, которые включают *одновременно* Φ_n и Φ_n^*. Следовательно функция $K(\Phi,\Phi^*)$ должна иметь вид

$$K(\Phi,\Phi^*) = \sum_{mn} g_{nm}\Phi_n^*\Phi_m, \tag{26.4.1}$$

с постоянными коэффициентами g_{nm}, образующими эрмитову матрицу.

Теперь мы должны вычислить $\mathscr{F}$- и D-компоненты $f(\Phi)$ и $K(\Phi,\Phi^*)$ соответственно. Чтобы вычислить D-компоненту $K(\Phi,\Phi^*)$, заметим, что член четвертого порядка по θ в $\Phi_n^*\Phi_m$ равен

$$\begin{aligned}
[\Phi_n^*\Phi_m]_{\theta^4} = &-\frac{1}{8}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2\left[\varphi_n^*\Box\varphi_m + (\Box\varphi_m^*)\,\varphi_n\right] \\
&+ \left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)\left[\left(\overline{\psi_n}\theta\right)\left(\bar\theta\gamma^\mu\partial_\mu\psi_m\right) + \left(\left(\partial_\mu\overline{\psi_n}\right)\gamma^\mu\theta\right)\left(\bar\theta\psi_m\right)\right] \\
&+ \frac{1}{4}\mathscr{F}_n^*\mathscr{F}_m\left(\bar\theta(1-\gamma_5)\theta\right)\left(\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\right) \\
&- \frac{1}{4}\partial^\mu\varphi_n^*\partial^\nu\varphi_m\left(\bar\theta\gamma_5\gamma_\mu\theta\right)\left(\bar\theta\gamma_5\gamma_\nu\theta\right).
\end{aligned}$$

С помощью формул (26.A18) и (26.A.19) можно выделить зависимость от θ этого выражения в общий множитель $(\bar\theta\gamma_5\theta)^2$:

$$\begin{aligned}
[\Phi_n^*\Phi_m]_{\theta^4} = &-\frac{1}{4}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2\left[\frac{1}{2}\varphi_n^*\Box\varphi_m + \frac{1}{2}(\Box\varphi_m^*)\,\varphi_n - \left(\overline{\psi_n}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_m\right)\right. \\
&\left. + \left(\left(\partial_\mu\overline{\psi_m}\right)\gamma^\mu\psi_m\right) + 2\mathscr{F}_n^*\mathscr{F} - \partial^\mu\varphi_n^*\partial_\mu\varphi_m\right].
\end{aligned}$$

D-член суперполя равен коэффициенту при $-\frac{1}{4}(\bar\theta\gamma_5\theta)$ минус оператор $\frac{1}{2}\Box$, действующий на не зависящий от θ член, который в случае $\Phi_n^*\Phi_m$ равен $\varphi_n^*\varphi_m$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[K(\Phi,\Phi^*)]_D = \sum_{nm} g_{nm}&\left[-\partial_\mu\varphi_n^*\partial^\mu\varphi_m + \mathscr{F}_n^*\mathscr{F}_m\right. \\
&\left. -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi_{nL}}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{mL}\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\left(\overline{\psi_{nL}}\right)\gamma^\mu\psi_{nL}\right)\right].
\end{aligned} \tag{26.4.2}$$

Если записать Φ_n в виде линейной комбинации $\sum_m N_{nm}\Phi'_m$ новых суперполей Φ'_m, то $K(\Phi,\Phi^*)$ выражается через новые суперполя формулой, которая совпадает с (26.4.1), за исключением того, что g_{nm} заменяется на $g'_{nm} = (N^\dagger g N)_{nm}$. Чтобы кинематические члены скалярных и спинорных полей имели знаки, совместимые с квантовыми коммутационными и антикоммутационными соотношениями, необходимо, чтобы эрмитова матрица g_{nm} была положительно определена. Как показано в разделе 12.5, это означает, что мы можем выбрать N так, чтобы $g'_{nm} = \delta_{nm}$. Опустив штрихи, получим член (26.4.2) в виде

$$\frac{1}{2}[K(\Phi,\Phi^*)]_D = \sum_m \Big[-\partial_\mu\varphi_n^*\partial^\mu\varphi_n + \mathscr{F}_n^*\mathscr{F}_n \\ -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi_{nL}}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{nL}\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\left(\overline{\psi_{nL}}\right)\gamma^\mu\psi_{nL}\right)\Big]. \tag{26.4.3}$$

Мы по-прежнему можем применять унитарное преобразование для переопределения суперполей без изменения формы соотношения (26.4.3), и эту свободу нам вскоре придется использовать.

Слагаемые (26.4.3), содержащие φ_n и ψ_{nL} — это правильные кинематические лагранжианы для обычным образом нормированных комплексного скалярного и майорановского спинорного полей. После того, как появится возможность учесть массовые члены, мы перепишем фермионные слагаемые в более привычной форме .

Чтобы вычислить $\mathscr{F}$-член суперпотенциала $f(\Phi)$, удобнее всего использовать представление суперполей в форме (26.3.21) и выделить слагаемое второго порядка по θ_L:

$$[f(\Phi(x,\theta))]_{\theta_L^2} = \sum_{nm}\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\psi_{nL}(x)\right)\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\psi_{mL}(x)\right)\frac{\partial^2 f(\varphi(x))}{\partial\varphi_n(x)\partial\varphi_m(x)} \\ +\sum_n \mathscr{F}_n(x)\frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial\varphi_n(x)}\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L\right).$$

(Мы заменили здесь x_+ на x, потому что в выражении (26.3.21) член $(\theta_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\gamma^\mu\theta_L)$ исчезает при умножении на выражение с двумя множителями θ_L.) Зависимость первого члена в правой части от θ можно привести к стандартной форме, если с помощью формулы (26.A.11) записать*

$$\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\psi_{nL}\right)\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\psi_{mL}\right) = \left(\psi_{nL}^{\mathrm{T}}\varepsilon\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\theta\right)\left(\theta^{\mathrm{T}}\varepsilon\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi_{mL}\right) \\ = -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}_{nL}\psi_{mL}\right)\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L\right).$$

*Заметим, что $\overline{\psi}_{nL}$ это левая компонента $\overline{\psi}_n$, а не $\overline{\psi_{nL}}$.

$\mathscr{F}$-член любого левокирального суперполя — это коэффициент при $(\theta_L^{\mathrm{T}}\epsilon\theta_L)$, а здесь

$$[f(\Phi)]_{\mathscr{F}} = -\frac{1}{2}\sum_{nm}\frac{\partial^2 f(\varphi_n)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\left(\overline{\psi_{nL}}\psi_{mL}\right) + \sum_n \mathscr{F}_n\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}. \tag{26.4.4}$$

Полный лагранжиан является суммой членов (26.4.3), (26.4.4) и члена, комплексно сопряженного (26.4.4):

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \sum_n \Big[& -\partial_\mu\varphi_n^*\partial^\mu\varphi_n + \mathscr{F}_n^*\mathscr{F}_n \\ & -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi_{nL}}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{nL}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\partial_\mu\overline{\psi_{nL}}\right)\gamma^\mu\psi_{nL}\right)\Big] \\ & -\frac{1}{2}\sum_{nm}\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\left(\overline{\psi_{nL}}\psi_{mL}\right) - \frac{1}{2}\sum_{nm}\left(\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\right)^*\left(\overline{\psi_{nL}}\psi_{mL}\right)^* \\ & +\sum_n \mathscr{F}_n\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n} + \sum_n \mathscr{F}_n^*\left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right)^*. \end{aligned} \tag{26.4.5}$$

Вспомогательные поля $\mathscr{F}_n$ входят в действие квадратично с постоянными коэффициентами при членах второго порядка, поэтому они могут быть исключены, если приравнять $\mathscr{F}_n$ его значению, при котором лагранжиан (26.4.5) стационарен относительно $\mathscr{F}_n$ и $\mathscr{F}_n^*$:

$$\mathscr{F}_n = -\left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right)^*. \tag{26.4.6}$$

Подставив это в формулу (26.4.5), получим

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \sum_n \Big[& -\partial_\mu\varphi_n^*\partial^\mu\varphi_n - \frac{1}{2}\left(\overline{\psi_{nL}}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{nL}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\partial_\mu\overline{\psi_{nL}}\right)\gamma^\mu\psi_{nL}\right)\Big] \\ & -\frac{1}{2}\sum_{nm}\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\left(\overline{\psi_{nL}}\psi_{mL}\right) - \frac{1}{2}\sum_{nm}\left(\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\right)^*\left(\overline{\psi_{nL}}\psi_{mL}\right)^* \\ & -\sum_n\left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right)^*\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}. \end{aligned} \tag{26.4.7}$$

Таким образом, потенциал скалярного поля равен $V(\varphi) = \sum_n |\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n|^2$.

После исключения таким способом вспомогательных полей, действие больше не будет инвариантно относительно преобразований суперсимметрии (26.3.15), (26.3.17), действующих на оставшиеся поля ψ_{nL} и φ_n:

$$\delta\psi_{nL} = \sqrt{2}\partial_\mu\varphi_n\gamma^\mu\alpha_R - \sqrt{2}\left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right)^*\alpha_L, \quad \delta\varphi_n = \sqrt{2}\left(\overline{\alpha_R}\psi_{nL}\right).$$

Это происходит потому, что выражение (26.4.6) не удовлетворяет закону преобразования $\mathscr{F}_n$, заданному соотношением (26.3.16): $\delta\mathscr{F}_n = \sqrt{2}(\bar{\alpha}_L \not{\partial}\psi_{nL})$. Вместо этого

$$\delta\left(-\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right)^* = -\sum_m \left(\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\right)^* \delta\varphi_m^* = -\sqrt{2}\sum_m \left(\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\right)^* (\overline{\alpha_L}\psi_{mR}).$$

По той же причине после исключения вспомогательных полей коммутаторы преобразований суперсимметрии, которым подвергаются φ_n и ψ_{nL}, больше не будут определяться антикоммутационными соотношениями суперсимметрии, и в действительности не образуют замкнутую супералгебру Ли. Однако это не означает несовместимость с существованием квантово-механических операторов Q_α, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям суперсимметрии. Эти операторы генерируют преобразования суперсимметрии в том смысле, что коммутатор оператора $-i(\bar{\alpha}Q)$ с любым гейзенберговским квантовым полем φ_n или ψ_{nL} равен изменению этого поля при суперсимметричном преобразовании с инфинитезимальным параметром α. Для $\mathscr{F}_n$, определяемого выражением (26.4.6), коммутатор $-i(\bar{\alpha}Q)$ с $\mathscr{F}_n$ равен $\delta\mathscr{F} = \sqrt{2}(\bar{\alpha}_L \not{\partial}\psi_{nL})$, потому что в представлении Гейзенберга квантовое поле ψ_{nL} удовлетворяет полевому уравнению, полученному из лагранжиана (26.4.7):

$$\not{\partial}\psi_{nL} = -\sum_m \left(\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\right)^* \psi_{mR}.$$

Аналогично, при учете полевых уравнений преобразования суперсимметрии квантовых полей φ_n и ψ_{nL} действительно образуют замкнутую супералгебру Ли. Такие алгебры часто называют *алгебрами на массовой поверхности*. Средние значения φ_{n0} скалярных полей φ_n нулевого порядка должны достигаться в максимуме последнего члена в (26.4.7). Так как этот член всегда отрицателен или равен нулю, максимум достигается при тех не зависящих от пространственно-временной точки значениях поля φ_{n0}, при которых этот член исчезает

$$\left.\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \tag{26.4.8}$$

разумеется при условии, что решение этого уравнения существует. Уравнение (26.4.8) не только максимизирует последний член в (26.4.7), оно служит также условием того, что суперсимметрия не нарушена. Инвариантность вакуума относительно преобразований суперсимметрии требует, чтобы среднее по вакууму от изменения любого поля при преобразованиях суперсимметрии исчезало. Изменение бозонного поля — это фермионное поле, которое, конечно, имеет нулевое среднее значение во всех случаях, но из (26.3.15) следует, что вакуумное среднее значение $\delta\psi_{nL}$ пропорционально вакуумному среднему значению вспомогательного поля $\mathscr{F}_n$, которое поэтому должно исчезать, если суперсимметрия не нарушена. Согласно (26.4.6), в нулевом порядке теории возмущений это условие требует, чтобы выполнялось соотношение (26.4.8). В разделе 27.6 мы увидим, что если это так, то суперсимметрия не нарушена во всех порядках теории возмущений.

Для одного левокирального скалярного суперполя Φ основная теорема алгебры утверждает, что полином $\partial f(\varphi)/\partial\varphi$ всегда имеет хотя бы один нуль где-нибудь на комплексной плоскости. В случае больше одного суперполя это не обязательно справедливо. Если *предположить*, что решение φ_{n0} уравнения (26.4.8) существует, можно вычислить физические степени свободы теории, положив

$$\varphi_n = \varphi_{n0} + \varphi_n, \tag{26.4.9}$$

и разложив по степеням φ_n. Массы частиц в этой теории могут быть вычислены из рассмотрения членов второго порядка по φ и ψ:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0 = \sum_n \Big[&-\partial_\mu\varphi_n^* - \frac{1}{2}\left(\overline{\psi_{nL}}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{nL}\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\left(\overline{\psi_{nL}}\right)\gamma^\mu\psi_{nL}\right)\Big] \\ &- \frac{1}{2}\sum_{nm}\mathscr{M}_{nm}\left(\overline{\psi}_{nL}\psi_{mL}\right) - \frac{1}{2}\sum_{nm}\mathscr{M}^*_{nm}\left(\overline{\psi}_{nL}\psi_{mL}\right)^* \\ &- \sum_{nm}\left(\mathscr{M}^\dagger\mathscr{M}\right)\varphi_m^*\varphi_n,\end{aligned} \tag{26.4.10}$$

где $\mathscr{M}$ — симметричная комплексная матрица

$$\mathscr{M}_{nm} \equiv \left(\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_m\partial\varphi_m}\right)_{\varphi=\varphi_0}. \tag{26.4.11}$$

Если теперь переопределить поля с помощью унитарного преобразования

$$\varphi_n = \sum_n \mathscr{U}_{nm}\varphi'_m, \quad \psi_{nL} = \sum_m \mathscr{U}_{nm}\psi'_{mL}, \tag{26.4.12}$$

то лагранжиан свободного поля (26.4.10) примет тот же вид, но с заменой $\mathscr{M}$ на $\mathscr{M}'$, где

$$\mathscr{M}' = \mathscr{U}^{\mathrm{T}}\mathscr{M}\mathscr{U}. \tag{26.4.13}$$

Согласно теореме матричной алгебры, для любой комплексной симметричной матрицы $\mathscr{M}$ всегда можно найти унитарную матрицу $\mathscr{U}$ такую, что матрица $\mathscr{M}'$, определенная формулой (26.4.13), диагональна, и на диагонали стоят действительные положительные элементы m_n. (Для дальнейшего заметим, что $\mathscr{M}'^\dagger\mathscr{M}' = \mathscr{U}^\dagger\mathscr{M}^\dagger\mathscr{M}\mathscr{U}$, поэтому величины m_n^2 — просто собственные значения положительной эрмитовой матрицы $\mathcal{M}^\dagger\mathcal{M}$). Переопределив поля таким образом и опустив штрихи, получим квадратичную часть лагранжиана

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 = &\sum_n \left[-\partial_\mu \varphi_n^* - \frac{1}{2}\left(\overline{\psi_{nL}}\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{nL}\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\left(\overline{\psi_{nL}}\right)\gamma^\mu \psi_{nL}\right)\right] \\ &-\frac{1}{2}\sum_n m_n \left(\overline{\psi}_{nL}\psi_{mL}\right) - \frac{1}{2}\sum_n m_n^* \left(\overline{\psi}_{nL}\psi_{mL}\right)^* \\ &-\sum_n m_n^2 \varphi_n^* \varphi_n.\end{aligned} \tag{26.4.14}$$

Чтобы привести фермионные массовые члены к более привычной форме, введем поля $\psi_n(x)$, определяемые как *майорановские* поля, левыми компонентами которых являются ψ_{nL}. Затем используем свойства симметрии (26.A.7) майорановских билинейных комбинаций:

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\left(\overline{\psi_{nL}}\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{nL}\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\left(\overline{\psi_{nL}}\right)\gamma^\mu \psi_{nL}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi_n}\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\partial_\mu\psi_n\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\left(\overline{\psi_n}\right)\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi_n\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi_n}\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\partial_\mu\psi_n\right) - \frac{1}{2}\left(\overline{\psi_n}\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\partial_\mu\psi_n\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi_n}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_n\right).\end{aligned}$$

Свойства действительности (26.A.21) дают

$$\left(\overline{\psi}_{nL}\psi_{nL}\right) + \left(\overline{\psi}_{nL}\psi_{mL}\right)^* = 2\mathrm{Re}\left(\overline{\psi_n}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi_n\right) = \left(\overline{\psi_n}\psi_n\right).$$

Тогда полный квадратичный лагранжиан равен

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 = \sum_n \Bigg[&-\partial_\mu \varphi_n^* \partial^\mu \varphi_n - \sum_n m_n^2 \varphi_n^* \varphi_n \\ &-\frac{1}{2}\left(\overline{\psi_n}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_n\right) - \frac{m_n}{2}\left(\overline{\psi_n}\psi_n\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{26.4.15}$$

Множитель 1/2 в фермионных слагаемых верен, потому что это майорановские фермионные поля, в то же время скалярные слагаемые не имеют множителя 1/2, потому что это комплексные скаляры. Видно, что бесспиновые частицы и частицы спина 1/2 имеют равные массы m_n, как того требует ненарушенная суперсимметрия теории.

Часть $\mathscr{L}'$ лагранжиана, отвечающая за взаимодействие, дается слагаемыми в (26.4.7) степени выше второй относительно φ_n и ψ_n. Так как предполагается, что суперпотенциал — кубический полином, стационарный при $\varphi_n = 0$, а φ_n определены так, что члены второго порядка имеют вид $\frac{1}{2}\sum_n m_n \varphi_n^2$, можно записать суперпотенциал (без учета несущественного постоянного слагаемого) в виде

$$f(\varphi_0+\varphi) = \frac{1}{2}\sum_n m_n\varphi_n^2 + \frac{1}{6}\sum_{nm\ell} f_{nm\ell}\varphi_n\varphi_m\varphi_\ell. \tag{26.4.16}$$

Подстановка этого выражения в формулу (26.4.7) дает лагранжиан взаимодействия

$$\begin{aligned}\mathscr{L}' = &-\frac{1}{2}\sum_{nm\ell} f_{nm\ell}\varphi_n\left(\overline{\psi_m}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi_\ell\right) - \frac{1}{2}\sum_{nm\ell} f^*_{nm\ell}\varphi^*_n\left(\overline{\psi_m}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi_\ell\right)\\ &-\frac{1}{2}\sum_{nm\ell} m_n f_{nm\ell}\varphi^*_n\varphi_m\varphi_\ell - \frac{1}{2}\sum_{nm\ell} m_n f^*_{nm\ell}\varphi_n\varphi^*_m\varphi^*_\ell\\ &-\frac{1}{4}\sum_{nm\ell m'\ell'} f_{nm\ell}f^*_{nm'\ell'}\varphi_m\varphi_\ell\varphi^*_{m'}\varphi^*_{\ell'}.\end{aligned} \tag{26.4.17}$$

Видно, что для определения всех кубичных и четвертичных членов самодействия бесспиновых полей достаточно знания масс m_n и «юкавских» констант f_{nml} скаляров и фермионов.

В качестве иллюстрации рассмотрим случай одного левокирального суперполя. Для сравнения с предыдущими результатами запишем единственный коэффициент f в формуле (26.4.16) в виде

$$f \equiv 2\sqrt{2}e^{i\alpha}\lambda, \tag{26.4.18}$$

где λ действительна, а α — некоторая действительная фаза. Введем также пару действительных полей $A(x)$ и $B(x)$, записав единственный комплексный скаляр в виде

$$\varphi \equiv e^{-i\alpha}\left(\frac{A+iB}{\sqrt{2}}\right). \tag{26.4.19}$$

Тогда полный лагранжиан, который дается суммой (26.4.15) и (26.4.17), будет иметь вид

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{2}\partial_\mu A\partial^\mu A - \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B - \frac{1}{2}m^2(A^2+B^2)\\ &-\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right) - \frac{1}{2}m\left(\overline{\psi}\psi\right)\\ &-\lambda A\left(\overline{\psi}\psi\right) - i\lambda B\left(\overline{\psi}\gamma_5\psi\right)\\ &-m\lambda A(A^2+B^2) - \frac{1}{2}\lambda^2(A^2+B^2)^2.\end{aligned} \tag{26.4.20}$$

Это совпадает с лагранжианом (24.2.9), впервые найденным Вессом и Зумино [2]. Заслуживает внимания то, что в этом простом случае лагранжиан оказывается инвариантным относительно преобразования пространственной инверсии

$$A(x) \to A(\Lambda_P x), \quad B(x) \to -B(\Lambda_P x), \quad \psi(x) \to i\beta\psi(\Lambda_P x), \tag{26.4.21}$$

хотя при его выводе мы не предполагали сохранения четности. Появление сохранения четности как «случайной» симметрии — известное свойство различных перенормируемых калибровочных теорий (см. разделы 12.5 и 18.7), но не теорий, содержащих бесспиновые поля, так что это особое следствие суперсимметрии в перенормируемой теории одного скалярного суперполя.

26.5. Спонтанное нарушение суперсимметрии в древесном приближении

В предыдущем разделе мы увидели, что (по крайней мере в древесном приближении) в перенормируемых теориях киральных суперполей суперсимметрия не нарушена, если уравнение (26.4.8) имеет решение, т. е., если имеется такое значение полей φ_0, при котором суперпотенциал стационарен:

$$\left.\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n}\right|_{\varphi=\varphi_0} = 0. \tag{26.5.1}$$

Количество независимых переменных равно здесь количеству уравнений, которым необходимо удовлетворить, поэтому в общем случае можно ожидать, что у уравнения (26.5.1) должны быть решения. Чтобы суперсимметрия в этих теориях была спонтанно нарушена, необходимо наложить ограничения на форму суперпотенциала.

Чтобы увидеть, как выбор суперпотенциала может позволить спонтанное нарушение суперсимметрии, рассмотрим обобщение класса моделей, предложенных О'Райферти [3]. Предположим, что суперпотенциал — это линейная комбинация набора Y_i левокиральных суперполей, коэффициенты которой представляют собой функции $f_i(x)$ другого набора левокиральных суперполей X_n:

$$f(X,Y) = \sum_i Y_i f_i(X). \tag{26.5.2}$$

Чтобы суперсимметрия оставалась не нарушенной значениями x_n и y_i скалярных компонент этих суперполей, должны выполняться следующие условия:

$$0 = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y_i} = f_i(x), \tag{26.5.3}$$

$$0 = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_n} = \sum_i y_i \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n}. \tag{26.5.4}$$

Уравнения (26.5.4) всегда можно решить, положив $y_i = 0$, причем это не влияет на решение уравнения (26.5.3). С другой стороны, если число суперполей X_n меньше числа суперполей Y_i, то уравнение (26.5.3) накладывает на x_n больше условий, чем имеется переменных, поэтому решить это уравнение без тонкой настройки невозможно, и суперсимметрия нарушена.

Может показаться, что первоначальное предположение (26.5.2) само представляет собой радикальную форму тонкой настройки, но в действительности это условие на суперпотенциал может быть наложено, если предположить существование соответствующей R-симметрии. Как обсуждалось в разделе 26.3, в теориях с $N = 1$ суперсимметрией R-симметрия — это $U(1)$-симметрия, при которой координата θ суперпространства имеет нетривиальное трансформационное свойство. Если мы предположим существование R-симметрии, при которой θ_L обладает квантовым числом $+1$, то $\mathscr{F}$-член любого суперпотенциала имеет квантовое число, равное квантовому числу самого суперпотенциала минус 2, и тогда R-инвариантность требует, чтобы сам суперпотенциал имел $R = 2$. Поэтому мы можем, изложив требования R-инвариантности, получить выражение вида (26.5.2), присвоив суперполям Y_i и x_n квантовые числа R, равные соответственно, +2 и 0.

Потенциал скалярных полей в модели такого рода равен

$$V(x,y) = \sum_i |f_i(x)|^2 + \sum_n \left| \sum_i y_i \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \right|^2. \tag{26.5.5}$$

Потенциал всегда минимизируется выбором таких x_n, которые минимизируют первое слагаемое. Какие бы значения при этом ни получались для x_n, второй член всегда можно минимизировать, положив $y_i = 0$. Независимо от того, можно или нельзя спонтанно нарушить суперсимметрию, эти модели имеют необычное свойство: в пространстве полей всегда есть направления, в которых минимум потенциала является плоским. Какие бы значения x_{n0} координат x_n ни минимизировали первое слагаемое (26.5.5), второе слагаемое исчезает не только при $y_i = 0$, но также для любого вектора y_i в направлении, ортогональном всем векторам $(v^n)_i = (\partial f_i(x)/\partial x_n)_{x=x_0}$. Если имеется N_X суперполей X_n и N_Y суперполей Y_i и $N_Y > N_X$, то вектор v^n не может пробегать все пространство значений y, и будет по крайней мере $N_Y - N_X$ этих плоских направлений. Для любых неисчезающих значений $y_i = y_{0i}$ вдоль любого из этих плоских направлений R-симметрия лагранжиана спонтанно нарушена и поле φ голдстоуновского бозона, связанное с этим глобальным нарушением симмметрии, соответствует члену φy_{0i} в y_i.

Простейший пример такого класса моделей представляет случай, когда имеется только одно суперполе X и два суперполя Y. Перенормируемость требует, чтобы коэффициентные функции $f_i(X)$ были квадратичными функциями X. Выбрав подходящую линейную комбинацию Y_i, сдвинув и изменив масштаб X, можно выбрать эти функции так, чтобы

$$f_1(X) = X - a, \quad f_2(X) = X^2, \tag{26.5.6}$$

с произвольной постоянной a. Ясно, что не существует одновременного решения двух уравнений (26.5.1), если только не проведена тонкая настройка суперпотенциала, так что $a = 0$. Потенциал (26.5.5) в данном случае равен

$$V(x,y) = |x|^4 + |x-a|^2 + |y_1 + 2xy_2|^2. \tag{26.5.7}$$

Сумма первых двух членов имеет единственный глобальный минимум x_0. Плоским направлением здесь служит то, для которого $y_1 + 2x_0y_2 = 0$. При $a = 0$ имеем $x_0 = 0$, и минимумы потенциала расположены вдоль линии $y_1 = 0$, а значения y_2 произвольны.

Независимо от причины спонтанного нарушения суперсимметрии это явление всегда влечет за собой существование безмассовой частицы со спином 1/2, *голдстино*, аналогичной голдстоуновским бозонам, связанным со спонтанным нарушением обычных глобальных симметрий. (Одно исключение, обсуждаемое в разделе 31.3, имеется в теориях супергравитации, где суперсимметрия локальна, а голдстино представляет собой состояния со спиральностью $\pm 1/2$ массивной частицы спина 3/2 — гравитино.) В перенормируемых теориях киральных суперполей вакуумное среднее значение скалярных полей φ_{n0} в древесном приближении должно соответствовать минимуму потенциала $\sum_n |\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n|^2$ в (26.4.7), т. е.

$$\sum_m \mathcal{M}_{nm} \left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_m}\bigg|_{\varphi=\varphi_0} \right)^* = 0, \tag{26.5.8}$$

где

$$\mathcal{M}_{nM} \equiv \frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n \partial\varphi_m}\bigg|_{\varphi=\varphi_0}. \tag{26.5.9}$$

Если (26.5.1) не выполняется, то из уравнения (26.5.8) следует, что матрица $\mathcal{M}_{nm}$ имеет хотя бы один собственный вектор с нулевым собственным значением, поэтому согласно (26.4.10) должна быть хотя бы одна линейная комбинация частиц спина 1/2, описываемая волновой функцией ψ_n и обладающая нулевой массой. Например для модели, определяемой условиями (26.5.2) и (26.5.6), матрица $\mathcal{M}$ имеет следующие неисчезающие компоненты

$$\mathcal{M}_{xy_1} = \mathcal{M}_{y_1x} = 1, \quad \mathcal{M}_{xy_2} = \mathcal{M}_{y_2x} = 2x_0, \tag{26.5.10}$$

поэтому эта матрица имеет собственные значения $\pm 2x_0$ и 0, причем последнее из них соответствует моде голдстино. В главе 29 мы, не обращаясь к теории возмущений, покажем, что спонтанное нарушение суперсимметрии требует существования голдстино, и исследуем их общие свойства.

26.6. Интегралы в суперпространстве, полевые уравнения и суперполе тока

$\mathcal{F}$-члены и D-члены, из которых мы построили лагранжиан, могут быть представлены в виде интегралов по координатам θ_α суперпространства. Правила интегрирования по фермионным переменным, впервые введенные Березиным [4], установлены в разделе 9.5. Коротко говоря, поскольку квадрат любого фермионного параметра равен нулю, любая функция от N фермионных параметров ξ_n может быть представлена в виде

$$f(\xi) = \left(\prod_{n=1}^{N} \xi_n\right) c + \text{слагаемые с меньшим количеством множителей } \xi, \tag{26.6.1}$$

а интеграл от нее по ξ определен просто как

$$\int d^N \xi f(\xi) \equiv c. \tag{26.6.2}$$

Коэффициент c может сам зависеть от других непроинтегрированных c-числовых переменных, антикоммутирующих с теми ξ, по которым мы интегрируем. В этом случае важно стандартизировать определение c, переместив все ξ налево от c перед интегрированием по ним, как это сделано в (26.6.1). При таком определении интегрирование по фермионным переменным представляет собой линейную операцию. Оно напоминает интегрирование по действительной переменной в том смысле, что, поскольку сдвиг $\xi_n \to \xi_n + a_n$ переменной ξ_n на постоянную a_n добавляет к произведению $\prod_n \xi_n$ только слагаемые, содержащие меньшее количество множителей ξ, он не влияет на значение интеграла

$$\int d^N \xi f(\xi + a) = \int d^N \xi f(\xi). \tag{26.6.3}$$

Кроме того, из выражения (26.6.2) в частном случае следует, что интеграл по N фермионным параметрам от полинома порядка$< N$ исчезает. Интегралы по бозонным и фермионным переменным разительно отличаются по тому, что происходит с ними при замене переменных: в случае бозонных параметров x_n имеем $d^N x' = \det(\partial x'/\partial x) d^N x$, а для фермионных параметров

$$d^N \xi' = \left[\mathrm{Det}\left(\partial\xi'/\partial\xi\right)\right]^{-1} d^N \xi. \tag{26.6.4}$$

В частности, размерность $d\xi$ *обратна* размерности ξ.

Согласно (26.2.10), D-член суперполя общего вида $S(x,\theta)$ (которое может быть элементарным или составным) с точностью до слагаемого в виде полной производной равен коэффициенту при $-(\bar\theta\gamma_5\theta)^2/4 = -(\theta^{\mathrm{T}}\epsilon\theta)^2/4)$. Каждая из четырех переменных θ может быть равной θ_1 и каждая такая возможность вносит одинаковый вклад, поэтому можно положить, что переменная θ_1 — самая левая и учесть множитель 4. Тогда следующей слева должна быть переменная θ_2. Каждой из двух оставшихся θ может быть θ_3 и каждая из возможностей дает равный вклад, следовательно можно предположить, что θ_3 — третья слева и добавить множитель 2, тогда θ_4 должна быть самой правой. Таким образом

$$-\frac{1}{4}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2 = -\frac{1}{4}\times 4\times 2\times\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4,$$

а коэффициент при этой функции от θ равен $(-1/2)$, умноженной на интеграл по $d^4\theta$. Так как с точностью до производной это и есть D-член, то

$$\int d^4x[S]_D = -\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4\theta S(x,\theta). \tag{26.6.5}$$

Тем же способом с помощью формулы (26.3.11) найдем, что пространственно-временной интеграл от $\mathcal{F}$-члена кирального суперполя общего вида Φ (опять либо элементарного, либо составного) может быть представлен в виде

$$\int d^4x[\Phi]_{\mathcal{F}} = \frac{1}{2}\int d^4x\int d^4\theta_L\Phi(x,\theta). \tag{26.6.6}$$

Так как теперь мы интегрируем по θ, удобно ввести дельта-функцию, определенную, как обычно, условием, что для произвольной функции $f(\theta)$

$$\int d^4\theta'\delta^4(\theta'-\theta)f(\theta') = f(\theta). \tag{26.6.7}$$

В соответствии с формулой (9.5.40), это условие удовлетворяется функцией

$$\begin{aligned}\delta(\theta'-\theta) &= (\theta'_1-\theta_1)(\theta'_2-\theta_2)(\theta'_3-\theta_3)(\theta'_4-\theta_4)\\ &= \frac{1}{4}\left[\left(\theta_L-\theta'_L\right)^{\mathrm{T}}\epsilon\left(\theta_L-\theta'_L\right)\right]\left[\left(\theta_R-\theta'_R\right)^{\mathrm{T}}\epsilon\left(\theta_R-\theta'_R\right)\right].\end{aligned} \tag{26.6.8}$$

Представление действия в виде интеграла по суперпространству позволяет легко вывести полевые уравнения в суперполевой форме. Рассмотрим, например, действие для набора левокиральных скалярных суперполей Φ_n (что включает как частный случай общую перенормируемую теорию левокиральных суперполей Φ_n) :

$$I = \frac{1}{2}\int d^4x[K(\Phi,\Phi^*)]_D + 2\mathrm{Re}\int d^4x[f(\Phi)]_{\mathscr{F}}, \tag{26.6.9}$$

где K — произвольная функция от Φ_n и Φ_n^* без производных, а f — произвольная функция от Φ_n, также без производных. (Обоснование этой формы действия и представление действия в терминах компонентных полей описаны в разделе 26.8.) Мы не можем вывести правильные уравнения поля, потребовав просто, чтобы оно было стационарно относительно произвольных вариаций Φ, потому что на Φ_n наложена связь $\mathscr{D}_R\Phi_n = 0$, выделяющая левокиральные суперполя. Чтобы убедиться в том, что это условие сохраняется при любой вариации, используем прием, который будет полезен также в главе 30 при выводе правил Фейнмана в суперпространстве. Запишем Φ_n в терминах *потенциальных суперполей* $S_n(x,\theta)$ в виде

$$\Phi_n = \mathscr{D}_R^2 S_n, \tag{26.6.10}$$

откуда следует (если учесть соотношения (26.A.21)), что

$$\Phi_n^* = -\mathscr{D}_L^2 S_n^*, \tag{26.6.11}$$

Здесь $\mathscr{D}_R^2$ и $\mathscr{D}_L^2$ — сокращенные обозначения, соответственно, для $(\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R) = -(\bar{\mathscr{D}}_R\mathscr{D}_R)$ и $(\mathscr{D}_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_L) = (\bar{\mathscr{D}}_L\mathscr{D}_L)$. Чтобы продемонстрировать, что всегда можно найти потенциальное суперполе S_n (не обязательно локальное), которое удовлетворяет соотношению (26.6.10), заметим, что для любого левокирального суперполя Φ_n

$$\mathscr{D}_R^2\mathscr{D}_L^2\Phi_n = -16\Box\Phi_n, \tag{26.6.12}$$

поэтому (26.6.10) удовлетворяется решением уравнения

$$-16\Box S_n = \mathscr{D}_L^2\Phi_n. \tag{26.6.13}$$

Выражение $\mathscr{D}_R^2 S$ левокирально при любом S, поэтому действие должно быть стационарно при произвольной вариации S_n. С помощью (26.6.5) действие можно выразить через S_n и S_n^*:

$$I = -\frac{1}{4}\int d^4x\int d^4\theta K(-\mathscr{D}_L^2 S^*, \mathscr{D}_R^2 S) + 2\mathrm{Re}\int d^4x\left[f(\mathscr{D}_R^2 S)\right]_{\mathscr{F}}. \tag{26.6.14}$$

Вариация первого слагаемого функции S_n (но не S_n^*) беконечно малых изменений δS_n легко вычисляется с помощью интегрирования по частям в суперпространстве:

$$
\begin{aligned}
&-\delta\frac{1}{4}\int d^4x\int d^4\theta K(-\mathscr{D}_L^2 S^*, \mathscr{D}_R^2 S)\\
&\quad = -\sum_n d^4\theta\delta S_n \mathscr{D}_R^2 \frac{\delta K(-\mathscr{D}_L^2 S^*, \mathscr{D}_R^2 S)}{\delta\mathscr{D}_R^2 S_n}.
\end{aligned}
$$

Соотношения (26.3.31) и (26.6.5) позволяют представить вариацию интеграла в слагаемом с суперпотенциалом при бесконечно малых изменениях δS_n функции S_n в виде

$$
\begin{aligned}
\delta\int d^4x\,[f(\mathscr{D}_R^2 S)]_{\mathscr{F}} &= \sum_n\int d^4x\left[\left.\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\Phi_n}\right|_{\Phi=\mathscr{D}_R^2 S}\mathscr{D}_R^2\delta S_n\right]_{\mathscr{F}}\\
&= \sum_n\int d^4x\left[\mathscr{D}_R^2\left(\left.\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\Phi_n}\right|_{\Phi=\mathscr{D}_R^2 S}\delta S_n\right)\right]_{\mathscr{F}}\\
&= 2\sum_n\int d^4x\left[\left.\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\Phi_n}\right|_{\Phi=\mathscr{D}_R^2 S}\delta S_n\right]_D\\
&= -\sum_n\int d^4x\int d^4\theta\left.\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\Phi_n}\right|_{\Phi=\mathscr{D}_R^2 S}\delta S_n.
\end{aligned}
$$

Тогда условием стационарности (26.6.14) относительно произвольных вариаций S_n будет

$$
\mathscr{D}_R^2\frac{\delta K(-\mathscr{D}_L^2 S^*, \mathscr{D}_R^2 S)}{\delta\mathscr{D}_R^2 S_n} = -4\left.\frac{\partial f(\Phi)}{\partial\Phi_n}\right|_{\Phi=\mathscr{D}_R^2 S},
$$

или, в терминах киральных суперполей,

$$
\mathscr{D}_L^2\frac{\delta K(\Phi,\Phi^*)}{\delta\Phi_n} = -4\frac{\partial f(\Phi)}{\partial\Phi_n}, \tag{26.6.15}
$$

Комплексное сопряжение дает

$$
\mathscr{D}_L^2\frac{\delta K(\Phi,\Phi^*)}{\delta\Phi_n^*} = 4\left(\frac{\partial f(\Phi)}{\partial\Phi_n}\right)^*. \tag{26.6.16}
$$

Можно легко проверить, что компоненты этих уравнений порождают полевые уравнения для компонент Φ_n^* и Φ_n. Например, с учетом того, что $\mathscr{D}_R^2(\theta_R^{\rm T}\epsilon\theta_R) = -4$, не зависящая от θ часть $\mathscr{D}_R^2\Phi_n^*$ равна $4\mathscr{F}_n^*$, а не зависящая от θ часть $\partial f(\Phi)/\partial\Phi_n$ равна $\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n$. В итоге не зависящая от θ часть (26.6.15) при $K = \sum_n \Phi_n^*\Phi_n$ дает соотношение $\mathscr{F}_n^* = -\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n$, согласующееся с (26.4.6).

Как пример использования этого формализма, рассмотрим суперполя, которым принадлежат сохраняющиеся токи. Предположим, что суперпотенциал и келеров потенциал в действии (26.6.9) инвариантны относительно бесконечно малого глобального преобразования

$$\delta\Phi_n = i\epsilon\sum_m \mathscr{T}_{mn}\Phi_m, \quad \delta\Phi_n^* = -i\epsilon\sum_m \mathscr{T}_{mn}\Phi_m^*, \tag{26.6.17}$$

где ϵ — действительная бесконечно малая постоянная, а $\mathscr{T}_{nm}$ — эрмитова матрица, возможно часть алгебры Ли аналогичных матриц преобразования. Так как суперпотенциал зависит только от Φ_n, он автоматически инвариантен также относительно расширенных преобразований

$$\delta\Phi_n = i\epsilon\Lambda\sum_m \mathscr{T}_{mn}\Phi_m, \quad \delta\Phi_n^* = -i\epsilon\Lambda^*\sum_m \mathscr{T}_{mn}\Phi_m^*, \tag{26.6.18}$$

где $\Lambda(x,\theta)$ — суперполе, которое должно быть левокиральным, чтобы $\delta\Phi_n$ было левокиральным, а в остальном произвольно. В то же время, другие члены, такие как келеров потенциал, в общем случае не инвариантны относительно этих преобразований, потому что $\Lambda \neq \Lambda^*$. Для полей общего вида изменение действия должно поэтому иметь вид:

$$\delta I = i\epsilon\int d^4x\int d^4\theta[\Lambda - \Lambda^*]\mathscr{J}, \tag{26.6.19}$$

где $\mathscr{J}(x,\theta)$ — некоторое действительное суперполе, известное под названием *суперполе тока*. Однако, если удовлетворяются полевые уравнения, то действие инвариантно относительно *любой* вариации суперполей, поэтому интеграл (26.6.19) должен обращаться в нуль для любого левокирального суперполя $\Lambda(x,\theta)$. Любое такое суперполе Λ можно представить в форме $\Lambda = \mathscr{D}_R^2 S$, а это означает, что суперполе тока должно удовлетворять условию

$$\mathscr{D}_R^2\mathscr{J} = \mathscr{D}_L^2\mathscr{J} = 0. \tag{26.6.20}$$

Иначе говоря, $\mathscr{J}$ должно быть *линейным* суперполем. Как мы увидели в разделе (26.3), это означает, что его компоненты удовлетворяют уравнениям

$$N^{\mathscr{J}} = M^{\mathscr{J}} = \partial^\mu V_\mu^{\mathscr{J}} = 0, \quad \lambda^{\mathscr{J}} = -\not{\partial}\omega^{\mathscr{J}}, \quad D^{\mathscr{J}} = -\Box C^{\mathscr{J}}. \tag{26.6.21}$$

Это позволяет отождествить V-компоненту $V_\mu^{\mathscr{J}}$ с сохраняющимся током, связанным с этой симметрией.

В случае действия (26.6.9) суперполе тока принимает вид

$$\mathcal{J} = \sum_{nm} \frac{\partial K(\Phi, \Phi^*)}{\partial \Phi_n} \mathcal{T}_{nm} \Phi_m = \sum_{nm} \frac{\partial K(\Phi, \Phi^*)}{\partial \Phi_n^*} \mathcal{T}_{nm} \Phi_m^*, \tag{26.6.22}$$

Равенство этих двух выражений — следствие симметрии относительно преобразований (26.6.17). Используя затем полевое уравнение (26.6.15), получаем

$$\mathcal{D}_R^2 \mathcal{J} = \sum_{nm} \left[\mathcal{D}_R^2 \frac{\partial K(\Phi, \Phi^*)}{\partial \Phi_n} \right] \mathcal{T}_{nm} \Phi_m = -4 \sum_{nm} \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi_n^*} \mathcal{T}_{nm} \Phi_m, \tag{26.6.23}$$

Последнее выражение равно нулю в силу предположения об инвариантности суперпотенциала относительно преобразования (26.6.17). Тем же способом, с помощью второго из двух выражений для J и полевого уравнения (26.6.16) находим, что $\mathcal{D}_L^2 \mathcal{J} = 0$, подтвердив таким образом условие сохранения (26.6.20).

26.7. Суперток

Подобно любой другой непрерывной глобальной симметрии, суперсимметрия приводит к существованию сохраняющегося тока [5]. Свойство сохранения и коммутационные свойства тока суперсимметрии выражаются операторными уравнениями, которые останутся справедливыми, даже когда суперсимметрия спонтанно нарушена, и поэтому пригодятся нам в главе 29, где мы рассмотрим теории со спонтанным нарушением суперсимметрии в непертурбативном контексте. Кроме того, ток суперсимметрии связан с компонентами суперполя, называемого *супертоком* [6], которое будет иметь фундаментальное значение при исследовании супергравитации в главе 31.

Как мы видели в разделе 7.3, существование обычной глобальной симметрии плотности лагранжиана относительно бесконечно малого преобразования $\chi^l \to \chi^l + \varepsilon \mathcal{F}^l$ (где χ^l — обобщенное каноническое или внешнее бозонное или фермионное поле, а $\mathcal{F}^l$ — функция канонических или внешних полей) приводит к существованию тока

$$J^\mu(x) \propto \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial \chi^\ell(x)/\partial x^\mu)} \mathcal{F}^\ell(x),$$

который сохраняется для полей, удовлетворяющих полевым уравнениям, и генерирует симметрию в том смысле, что канонические коммутационные соотношения дают

$$\left[\int d^3x J^0(x), \chi^\ell(y) \right] \propto \mathcal{F}^\ell(y).$$

Ток суперсимметрии требует несколько более сложного рассмотрения по двум причинам. Одна из них состоит в том, что суперсимметрия — это лишь симметрия действия, но не лагранжиан или функции Лагранжа*. Вариация плотности лагранжиана при бесконечно малом преобразовании суперсимметрии представляет собой пространственно-временную производную, которую можно записать в виде

$$\delta\mathscr{L} = \sum_{\ell} \left(\overline{\alpha}\partial_\mu K^\mu\right), \tag{26.7.1}$$

где K^μ — 4-вектор майорановских спиноров. Вследствие этого ток суперсимметрии — это не обычный нетеровский ток. Нетеровский ток — это 4-вектор N^μ майорановских спиноров, определяемый равенством

$$\sum_{\ell} \frac{\partial_R \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \chi^\ell)} \delta\chi^\ell \equiv -\left(\overline{\alpha} N^\mu\right), \tag{26.7.2}$$

дивергенцию которого уравнения Эйлера–Лагранжа позволяют представить как

$$\begin{aligned}\left(\overline{\alpha}\partial_\mu N^\mu\right) &= -\sum_{\ell} \frac{\partial_R \mathscr{L}}{\partial \chi^\ell} \delta\chi^\ell - \sum_{\ell} \frac{\partial_R \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \chi^\ell)} \partial_\mu \delta\chi^\ell \\ &= -\delta\mathscr{L}.\end{aligned} \tag{26.7.3}$$

(Здесь ∂_R обозначает правую частную производную; по определению перед ее применением необходимо переместить дифференцируемые фермионные переменные направо.) Вместо этого мы должны определить ток суперсимметрии как

$$S^\mu \equiv N^\mu + K^\mu, \tag{26.7.4}$$

Из (26.7.1) и (26.7.3) следует, что он действительно сохраняется

$$\partial_\mu S^\mu = 0. \tag{26.7.5}$$

Второе усложнение состоит в том, что изменение $\delta\chi^l$ канонического поля χ^l при преобразовании суперсимметрии не сводится просто к функции канонических полей, но зависит также от канонически сопряженных

*Автор употребляет во всей книге термины «Lagrangian» и «Lagrangian density», иногда не различая их, а иногда (как в примечании на сдедующей странице) понимая под первым термином то, что в русскоязычной литературе принято называть функцией Лагранжа, а под вторым термином — просто лагранжиан. При переводе мы иногда сохраняем эквивалентный по смыслу термин «плотность лагранжиана» и везде, где необходимо, заменяем «Lagrangian» на «функцию Лагранжа». — *Прим. ред.*

им переменных. Например, как видно из (26.3.15), изменение ψ-компоненты зависит от временной производной φ-компоненты. В результате коммутатор нетеровского заряда $\int d^3xK^0$ с каноническим полем общего вида не сводится к действующему на это поле преобразованию суперсимметрии. К счастью, второе усложнение компенсируется первым: когда учитываются коммутаторы полей как с $\int d^3xK^0$, так и с $\int d^3xN^0$, то оператор $\int d^3xS^0$ действительно генерирует преобразования суперсимметрии* в том смысле, что

$$\left[\int d^3x\left(\overline{\alpha}S^0\right),\chi^\ell\right] = i\delta\chi^\ell, \tag{26.7.6}$$

в согласии с (26.2.1) и (26.2.8).

---

*Это общий результат для построенных таким способом токов. Рассмотрим, например, функцию Лагранжа L (не лагранжиан), которая зависит от набора канонических переменных q^n и их временных производных $\dot{q}^n$ и на который не наложены никакие связи. В квантовой теории поля индекс n включает пространственные координаты, а также дискретные переменные — спин и метку сорта частиц, а $L = \int d^3x\mathscr{L}$. Принятое здесь предположение о том, что плотность лагранжиана, с точностью до пространственно-временной производной, инвариантна относительно некоторого бесконечно-малого преобразования δ, означает, что δL — временная производная некоторого функционала F. Иными словами,

$$\sum_n \frac{\partial L}{\partial q^n}\delta q^n + \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\delta \dot{q}^n = \frac{d}{dt}F.$$

С помощью канонических уравнений движения это можно записать как закон сохранения $\dot{Q} = 0$, где сохраняющийся заряд равен

$$Q = -\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\delta q^n + F.$$

В данном случае $Q = \int d^3x[N^0 + K^0]$. Мы предполагаем обычные коммутационные соотношения без связей

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}, q^m\right] = -i\delta^m_n, \quad [q^n, q^m] = 0,$$

и находим коммутатор

$$[Q, q^m] = i\delta q^m - \sum_{nl}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l}\frac{\partial \delta q^l}{\partial \dot{q}^n}[\dot{q}^n, q^m] + \sum_n \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^n}[\dot{q}^n, q^m].$$

Чтобы вычислить второй и третий члены, заметим, что вторые производные по времени $\ddot{q}^n$ входят в условие инвариантности линейно, поэтому коэффициенты при них должны совпадать: даже не обращаясь к уравнениям движения, имеем

$$\sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l}\frac{\partial \delta q^l}{\partial \dot{q}^n} = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^n}.$$

Второй и третий члены коммутатора поэтому сокращаются, и остается искомый результат

$$[Q, q^m] = i\delta q^m.$$

Кроме того, дифференцирование по времени дает

$$[Q, \dot{q}^m] = i\delta \dot{q}^m.$$

Этот результат был распространен на теории со связями [7].

Например, мы можем вывести явную формулу для тока суперсимметрии в общей перенормируемой теории левокиральных суперполей Φ_n и она может быть использована для того, чтобы проверить, что этот ток действительно генерирует преобразования суперсимметрии в смысле (26.7.6). Лагранжиан (26.4.7) для этой теории можно представить в форме

$$\mathscr{L} = \sum_n \sum_n \left[-\partial_\mu \varphi_n^* \partial^\mu \varphi_n - \frac{1}{2}\left(\overline{\psi_{Ln}} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{Ln}\right) - \frac{1}{2}\left(\overline{\psi_{Rn}} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{Rn}\right) \right]$$
$$+ \text{члены без производных.} \tag{26.7.7}$$

С помощью правил преобразования (26.3.15), (26.3.17), (26.3.18) и (26.3.20) (при $\tilde{\varphi} = \varphi^*$) определенный формулой (26.7.2) нетеровский ток приводится к виду

$$N^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n [2(\partial^\mu \varphi_n^*)\psi_{nL} + 2(\partial^\mu \varphi_n)\psi_{nR} + (\partial\!\!\!/ \varphi_n)\gamma^\mu \psi_{nR} + (\partial\!\!\!/ \varphi_n^*)\gamma^\mu \psi_{nL}$$
$$- \mathscr{F}_n \gamma^\mu \psi_{nR} - \mathscr{F}_n^* \gamma^\mu \psi_{nL}]\,. \tag{26.7.8}$$

Мы можем вычислить изменение лагранжиана либо непосредственно, либо проще, заметив, что изменение D-членов и $\mathscr{F}$-членов при преобразованиях суперсимметрии дается, соответственно, соотношениями (26.2.17) и (26.2.16). В любом случае мы найдем, что ток K^μ в (26.7.1) равен

$$K^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \gamma^\mu [-(\partial\!\!\!/ \varphi_n)\psi_{nR} - (\partial\!\!\!/ \varphi_n^*)\psi_{nL} + \mathscr{F}_n^* \psi_{nL} + \mathscr{F}_n \psi_{nR}$$
$$+ 2\left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n}\right)\psi_{nL} + 2\left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n}\right)^* \psi_{nR}\Bigg]\,. \tag{26.7.9}$$

Сложение выражений (26.7.8) и (26.7.9) дает ток суперсимметрии для этого класса теорий

$$S^\mu = \sqrt{2} \sum_n \left[(\partial\!\!\!/ \varphi_n)\gamma^\mu \psi_{nR} + (\partial\!\!\!/ \varphi_n^*)\gamma^\mu \psi_{nL} + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_n}\right)\gamma^\mu \psi_{nL} + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_n}\right)^* \gamma^\mu \psi_{nR} \right]. \tag{26.7.10}$$

Затем непосредственно с помощью канонических коммутационных и антикоммутационных соотношений можно проверить, что $\int d^3x S^0$ удовлетворяет коммутационным соотношениям (26.7.6).

Имеется другое определение токов симметрии в терминах отклика действия материи на локальное преобразование симметрии, которое особенно полезно, когда рассматриваемые симметрии являются калибровочными; такой будет суперсимметрия, когда мы обратимся к теориям супергравитации в главе 31. В отсутствие полей супергравитации, действие не инвариантно относительно локальных преобразований суперсимметрии. Если совершить такое преобразование с зависящим от пространствено-временной точки параметром $\alpha(x)$, действие изменится на величину, которая, для того чтобы обращаться в нуль при постоянном $\alpha(x)$, должна (даже когда уравнения поля не удовлетворяютя) иметь вид

$$\delta I = -\int d^4x\left((\partial_\mu\overline{\alpha}(x))S^\mu(x)\right), \tag{26.7.11}$$

где $S^\mu(x)$ — 4-вектор майорановских спинорных операторных коэффициентов. Это не определяет $S^\mu(x)$ однозначно, потому что при обобщении, заменяющем глобальные преобразования суперсимметрии локальными, можно в общем случае придать изменению $\delta\chi$ поля χ при локальном преобразовании суперсимметрии произвольную зависимость от производных параметра $\alpha(x)$. Однако имеется один способ определения локальных преобразований суперсимметрии, который гарантирует, что коэффициент S^μ в выражении (26.7.11) будет совпадать с током, определенным выражением (26.7.4), который, как мы видели, генерирует преобразования симметрии в смысле (26.7.6). Необходимо уточнить, что *производные от* $\alpha(x)$ *не участвуют в суперсимметричном преобразовании канонических или вспомогательных полей* χ^l. Например, локальные версии правил преобразования (26.3.15)–(26.3.17) для компонент левокирального суперполя имеют вид

$$\delta\psi_L(x) = \sqrt{2}\partial_\mu\varphi(x)\gamma^\mu\alpha_R(x)\varphi(x) + \sqrt{2}\mathscr{F}(x)\alpha_L(x), \tag{26.7.12}$$

$$\delta\mathscr{F}(x) = \sqrt{2}\left(\overline{\alpha_L}(x)\,\partial\!\!\!/\psi_L(x)\right), \tag{26.7.13}$$

$$\delta\varphi(x) = \sqrt{2}\left(\overline{\alpha_R}(x)\psi_L(x)\right). \tag{26.7.14}$$

Из (26.3.21) видно, что суперполе может быть выражено через его компонентные поля в точке x_+^μ без производных, а правило преобразования для суперполя может быть представлено как

$$\delta\Phi(x,\theta) = (\overline{\alpha}(x_+)\mathscr{D}\,)\Phi(x,\theta), \tag{26.7.15}$$

где $\mathscr{D}$ — оператор (26.2.2)

При таком определении преобразований суперсимметрии производимое ими изменение действия состоит из двух слагаемых. Во-первых, хотя вариация канонических полей при преобразовании суперсимметрии не содержит производных функции $\alpha(x)$, вариация производных от канонических полей их содержит. Это порождает совпадающее с (26.7.2) изменение лагранжиана, за исключением того, что $\bar{\alpha}$ заменяется на $\partial_\mu \bar{\alpha}$:

$$\delta_1 I = -\int d^4x\left([\partial_\mu \overline{\alpha}(x)]N^\mu(x)\right).$$

Второй член в изменении действия возникает из-за того, что лагранжиан не инвариантен даже относительно той части преобразований суперсимметрии, которая не зависит от производных функции $\alpha(x)$. Согласно (26.7.1), это порождает изменение действия

$$\delta_2 I = \int d^4x\left(\overline{\alpha}(x)\partial_\mu K^\mu(x)\right) = -\int d^4x\left((\partial_\mu \overline{\alpha}(x))K^\mu(x)\right).$$

Сумма $\delta_1 I$ и $\delta_2 I$ дает полное изменение действия вида (26.7.11), где $S^\mu(x)$ совпадает с (26.7.4), что и требовалось доказать.

Даже при такой детализации трансформационных свойств компонентных полей ток суперсимметрии $S^\mu(x)$ не фиксируется однозначно равенством (26.7.11), потому что всегда можно ввести модифицированный ток

$$S^\mu_{\text{нов}} = S^\mu + \partial_\nu A^{\mu\nu}, \tag{26.7.16}$$

где $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ — произвольный антисимметричный тензор майорановских спиноров. Слагаемое $\partial_\nu A^{\mu\nu}$ сохраняется независимо от того, удовлетворяются ли полевые уравнения, а его временна́я компонента представляет собой пространственную производную, поэтому $\int d^3x S^0_{\text{нов}} = \int d^3x S^0$, и выражение (26.7.6) остается без изменений.

В действительности существует специальный выбор $A^{\mu\nu}$, удобство которого состоит в том, что $\gamma_\mu S^\mu_{\text{нов}}$ оказывается мерой нарушения масштабной инвариантности в теории. С помощью уравнений Дирака, следующих из плотности лагранжиана (26.4.7):

$$\not\partial \psi_{mL} = -\sum_n \left(\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_m \partial\varphi_n}\right)^* \psi_{nR}, \quad \not\partial \psi_{mR} = -\sum_n \left(\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_m \partial\varphi_n}\right) \psi_{nL}, \tag{26.7.17}$$

непосредственно вычисляется

$$\begin{aligned}\gamma_\mu S^\mu = -2\sqrt{2}\sum_n \Bigg\{ & \not\partial(\varphi_n \psi_{nR} + \varphi_n^* \psi_{nL}) \\ & + \left(\sum_m \varphi_m \frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n \partial\varphi_m} - 2\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right)\psi_{nL} \\ & + \left(\sum_m \varphi_m \frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n \partial\varphi_m} - 2\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right)^* \psi_{nR}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Первый член можно исключить, введя модифицированный ток суперсимметрии общего вида (26.7.16):

$$S^{\mu}_{\text{нов}} = S^{\mu} + \frac{\sqrt{2}}{3}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]\sum_n \partial_\nu\left(\varphi_n\psi_{nR} + \varphi_n^*\psi_{nL}\right), \tag{26.7.18}$$

для которого

$$\gamma_\mu S^{\mu}_{\text{нов}} = -2\sqrt{2}\sum_n\left\{\left(\sum_m \varphi_m \frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m} - 2\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right)\psi_{nL} + \left(\sum_m \varphi_m \frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m} - 2\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right)^*\psi_{nR}\right\}. \tag{26.7.19}$$

Правая часть обращается в нуль для масштабно-инвариантной плотности лагранжиана, когда $f(\Phi)$ представляет собой однородный полином третьего порядка относительно Φ_n.

Обратимся теперь к трансформацинным свойствам тока суперсимметрии относительно преобразований суперсимметрии. Нетрудно проверить, что ток, определяемый (26.7.18) и (26.7.10), связан с ω-компонентой ω^{Θ}_{μ} действительного некирального поля Θ_μ соотношением*

$$S^{\mu}_{\text{нов}} = -2\omega^{\Theta\mu} + 2\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\omega^{\Theta}_{\nu}, \tag{26.7.20}$$

где

$$\Theta_\mu = \frac{i}{12}\sum_n\left[4\Phi_n^*\partial_\mu\Phi_n - 4\Phi_n\partial_\mu\Phi_n^* + \left((\mathscr{D}\Phi_n^*)\gamma_\mu(\mathscr{D}\Phi_n)\right)\right]. \tag{26.7.21}$$

Суперполе Θ^{μ} называется *супертоком*.

Суперток удовлетворяет закону сохранения, который включает сохранение тока суперсимметрии (26.7.20) и много других следствий. Чтобы вывести его, можно воспользоваться соотношением антикоммутации (26.2.30)

*Здесь мы вводим обозначения, которые будут широко использоваться в главе 31. Следуя формуле (26.2.10), компоненты $C^S, \omega^S, M^S, N^S, V^S_\mu, \iota^S$ и D^S произвольного суперполя $S(x,\theta)$ определяются разложением

$$S(x,\theta) = C^S(x) - i\left(\bar\theta\gamma_5\omega^S(x)\right) - \frac{i}{2}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)M^S(x) - \frac{1}{2}\left(\bar\theta\theta\right)N^S(x) + \frac{i}{2}\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\nu\theta\right)V^S_\mu(x) - i\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)\left(\bar\theta\left[\iota^S(x) + \frac{1}{2}\not{\partial}\omega^S(x)\right]\right) - \frac{1}{4}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2\left[D^S(x) + \frac{1}{2}\Box C^S(x)\right].$$

и записать★

$$[\mathscr{D}_R, (\overline{\mathscr{D}}_L \mathscr{D}_L)] = -4\not{\partial}\mathscr{D}_L.$$

Вместе с условиями киральности $\mathscr{D}_R\Phi_n = \mathscr{D}_L\Phi_n^* = 0$ это дает

$$\gamma^\mu \mathscr{D}_L \sum_n \left[\Phi_n^* \partial_\mu \Phi_n - \Phi_n \partial_\mu \Phi_n^*\right] = -\frac{1}{4}\sum_n \Phi_n^* \mathscr{D}_R \left(\overline{\mathscr{D}}_L \mathscr{D}_L\right)\Phi_n - \sum_n (\not{\partial}\Phi_n^*)\mathscr{D}_L\Phi_n$$

и

$$\gamma^\mu \mathscr{D}_L \sum_n \left((\overline{\mathscr{D}}\Phi_n^*)\gamma_\mu(\mathscr{D}\Phi_n)\right) = 4\sum_n (\not{\partial}\Phi_n^*)\mathscr{D}\Phi_n \left(\overline{\mathscr{D}}_L\mathscr{D}_L\right)\Phi_n, +2\sum_n \mathscr{D}\Phi_n^*,$$

поэтому суперполе (26.7.21) удовлетворяет соотношению

$$\gamma_\mu \mathscr{D}_L \Theta^\mu = \frac{1}{6} i \sum_n (\mathscr{D}_R \Phi_n^*)\left(\overline{\mathscr{D}}_L \mathscr{D}_L\right)\Phi_n - \frac{1}{12} i \sum_n \Phi_n^* \mathscr{D}_R \left(\overline{\mathscr{D}}_L \mathscr{D}_L\right)\Phi_n. \quad (26.7.22)$$

В разделе 26.6 мы видели, что полевые уравнения, следующие из лагранжиана (26.4.7), могут быть представлены в форме

$$\left(\overline{\mathscr{D}}_L \mathscr{D}_L\right)\Phi_n = -4\left(\frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi_n}\right)^*. \quad (26.7.23)$$

Подставив это в (26.7.22), получим в итоге

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \mathscr{D}_L \Theta_\mu &= -\frac{2}{3} i \sum_n (\mathscr{D}_R \Phi_n^*)\left(\frac{\partial f}{\partial \Phi_n}\right)^* + \frac{1}{3} i \sum_n \Phi_n^* \mathscr{D}_R \left(\frac{\partial f}{\partial \Phi_n}\right)^* \\ &= \frac{1}{3} i \mathscr{D}_R \left[\sum_n \Phi_n \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi_n} - 3f(\Phi)\right]^*. \end{aligned} \quad (26.7.24)$$

Эрмитово сопряженное к (26.7.24) выражение имеет вид

$$\gamma^\mu \mathscr{D}_R \Theta_\mu = -\frac{1}{3} i \mathscr{D}_L \left[\sum_n \Phi_n \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi_n} - 3f(\Phi)\right]. \quad (26.7.25)$$

Сумма этого выражения и выражения (26.7.24) дает закон сохранения

$$\gamma^\mu \mathscr{D}\Theta_\mu = \mathscr{D}X, \quad (26.7.26)$$

где X — действительное киральное суперполе, которое (с точностью до аддитивной постоянной) для теорий этого класса дается выражением

$$X = \frac{2}{3}\mathrm{Im}\left[\sum_n \Phi_n \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi_n} - 3f(\Phi)\right]. \quad (26.7.27)$$

★Необходимо заметить, что $\overline{\mathscr{D}}_L$ и $\overline{\mathscr{D}}_R$ — это левая и правая компоненты ковариантно сопряженного оператора $\overline{\mathscr{D}}$, а не операторы $\overline{\mathscr{D}_L}$ и $\overline{\mathscr{D}_R}$, ковариантно сопряженные $\mathscr{D}_L$ и $\mathscr{D}_R$.

Хотя закон сохранения (26.7.26) был получен здесь только для перенормируемых теорий киральных суперполей, можно ожидать, что он выполняется и в более общем случае, хотя, конечно, при этом суперполе X не обязательно дается формулой (26.7.27), потому что оно может включать другие законы сохранения. (Обобщенная формула для X будет дана в разделе 31.4.) Для вывода этих соотношений следует использовать (26.2.10), чтобы выразить Θ_μ через компоненты $C^\Theta_\mu, \omega^\Theta_\mu$ и т. д., и использовать (26.3.9), чтобы выразить киральное суперполе X через компоненты A^X, ψ^X и т.д. С помощью формул (26.A.9), (26.A.16), (26.A.17) и тождеств для матриц Дирака

$$[\gamma^\rho, \gamma^\sigma] = -\frac{1}{2} i\varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\gamma_5[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \tag{26.7.28}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu = \eta^{\mu\rho}\gamma^\nu - \eta^{\mu\nu}\gamma^\rho + \eta^{\nu\rho}\gamma^\mu + i\gamma_5\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma, \tag{26.7.29}$$

можно затем разложить обе части (26.7.26) по величинам

$$\begin{gathered}
1,\ \theta,\ \gamma_5\theta,\ \gamma^\nu\theta,\ \gamma_5\gamma^\nu\theta,\ \gamma_5[\gamma^\mu, \gamma_\nu]\theta, \\
(\bar\theta\theta),\ (\bar\theta\gamma_5\theta),\ (\bar\theta\gamma_5\gamma^\nu\theta), \\
\theta(\bar\theta\gamma_5\theta),\ \gamma_5\theta(\bar\theta\gamma_5\theta),\ \gamma^\nu\theta(\bar\theta\gamma_5\theta), \\
\gamma^\nu\gamma_5\theta(\bar\theta\gamma_5\theta),\ [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]\theta(\bar\theta\gamma_5\theta),\ (\bar\theta\gamma_5\theta)^2.
\end{gathered}$$

Приравняв коэффициенты при $1, \theta, \gamma_5\theta, \gamma^\nu\theta, \gamma_5\gamma^\nu\theta, \gamma_5[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\theta$ соответственно, получим*.

$$\psi^X = -i\gamma_5\gamma^\mu\omega^\Theta_\mu, \tag{26.7.30}$$

$$F^X = \partial^\mu C^\Theta_\mu, \tag{26.7.31}$$

$$G^X = (V^\Theta)^\mu_\mu, \tag{26.7.32}$$

$$\partial_\mu A^X = -N^\Theta_\mu, \tag{26.7.33}$$

$$\partial_\mu B^X = M^\Theta_\mu, \tag{26.7.34}$$

$$0 = V^\Theta_{\mu\nu} - V^\Theta_{\nu\mu} + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\sigma C^{\Theta\rho}. \tag{26.7.35}$$

Приравнивание коэффициентов при $(\bar\theta\theta)$ или при $(\bar\theta\gamma_5\theta)$ приводит к одному и тому же результату

$$0 = \gamma^\mu\lambda^\Theta_\mu, \tag{26.7.36}$$

а приравнивание коэффициентов при $(\bar\theta\gamma_5\gamma^\nu\theta)$ дает

$$-i\gamma_5[\gamma^\nu, \partial\!\!\!/]\psi^X = 2\gamma^\mu\gamma^\nu\lambda^\Theta_\mu + \gamma^\mu[\gamma^\nu, \partial\!\!\!/]\omega^\Theta_\mu. \tag{26.7.37}$$

*Заметим, что $V^\Theta_{\mu\nu}$ — это V_ν компонента Θ_μ, а не V_μ компонента Θ_ν

Из формул (26.7.30), (26.7.36) и (26.7.37) следует сохранение тока суперсимметрии (26.7.20):

$$0 = \partial_\mu S^\mu_{\text{нов}} = -2\partial^\mu \omega^\Theta_\mu + 2\partial\!\!\!/ \gamma^\mu \omega^\Theta_\mu, \tag{26.7.38}$$

и соотношение между λ^Θ_μ и ω^Θ_μ:

$$\lambda^\Theta_\nu = -\partial\!\!\!/ \omega^\Theta_\nu + \partial_\nu \gamma^\mu \omega^\Theta_\mu. \tag{26.7.39}$$

Приравнивание коэффициентов при $\theta(\bar\theta\gamma_5\theta)$ и $\gamma_5\theta(\bar\theta\gamma_5\theta)$ дает соотношения, которые могут быть получены, взятием дивергенции, соответственно, от выражений (26.7.34) и (26.7.33). Приравнивание коэффициентов при $\gamma^\rho\theta(\bar\theta\gamma_5\theta)$ дает

$$\partial_\rho G^X = \partial^\mu V^\Theta_{\mu\rho} + \partial^\mu V^\Theta_{\rho\mu} - \partial_\rho V^{\Theta\lambda}_\lambda, \tag{26.7.40}$$

что, в сочетании с (26.7.32), приводит к закону сохранения

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{26.7.41}$$

где $T^{\mu\nu}$ — симметричный тензор

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} V^\Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} V^\Theta_{\nu\mu} + \eta_{\mu\nu} V^{\Theta\lambda}_\lambda. \tag{26.7.42}$$

Приравнивание коэффициентов при $\gamma^\rho\gamma_5\theta(\bar\theta\gamma_5\theta)$ дает

$$\partial_\mu F^X = 2D^\Theta_\mu + \Box C^\Theta_\mu + \varepsilon_{\rho\nu\sigma\mu} \partial^\nu V^{\Theta\rho\sigma}, \tag{26.7.43}$$

Это, вместе с (26.7.31) и (26.7.35), приводит к соотношению между D^Θ_μ и C^Θ_μ:

$$D^\Theta_\mu = -\Box C^\Theta_\mu + \partial_\mu \partial^\nu C^\Theta_\nu. \tag{26.7.44}$$

Приравнивание коэффициентов при $[\gamma^\rho, \gamma^\sigma]\theta(\bar\theta\gamma_5\theta)$ и $(\bar\theta\gamma_5\theta)^2$ дает результаты, которые следуют также из (26.7.34) и, соответственно, из (26.7.38) и (26.7.39).

Сохраняющийся симметричный тензор $T^{\mu\nu}$ можно отождествить с тензором энергии-импульса системы. Чтобы убедиться в этом, используем выражения (26.1.18) и (26.2.12) для записи изменения $\omega^\Theta_\mu(x)$ под действием преобразования суперсимметрии с бесконечно малым параметром α:

$$\begin{aligned}\delta\omega^\Theta_\mu &= -i\left[(\overline{Q}\alpha), \omega^\Theta_\mu\right] = +i\left[\omega^\Theta_\mu, (\overline{Q}\alpha)\right] \\ &= \left(-i\gamma_5 \partial\!\!\!/ C^\Theta_\mu - M^\Theta_\mu + i\gamma_5 N^\Theta_\mu + \gamma^\nu V^\Theta_{\mu\nu}\right)\alpha.\end{aligned}$$

Соотношения (26.7.33)–(26.7.35) позволяют представить это в форме

$$i\left\{\omega^{\Theta}_{\mu},\overline{Q}\right\}=\frac{1}{2}\gamma^{\nu}\left(V^{\Theta}_{\mu\nu}V^{\Theta}_{\nu\mu}\right)-\partial_{\mu}\left(B^{X}+\gamma_5A^{X}\right)-i\gamma_5\not{\partial}C^{\Theta}_{\mu}+\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\sigma}\gamma^{\nu}\partial^{\kappa}C^{\Theta\sigma}.$$

Выраженное через токи (26.7.20) и (26.7.42), это изменение принимает вид

$$\begin{aligned}i\left\{S^{\mu}_{\text{нов}},\overline{Q}\right\}=&2\gamma_{\nu}T^{\mu\nu}+2(\partial^{\mu}-\gamma^{\mu}\not{\partial})\left(B^{X}+\gamma_5A^{X}\right)-\varepsilon^{\mu\nu\kappa\sigma}\gamma_{\nu}\partial_{\kappa}C^{\Theta}_{\sigma}\\&+2i\gamma_5\left(\not{\partial}C^{\Theta\mu}-\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\not{\partial}C^{\Theta}_{\lambda}-\frac{1}{2}\gamma^{\mu}[\not{\partial},\gamma^{\sigma}]C^{\Theta}_{\sigma}\right).\end{aligned} \qquad (26.7.45)$$

При $\mu=0$ все члены справа, кроме первого, представляют собой пространственные производные и поэтому исчезают в результате интегрирования по пространству, так что остается

$$i\left\{\int d^3xS^{0}_{\text{нов}},\overline{Q}\right\}=2\gamma_{\nu}\int d^3xT^{0\nu}. \qquad (26.7.46)$$

Мы определили ток суперсимметрии $S^{\mu}_{\text{нов}}$ так, чтобы $\int d^3xS^{0}_{\text{нов}}=Q$, а из фундаментального соотношения антикоммутации следует, что

$$\int d^3xT^{0\nu}=P^{\nu}, \qquad (26.7.47)$$

Это, вместе с условием сохранения (26.7.41), позволяет отождествить $T^{\mu\nu}$ с тензором энергии-импульса.

Важно обратить внимание на то, *какой* тензор энергии-импульса мы таким образом построили. Либо непосредственно из выражения (26.7.21), либо рассмотрев суперсимметричное преобразование тока (26.7.18), можно вычислить, что тензор энергии-импульса для перенормируемых теорий киральных суперполей равен

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu}=&\sum_n[\partial^{\mu}\varphi_n^*\partial^{\nu}\varphi_n]-\eta^{\mu\nu}\sum_n\left[\partial^{\lambda}\varphi_n^*\partial_{\lambda}\varphi_n+\left|\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right|^2\right]\\&+\frac{1}{3}(\eta^{\mu\nu}\Box-\partial^{\mu}\partial^{\nu})\sum_n|\varphi_n|^2+\ldots,\end{aligned} \qquad (26.7.48)$$

где точки обозначают фермионные слагаемые, которые мы здесь не рассматриваем. Видно, что последний член, который суперсимметрия связывает с поправочным членом в выражении (26.7.18), обеспечивает бесследовость тензора энергии-импульса для безмассовой теории свободного поля без суперпотенциала. В этом случае $\Box\varphi_n=0$. Простое вычисление показывает, что $T^{\mu\nu}$ имеет нулевой след также в более общем случае масштабно-инвариантных теорий, в которых $f(\varphi)$ — однородный многочлен третьей степени относительно φ_n.

Суперсимметрия устанавливает также интересное соотношение между нарушениями масштабной инвариантности и сохранением R. Из формул (26.7.30)–(26.7.32) следует, что $\gamma_\mu S^\mu_{\text{нов}} = 6\gamma_\mu \omega^{\Theta\mu}, \partial^\mu C^\Theta_\mu$ и $T^\lambda_\lambda = 2V^{\Theta\mu}_\mu$ (представляющее меру нарушения масштабной инвариантности) пропорциональны компонентам кирального суперполя X, поэтому если одна их этих величин равна нулю как операторное уравнение (т. е. не просто для некоторой конкретной конфигурации поля), то остальные тоже равны нулю в этом смысле. В этом случае можно показать, что $C^{\Theta\rho}$ пропорционально току квантового числа R. Чтобы увидеть это, заметим, что из (26.2.11) следует соотношение

$$\delta C^\Theta_\sigma = i\left[C^\Theta_\sigma, (\overline{\alpha}Q)\right] = i\left(\overline{\alpha}\gamma_5 \omega^\Theta_\sigma\right),$$

поэтому в общем случае

$$\left[C^\Theta_\sigma, Q\right] = \gamma_5 \omega^\Theta_\sigma. \qquad (26.7.49)$$

Мы видели, что если C^Θ_σ сохраняется, то $\gamma_\mu S^\mu = 0$, поэтому (26.7.20) дает $S_\sigma = -2\omega^\Theta_\sigma$. Положив $\sigma = 0$ и проинтегрировав по x в (26.7.49), получим

$$\left[\int d^3x C^{0\Theta}, Q\right] = -\frac{1}{2}\gamma_5 Q. \qquad (26.7.50)$$

Поэтому можно ввести ток

$$\mathscr{R}^\mu \equiv 2C^{\mu\Theta}, \qquad (26.7.51)$$

и, *если* он сохраняется, то является током квантового числа $\mathscr{R} \equiv \int d^3x \mathscr{R}^0$, для которого Q_L и Q_R уничтожают, соответственно, значения $+1$ и -1. Коммутатор Q_L со скалярным суперполем Φ содержит слагаемое $\partial\Phi/\partial\theta_L$, и это означает, что θ_L несет значение $\mathscr{R}$, равное $+1$, в согласии с обычным определением. Теория, в которой суперполе X равно нулю, или, эквивалентно, в которой равен нулю каждый из операторов T^μ_μ, $\gamma_\mu S^\mu$ и $\partial_\mu \mathscr{R}^\mu$, инвариантна относительно расширенного набора преобразований суперсимметрии, генерируемых описанной в конце раздела 25.2 суперконформной алгеброй.

В масштабно-инвариантных теориях значение квантового числа $\mathscr{R}$, переносимое различными суперполями, фиксируется структурой лагранжиана. Например в масштабно-инвариантной теории киральных скалярных суперполей суперпотенциал должен быть однородным многочленом третьего порядка от суперполей. $\mathscr{F}$-член суперпотенциала пропорционален коэффициенту при θ_L^2, обладающим значением квантового числа $\mathscr{R}$, равным $+2$, поэтому квантовое число $\mathscr{R}$ у $\mathscr{F}$-члена суперпотенциала равно квантовому числу $\mathscr{R}$ самого суперпотенциала минус два. Тогда $\mathscr{R}$-инвариантность требует, чтобы мы присвоили скалярным суперполям квантовое число $\mathscr{R}$, равное $+2/3$, тогда суперпотенциал будет иметь квантовое число $\mathscr{R}$, равное $+2$, а квантовое число $\mathscr{R}$ его $\mathscr{F}$-члена будет равно нулю. При этом скалярные компоненты φ_n имеют $\mathscr{R} = 2/3$, а спинорные компоненты ψ_{nL} (пропорциональные коэффициенту при θ_L в суперполе) имеют $\mathscr{R} = -1/3$. Это можно проверить, вычислив ток $\mathscr{R}^\mu$, исходя из C-члена супертока в этом классе теорий:

$$\mathscr{R}_\mu = \frac{2}{3} i \left[\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*\right] - \frac{1}{6} i \left(\overline{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi\right). \tag{26.7.52}$$

(Второй член содержит дополнительный множитель 1/2, потому что ψ — майорановский спинор.)

Квантовые поправки могут приводить к нарушению $\mathscr{R}$-инвариантности (вследствие аномалий Адлера–Белла–Джэкива) и масштабной инвариантности (вследствие ренормгруппового изменения констант связи), но, несмотря на эти поправки, суперсимметрия по-прежнему вводит соотношение между этими нарушениями симметрии [7a]. Пример такого соотношения мы увидим в разделе (29.3).

* * *

Условие сохранения (26.7.26) не определяет однозначно ни суперток Θ^μ, ни связанное с ним киральное суперполе X. В частности, можно добавить к Θ^μ величину

$$\Delta\Theta^\mu = \partial^\mu Y, \tag{26.7.53}$$

где Y — произвольное киральное суперполе. Тогда левая часть выражения (26.7.26) изменяется на величину

$$\gamma_\mu \mathscr{D} \Delta\Theta^\mu = \not{\partial} \mathscr{D} Y.$$

Для левокирального суперполя Y_L условие киральности $\mathscr{D}_R Y_L = 0$ и соотношения антикоммутации (26.2.30) дают

$$\begin{aligned}\not{\partial} \mathscr{D}_\alpha Y &= -\frac{1}{2}\left[\left\{\mathscr{D}_L, \overline{\mathscr{D}}_R\right\} \mathscr{D}_R\right]_\alpha Y_L \\ &= -\frac{1}{2}\left[\mathscr{D}_{L\alpha}\left(\overline{\mathscr{D}}_R \mathscr{D}_R\right) Y_L + \sum_\beta \overline{\mathscr{D}}_{L\beta} \mathscr{D}_{R\alpha} \mathscr{D}_{L\beta} Y_L\right].\end{aligned}$$

Матрицу $\epsilon\gamma_5$, входящую в $\bar{\mathscr{D}}_{L\beta}$ во втором слагаемом правой части этого соотношения, можно переместить к конечному оператору $\mathscr{D}_{L\beta}$, тогда условие киральности и соотношения антикоммутации дают

$$\sum_\beta \overline{\mathscr{D}}_{L\beta} \mathscr{D}_{R\alpha} \mathscr{D}_{L\beta} Y_L = -\sum_\beta \mathscr{D}_{L\beta} \mathscr{D}_{R\alpha} \overline{\mathscr{D}}_{L\beta} Y_L = 2\left(\not{\partial} \mathscr{D}\right)_\alpha Y_L,$$

и, следовательно,

$$\not{\partial}\mathscr{D}Y_L = -\frac{1}{2}\left[\mathscr{D}\left(\overline{\mathscr{D}}\mathscr{D}\right)Y_L + 2\not{\partial}\mathscr{D}Y_L\right] = -\frac{1}{4}\mathscr{D}\left(\overline{\mathscr{D}}\mathscr{D}\right)Y_L.$$

Такой же результат может быть выведен тем же способом для любого левокирального суперполя, и поэтому он справедлив также для произвольной суммы Y левокиральных и правокиральных суперполей:

$$\gamma_\mu\mathscr{D}\Delta\Theta^\mu = \not{\partial}\mathscr{D}Y = -\frac{1}{4}\mathscr{D}\left(\overline{\mathscr{D}}\mathscr{D}\right)Y. \tag{26.7.54}$$

Это соотношение имеет ту же форму, что и условие сохранения (26.7.26), в котором ассоциированное киральное суперполе X заменено киральным суперполем

$$\Delta X = -\frac{1}{4}\left(\overline{\mathscr{D}}\mathscr{D}\right)Y. \tag{26.7.55}$$

Легко проверить, что добавление $\Delta\Theta^\mu$ к Θ^μ изменяет $T^{\mu 0}$ и $S^0_{\text{нов}}$ только на пространственные производные и поэтому не меняет 4-вектор энергии-импульса P^μ или суперзаряд Q.

В разделе 26.6 мы видели, что любое киральное суперполе X может быть представлено в виде $X = (\bar{\mathscr{D}}\mathscr{D})S$ и поэтому может быть устранено добавлением к Θ^μ слагаемого вида (26.7.55) с $Y = 4S$. Но в общем случае S и построенное таким способом новое суперполе Θ^μ не будут локальными. Эта ситуация уже знакома нам из опыта работы с треугольными аномалиями, обсуждавшимися в главе 22. Там мы видели, что, хотя всегда можно построить слагаемые, которые при добавлении к плотности лагранжиана сократили бы эти аномалии, в общем случае эти члены не были бы локальными, и поэтому должны быть исключены из плотности лагранжиана. Существуют киральные суперполя, которые могут быть представлены как $(\bar{\mathscr{D}}\mathscr{D})S$ с локальным S и которые поэтому, если бы они присутствовали в ассоциированном киральном суперполе X, могли бы быть исключены добавлением к Θ^μ локальных членов вида (26.7.53). Они содержат, например, член вида $\mathrm{Re}(k\partial f(\Phi)/\partial\Phi)$ с произвольной комплексной постоянной k, потому что из полевых уравнений (26.6.15) и (26.6.16) следует, что $(\bar{\mathscr{D}}\mathscr{D})\mathrm{Re}(k^*\Phi) = 4\mathrm{Re}(k\partial f(\Phi)/\partial\Phi)$. Однако в общем случае возможности изменения X таким способом довольно ограничены.

26.8. Келеровы потенциалы общего вида *

Имеется несколько обстоятельств, по которым необходимо рассмотреть неперенормируемые лагранжианы общего вида (26.3.30),

$$\mathscr{L} = 2\mathrm{Re}\,[f(\Phi)]_{\mathscr{F}} + \frac{1}{2}\,[K(\Phi,\Phi^*)]_D\,, \tag{26.8.1}$$

где суперпотенциал f — произвольная функция левокиральных скалярных суперполей Φ_n, но не их производных, а келеров потенциал K — произвольная функция Φ_n и Φ_n^*, но не их производных.

Эта ситуация возникает в эффективных теориях поля, симметрии которых исключают любые перенормируемые взаимодействия или в которых все перенормируемые взаимодействия оказываются малыми. В таком случае часто можно вычислить амплитуды рассеяния при низкой энергии на основе древесных диаграмм, используя лагранжиан с наименьшим значением некоторой комбинации из набора производных, фермионных полей и некоторых малых перенормируемых констант связи. В разделе 19.5 мы исследовали такую эффективную теорию поля без перенормируемых взаимодействий, включающую нуклоны и мягкие пионы. Обсуждавшиеся в разделе 21.4 динамически нарушенные калибровочные теории представляют примеры эффективных теорий такого рода с малыми перенормируемыми взаимодействиями. Этот случай возникает также в суперсимметричных теориях, симметрии которых не допускают существования суперпотенциала или в которых суперпотенциал по некоторым причинам мал. Мы столкнемся с такого рода примером, когда в разделе 29.2 рассмотрим расширенную $N = 2$ суперсимметричную теорию абелевых калибровочных суперполей и калибровочно-нейтральных киральных скалярных суперполей. Там мы покажем, что низкоэнергетические амплитуды рассеяния в этой теории генерируются древесными диаграммами на основе лагранжиана вида (26.8.1), в котором $f = 0$, а K — функция только от $\Phi_n\ \Phi_n^*$, не содержащая производных, плюс $\mathscr{F}$-члены, квадратичные относительно калибровочных полей. Включение келеровых потенциалов, имеющих произвольную зависимость от Φ_n и Φ_n^*, но не зависящих от их производных, особенно важно в эффективных теориях поля, в которых некоторые скалярные поля имеют тот же порядок величины, что и фундаментальный масштаб энергии исходной теории, хотя все остальные значения поля и все остальные энергии гораздо меньше. Это представляет интерес, например, в связи с обсуждаемыми в разделе 31.6 теориями с вызываемым гравитацией нарушением суперсимметрии.

*Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

Рассмотрим, как можно выразить лагранжиан (26.8.1) через компонентные поля. При выводе (26.4.4) мы не использовали предположение о том, что $f(\Phi)$ — *кубический* полином, поэтому это соотношение по-прежнему будет давать $\mathscr{F}$-члены лагранжиана от вклада произвольного суперпотенциала. Чтобы получить D-члены, заметим, что в келеровом потенциале член четвертого порядка по θ равен

$$
\begin{aligned}
K(\Phi,\Phi^*)_{\theta^4} = &-\frac{1}{8}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2\sum_n\left[\frac{\partial K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n}\Box\varphi_n+\frac{\partial K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n^*}\Box\varphi_n^*\right]\\
&+\sum_{nm}\frac{\partial^2K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m^*}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)\left[\left(\bar\theta\psi_{mR}\right)\left(\bar\theta\partial\!\!\!/\psi_{nL}\right)-\left(\bar\theta\psi_{nL}\right)\left(\bar\theta\partial\!\!\!/\psi_{mR}\right)\right]\\
&+2\mathrm{Re}\sum_{nml}\frac{\partial^3K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi_l^*}\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\epsilon\psi_{nL}\right)\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\epsilon\psi_{mL}\right)\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\epsilon\theta_L\right)^*\mathscr{F}_l^*\\
&+2\mathrm{Re}\sum_{nml}\frac{\partial^3K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi_l^*}\left(\bar\theta\psi_{mL}\right)\left(\bar\theta\psi_{lR}\right)\left(\overline{\theta_L}\gamma_5\gamma_\mu\theta\right)\partial^\mu\varphi_n\\
&+\sum_{nmlk}\frac{\partial^4K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi_k^*\partial\varphi_l^*}\left(\bar\theta\psi_{nL}\right)\left(\bar\theta\psi_{mL}\right)\left(\bar\theta\psi_{lR}\right)\left(\bar\theta\psi_{kR}\right)\\
&-\frac{1}{4}\sum_{nm}\frac{\partial^2K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m^*}\mathscr{F}_n\mathscr{F}_m^*\left(\bar\theta(1+\gamma_5\theta)\right)\left(\bar\theta(1-\gamma_5\theta)\right)\\
&+\frac{1}{4}\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\nu\theta\right)\sum_{mn}\left[-\frac{\partial^2K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m^*}\partial_\mu\varphi_n\partial_\nu\varphi_m^*\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\partial_\mu\varphi_n\partial_\nu\varphi_m+\frac{1}{2}\frac{\partial^2K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n^*\partial\varphi_m^*}\partial_\mu\varphi_n^*\partial_\nu\varphi_m^*\right].
\end{aligned}
\tag{26.8.2}
$$

Мы снова можем использовать формулы (26.A.18) и (26.A.19), а также (26.A.9), чтобы выделить зависимость этого выражения от θ в виде общего множителя $(\bar\theta\gamma_5\theta)$ и получить

$$
\begin{aligned}
K(\Phi,\Phi^*)_{\theta^4} = &\frac{1}{4}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n}\Box\varphi_n-\frac{1}{2}\frac{\partial K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n^*}\Box\varphi_n^*\right.\\
&+\sum_{nm}\frac{\partial^2K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m^*}\left[\left(\overline{\psi_m}\partial\!\!\!/\psi_{nL}\right)+\left(\overline{\psi_n}\partial\!\!\!/\psi_{mR}\right)-2\mathscr{F}_n\mathscr{F}_m^*\right]\\
&+2\mathrm{Re}\sum_{nml}\frac{\partial^3K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi_l^*}\left(\overline{\psi_n}\psi_{mL}\right)\mathscr{F}_\ell^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\mathrm{Re}\sum_{nml}\frac{\partial^3 K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi_l^*}\,(\overline{\psi_m}\gamma^\mu\psi_{\ell L})\,\partial_\mu\varphi_n\\
&-\frac{1}{2}\sum_{nmlk}\frac{\partial^4 K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi_l^*\partial\varphi_k^*}\,(\overline{\psi_n}\psi_{mL})\,(\overline{\psi_k}\psi_{lR})\\
&+\sum_{nm}\frac{\partial^2 K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m^*}\partial_\mu\varphi_n\partial^\mu\varphi_m^*-\frac{1}{2}\sum_{nm}\frac{\partial^2 K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\partial_\mu\varphi_n\partial^\mu\varphi_m\\
&-\frac{1}{2}\sum_{nm}\frac{\partial^2 K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n^*\partial\varphi_m^*}\partial_\mu\varphi_n^*\partial^\mu\varphi_m^*\Bigg\}\,.
\end{aligned}
\tag{26.8.3}
$$

Чтобы сделать прозрачными свойства действительности фермионных кинематических членов, можно воспользоваться формулой (26.A.21) и записать

$$
(\overline{\psi_n}\not{\partial}\psi_{mR})=(\overline{\psi_n}\not{\partial}\psi_{mL})^*\,.
$$

D-член в $K(\Phi,\Phi^*)$ — это коэффициент при $-(\bar\theta\gamma_5\theta)^2/4$ за вычетом половины даламбертиана не зависящего от θ члена в $K(\Phi,\Phi^*)$, который равен $K(\varphi,\varphi^*)$, поэтому

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}[K(\Phi,\Phi^*)]_D=\mathrm{Re}\sum_{nm}\mathscr{G}_{nm}\Bigg[&-\frac{1}{2}(\overline{\psi_m}(1+\gamma_5)\psi_n)\\
&+\mathscr{F}_n\mathscr{F}_m^*-\partial_\mu\varphi_n\partial^\mu\varphi_m^*\Bigg]\\
&-\mathrm{Re}\sum_{nml}\frac{\partial^3 K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi_l^*}\,(\overline{\psi_n}\psi_{mL})\,\mathscr{F}_\ell^*\\
&+\mathrm{Re}\sum_{nml}\frac{\partial^3 K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi_l^*}\,(\overline{\psi_m}\gamma^\mu\psi_{\ell R})\,\partial_\mu\varphi_n\\
&+\frac{1}{4}\sum_{nmlk}\frac{\partial^4 K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi_l^*\partial\varphi_k^*}\,(\overline{\psi_n}\psi_{mL})\,(\overline{\psi_k}\psi_{lR})\,,
\end{aligned}
\tag{26.8.4}
$$

где $\mathscr{G}(\varphi,\varphi^*)$ — *келерова метрика*

$$
\mathscr{G}(\varphi,\varphi^*)\equiv\frac{\partial^2 K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\phi_n\partial\varphi_m^*}\,.
\tag{26.8.5}
$$

Обращаем внимание на то, что вместо матрицы g_{nm} в (26.4.2) здесь подставлена келерова метрика $\mathscr{G}_{nm}(\varphi,\varphi^*)$. Поскольку келерова метрика зависит от поля, в общем случае невозможно сделать ее равной единичной матрице с помощью переопределения поля, так что полный лагранжиан должен быть оставлен в форме

$$\mathscr{L} = \mathrm{Re}\sum_{nm}\mathscr{G}_{nm}\left[-\frac{1}{2}(\overline{\psi_m}(1+\gamma_5)\psi_n)+\mathscr{F}_n\mathscr{F}^*_m-\partial_\mu\varphi_n\partial^\mu\varphi^*_m\right]$$
$$-\mathrm{Re}\sum_{nml}\frac{\partial^3K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi^*_l}(\overline{\psi_n}\psi_{mL})\mathscr{F}^*_\ell$$
$$+\mathrm{Re}\sum_{nml}\frac{\partial^3K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi^*_l}(\overline{\psi_m}\gamma^\mu\psi_{\ell R})\partial_\mu\varphi_n$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{nmlk}\frac{\partial^4K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi^*_l\partial\varphi^*_k}(\overline{\psi_n}\psi_{mL})(\overline{\psi_k}\psi_{lR})$$
$$-\mathrm{Re}\sum_{nm}\frac{\partial^2K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}(\overline{\psi_n}\psi_{mL})+2\mathrm{Re}\sum_n\mathscr{F}_n\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}. \tag{26.8.6}$$

Билинейное выражение $(\overline{\psi_m}\partial\!\!\!/\gamma_5\psi_n)$ представляет собой полную производную и его можно было бы отбросить, если бы метрика $\mathscr{G}_{nm}$ была постоянной, но его необходимо сохранить для келеровых потенциалов общего вида. В конце раздела 27.3 этот результат будет обобщен, чтобы включить калибровочные поля.

* * *

Как обсуждалось в разделе 19.6, спонтанное нарушение глобальной группы симметрии G до подгруппы H влечет за собой существование набора действительных безмассовых голдстоуновских бозонов со скалярными полями π_k, для которых слагаемое лагранжиана с минимальным числом производных принимает вид

$$\mathscr{L}_{G/H} = -\sum_{k\ell}G_{k\ell}(\pi)\partial_\mu\pi_k\partial^\mu\pi_\ell, \tag{26.8.7}$$

где G_{kl} – метрика фактор-пространства G/H. (Теории с лагранжианами такого общего вида называются *нелинейными σ-моделями*.) Записав комплексные поля φ_n как суммы соответствующих действительных и мнимых частей, можно привести слагаемое $-\sum_{nm}\mathscr{G}_{nm}(\varphi,\varphi^*)\partial_\mu\varphi_n\partial^\mu\varphi^*_m$ лагранжиана (26.8.6) к виду (26.8.7), но обратное утверждение в общем случае несправедливо: условие того, чтобы набор действительных координат, подобных голдстоуновским бозонным полям π_k, мог интерпретироваться как действительная и мнимая части набора комплексных координат, подобных полям φ_n, причем метрика в этих координатах локально задана соотношением (26.8.5), определяет так называемое келерово многообразие*. Однако не нужно думать, что в обычных случаях, когда G/H *не является* келеровым многообразием, группа G не может быть спонтанно нарушена до H так, чтобы осталась ненарушенной суперсимметрия. То, что происходит в этих случаях, состоит в появлении дополнительных безмассовых бозонов, которые вместе с голдстоуновскими бозонами образуют келерово многообразие.

Это происходит потому, что суперпотенциал $f(\varphi)$ зависит от φ, но не зависит от φ^*, поэтому, если весь лагранжиан инвариантен относительно глобальной группы симметрии G, то суперпотенциал автоматически инвариантен относительно группы $G_{\mathbb{C}}$, то есть комплексификации G: если G состоит из преобразований $\exp(i\sum_A \theta_A t_A)$ с генераторами t_A и произвольными действительными параметрами θ_A, то $G_{\mathbb{C}}$ состоит из преобразований $\exp(i\sum_A z_A t_A)$ с теми же генераторами и произвольными комплексными параметрами z_A. (Например, если G это $U(n)$, то $G_{\mathbb{C}}$ — это $GL(n,\mathbb{C})$, группа всех комплексных несингулярных матриц, а если G — это $SU(n)$, то $G_{\mathbb{C}}$ это $SL(n,\mathbb{C})$, группа всех комплексных несингулярных матриц с единичным детерминантом.) Аналогично, если некоторая стационарная точка $\varphi^{(0)}$ суперпотенциала $f(\varphi)$ инвариантна относительно некоторой подгруппы H группы G, то она будет инвариантна также относительно подгруппы $H_{\mathbb{C}}$ группы $G_{\mathbb{C}}$, т. е. комплексификации H. Независимо от того, образует ли G/H келерово многообразие, комплексифицированное фактор-пространство $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ всегда представляет собой келерово многообразие. Это есть следствие того, что $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ образует комплексное подмногообразие плоского комплексного пространства полей φ_n, которое представляет собой келерово многообразие, и существует теорема о том, что любое комплексное подмногообразие келерова многообразия — это келерово многообразие [9]. При параметризации значениями $\varphi_n(z) = [\exp(i\sum_A z_A t_A)\varphi^{(0)}]_n$ келерово многообразие $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ имеет метрику, получаемую с помощью его вложения в плоское комплексное

---

*Значение келеровых многообразий в этом контексте отмечалось в ранней работе Зумино [8]. Заметим, что нет необходимости в том, чтобы метрика была представима в виде (26.8.5) на всем многообразии с помощью *единственного* келерового потенциала $K(\varphi,\varphi^*)$; необходимо только, чтобы многообразие можно было покрыть конечными перекрывающимися областями, в которых это выполняется, со своим келеровым потенциалом в каждой области. Простейший пример келерова многообразия — это (плоская) комплексная плоскость с келеровым потенциалом $|z|^2$. В качестве примера фактор-пространства G/H, которое представляет собой келерово многообразие, Зумино привел случай, когда $G = GL(p,\mathbb{C}) \times GL(p+q,\mathbb{C})$ и $H = GL(p,\mathbb{C})$, где p и q — произвольные положительно определенные целые числа, а $GL(N,\mathbb{C})$ — группа комплексных несингулярных $N \times N$ матриц. При этом фактор-пространство имеет комплексные координаты φ_n, их можно рассматривать как компоненты комплексной $p \times (p+q)$ матрицы A, которая под действием G и H подвергается соответственно преобразованиям $A \to BAC$ и $A \to BA$, где B и C – квадратные несингулярные комплексные матрицы размерности, соответственно, p и $p+q$. В этом случае потенциал Келера просто равен $K \propto \ln \mathrm{Det} AA^\dagger$.

пространство полей φ_n, линейный элемент (квадрат интервала) в котором обычно определяется выражением $\sum_n d\varphi_n d\varphi_n^*$.

Хотя $G_{\mathbb{C}}$ не является группой симметрии всего лагранжиана, голдстоуновские бозоны, связанные с нарушением $G_{\mathbb{C}}$ до $H_{\mathbb{C}}$, строго безмассовы. Это гарантируется теоремой об отсутствии перенормировки из раздела 27.6 или, проще говоря, результатом из раздела 25.4: безмассовые частицы с нулевым спином должны входить в *пары*, которые связаны преобразованиями суперсимметрии и поэтому одинаково преобразуются под действием любой глобальной группы симметрии G, коммутирующей с суперсимметрией.

Приложение А. Майорановские спиноры

Это приложение суммирует некоторые алгебраические свойства майорановских спиноров, которые необходимы, когда мы имеем дело с суперполями.

Рассмотрим четырехкомпонентный фермионный майорановский спинор s, который подобно Q или θ может быть представлен в форме

$$s = \begin{pmatrix} e\zeta^* \\ \zeta \end{pmatrix}, \tag{26.A.1}$$

где ζ — некоторый двухкомпонентный спинор, а e — 2×2-матрица

$$e \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2.$$

Такой спинор связан со своим комплексно сопряженным соотношением

$$s^* = \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix} s = -\beta\gamma_5\epsilon s, \tag{26.A.2}$$

где ϵ — 4×4-матрица

$$\epsilon \equiv \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}, \tag{26.A.3}$$

а γ_5 и β — обычные 4×4-матрицы

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

причем 1 и 0 здесь следует понимать как 2×2-матрицы.

Производя транспонирование уравнения (26.A.2) и умножая справа на β, приходим к эквивалентной формуле

$$\bar{s} \equiv s^{+}\beta = s^{T}\varepsilon\gamma_5. \tag{26.A.4}$$

Антикоммутативность спинорных компонент ограничивает разнообразие билинейных ковариантов, которые можно получить из майорановских спиноров. Чтобы это увидеть, удобно сначала рассмотреть свойства симметрии билинейных ковариантов, которые сами по себе представляют некоторый интерес. Для пары майорановских спиноров s_1 и s_2 и любой числовой матрицы M уравнение (26.A.4) дает:

$$\begin{aligned}\bar{s}_1 M s_2 &= \sum_{\alpha\beta} s_{1\alpha} s_{2\beta} (\varepsilon\gamma_5 M)_{\alpha\beta} = -\sum_{\alpha\beta} s_{2\alpha} s_{1\beta} (\varepsilon\gamma_5 M)_{\beta\alpha} \\ &= +\sum_{\alpha\beta} s_{2\alpha} s_{1\beta} \left(M^{T}\varepsilon\gamma_5\right)_{\alpha\beta} = \bar{s}_2 (\varepsilon\gamma_5)^{-1} M^{T} e\gamma_5 s_1,\end{aligned}$$

причем знак минус, следующий за вторым знаком равенства, обусловлен фермионной природой этих спиноров. В разделе 5.4 мы установили, что 16 ковариантных матриц, образованных из дираковских матриц, удовлетворяют условиям:

$$M^{T} = \begin{cases} +\mathrm{C}M\mathrm{C}^{-1} & M = 1, \quad \gamma_5\gamma_\mu, \quad \gamma_5 \\ -\mathrm{C}M\mathrm{C}^{-1} & M = \gamma_\mu, \quad [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \end{cases}, \tag{26.A.5}$$

где C — матрица

$$\mathrm{C} = \gamma_2\beta = -\varepsilon\gamma_5 = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}. \tag{26.A.6}$$

Отсюда следует, что

$$(\bar{s}_1 M s_2) = \begin{cases} +(\bar{s}_2 M s_1) & M = 1, \quad \gamma_5\gamma_\mu, \quad \gamma_5 \\ -(\bar{s}_2 M s_1) & M = \gamma_\mu, \quad [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \end{cases}. \tag{26.A.7}$$

В частности, полагая $s_1 = s_2 = s$, находим, что

$$\bar{s}\gamma_\mu s = \bar{s}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] s = 0, \tag{26.A.8}$$

так что единственными билинейными ковариантами, образованными одним майорановским спинором s, являются $\bar{s}s$, $\bar{s}\gamma_5\gamma_\mu s$ и $\bar{s}\gamma_5 s$.

При рассмотрении суперполей наиболее общего вида необходимы выражения для произведений двух и большего числа майорановских спиноров. Напоминаем, что для двух спиноров любая 4×4-матрица может быть разложена на сумму 16 ковариантных матриц 1, γ_μ, $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, $\gamma_5\gamma_\mu$, γ_5.

Лоренц-инвариантность позволяет утверждать, что для матрицы $s_\alpha \bar{s}_\beta$ это разложение должно иметь вид:

$$s\bar{s} = k_S(s\bar{s}) + k_V\gamma_\mu(\bar{s}\gamma^\mu s) + k_T\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right](\bar{s}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]s) + k_A\gamma_5\gamma_\mu(\bar{s}\gamma_5\gamma^\mu s) + k_P\gamma_5(\bar{s}\gamma_5 s),$$

где k_n — подлежащие определению константы. Уравнение (26.A.8) показывает, что можно положить $k_V = k_T = 0$. Оставшиеся коэффициенты могут быть вычислены умножением справа на 1, $\gamma_5\gamma^\mu$ и γ_5 и дальнейшим вычислением шпура, что дает $k_S = -1/4$, $k_A = +1/4$ и $k_P = -1/4$. Таким образом, находим:

$$s\bar{s} = -\frac{1}{4}(s\bar{s}) + \frac{1}{4}\gamma_5\gamma_\mu(\bar{s}\gamma_5\gamma^\mu s) - \frac{1}{4}\gamma_5(\bar{s}\gamma_5 s). \qquad (26.\text{A}.9)$$

Умножая справа на $-\varepsilon\gamma_5$ и используя уравнение (26.A.4), можно записать выражение (26.A.9) в виде:

$$s_\alpha s_\beta = \frac{1}{4}(\varepsilon\gamma_5)_{\alpha\beta}(\bar{s}s) + \frac{1}{4}(\gamma_\mu\varepsilon)_{\alpha\beta}(\bar{s}\gamma_5\gamma^\mu s) + \frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta}(\bar{s}\gamma_5 s), \qquad (26.\text{A}.10)$$

или эквивалентно

$$s_\alpha s_\beta = \frac{1}{4}(\varepsilon\gamma_5)_{\alpha\beta}(s^T\varepsilon\gamma_5 s) + \frac{1}{4}(\gamma_\mu\varepsilon)_{\alpha\beta}(\bar{s}^T\varepsilon\gamma^\mu s) + \frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta}(s^T\varepsilon s). \qquad (26.\text{A}.11)$$

Теперь рассмотрим произведение $s_\alpha s_\beta s_\gamma$ трех компонент майорановского спинора s. Мы можем разделить s на левую и правую части:

$$s = s_L + s_R, \quad s_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)s, \quad s_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)s. \qquad (26.\text{A}.12)$$

Поскольку квадрат любого фермионного с-числа равен нулю, каждое из s_L и s_R имеет только две независимые компоненты. Соответственно, для всех α, β и γ имеем $s_{L\alpha}s_{L\beta}s_{L\gamma} = 0$ и $s_{R\alpha}s_{R\beta}s_{R\gamma} = 0$ и, следовательно,

$$s_\alpha s_\beta s_\gamma = s_{L\alpha}s_{L\beta}s_{R\gamma} + s_{L\alpha}s_{R\beta}s_{L\gamma} + s_{R\alpha}s_{L\beta}s_{L\gamma} + L \longleftrightarrow R,$$

где «$L \longleftrightarrow R$» обозначает сумму предшествующих слагаемых со взаимно переставленными индексами L и R.

Для того, чтобы вычислить это выражение, умножаем выражение (26.A.11) на подходящий множитель $(1+\gamma_5)/2$ и находим:

$$s_{L\alpha}s_{L\beta} = \frac{1}{4}\left[\varepsilon(1+\gamma_5)\right]_{\alpha\beta}(s_L^T\varepsilon s_L).$$

Если теперь умножить это выражение на $s_{R\gamma}$, то, поскольку $s_R^T\varepsilon s_R)s_{R\gamma} = 0$, можно опустить индекс L у спиноров в билинейной форме $(s_L^T\varepsilon s_L)$:

$$s_{L\alpha}s_{L\beta}s_{R\gamma} = \frac{1}{4}\left[\varepsilon(1+\gamma_5)\right])_{\alpha\beta}(s^T\varepsilon s)s_{R\gamma}.$$

Те же аргументы приводят к соотношению

$$s_{R\alpha}s_{R\beta}s_{L\gamma} = \frac{1}{4}\left[e(1-\gamma_5)\right]_{\alpha\beta}(s^T\varepsilon s)s_{L\gamma}.$$

Добавляя сумму таких же двух выражений с переставленными индексами γ на α и β, в конечном счете получим

$$\begin{aligned} s_\alpha s_\beta s_\gamma = \frac{1}{4}\left(s^T\varepsilon s\right)\big[&\varepsilon_{\alpha\beta}s_\gamma - (\varepsilon\gamma_5)_{\alpha\beta}(\gamma_5 s)_\gamma - \varepsilon_{\alpha\gamma}s_\beta \\ &+ (\varepsilon\gamma_5)_{\alpha\gamma}(\gamma_5 s)_\beta + \varepsilon_{\beta\gamma}s_\alpha - (\varepsilon\gamma_5)_{\beta\gamma}(\gamma_5 s)_\alpha\big]. \end{aligned} \tag{26.A.13}$$

Для того, чтобы вычислять произведения четырех майорановских спиноров, заметим, что $(s^T\varepsilon s)$ содержит только слагаемые с двумя $s_L s$ и двумя $s_R s$. Поэтому

$$(s^T\varepsilon s)s_\gamma s_\delta = (s^T\varepsilon s)\left[s_{R\gamma}s_{R\delta} + s_{L\gamma}s_{L\delta}\right].$$

Используя уравнение (26.*A*.11), чтобы вычислить сумму в квадратных скобках, и замечая, что

$$(s^T\varepsilon s)(s^T\varepsilon\gamma_5 s) = (s_L^T\varepsilon s_L)(s_R^T\varepsilon s_R) - (s_R^T\varepsilon s_R)(s_L^T\varepsilon s_L) = 0,$$

находим, что

$$(s^T\varepsilon s)s_\gamma s_\delta = \frac{1}{4}\varepsilon_{\gamma\delta}\left(s^T\varepsilon s\right)^2. \tag{26.A.14}$$

Следовательно, умножение уравнения (26.A.13) на s_δ приводит к результату

$$\begin{aligned} s_\alpha s_\beta s_\gamma s_\delta = \frac{1}{16}\left(s^T\varepsilon s\right)^2\big[&\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta} - (\varepsilon\gamma_5)_{\alpha\beta}(\varepsilon\gamma_5)_{\gamma\delta} - \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta} \\ &+ (\varepsilon\gamma_5)_{\alpha\gamma}(\varepsilon\gamma_5)_{\beta\delta} + \varepsilon_{\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\delta} - (\varepsilon\gamma_5)_{\beta\gamma}(\varepsilon\gamma_5)_{\alpha\delta}\big]. \end{aligned} \tag{26.A.15}$$

Поскольку любое произведение пяти компонент s обращается в нуль, этим завершается список формул произведений компонент майорановского спинора.

Мы должны использовать эти формулы для того, чтобы вывести некоторые дополнительные соотношения, которые будут полезны при работе с суперполями. Сворачивая выражение (26.A.13) с $(\varepsilon\gamma_5)_{\beta\gamma}$ и $(\varepsilon\gamma_\mu)_{\beta\gamma}$, находим

$$s_\alpha(\bar{s}s) = -(\gamma_5 s)_\alpha(\bar{s}\gamma_5 s) \tag{26.A.16}$$

и

$$s_\alpha\left(\bar{s}\gamma_5\gamma_\mu s\right) = -(\gamma_\mu s)_\alpha\left(\bar{s}\gamma_5 s\right). \tag{26.A.17}$$

Из выражений (26.A.16) и (26.A.17) можно вывести тождества Фирца

$$(\bar{s}s)^2 = -(\bar{s}\gamma_5 s)^2, \quad (\bar{s}\gamma_5\gamma_\mu s)(\bar{s}\gamma_5\gamma_\nu s) = -\eta_{\mu\nu}(\bar{s}\gamma_5 s)^2. \tag{26.A.18}$$

Кроме того, формула (26.A.14) может быть представлена в ковариантной форме

$$(\bar{s}\gamma_5 s)s\bar{s} = -\frac{1}{4}\gamma_5(\bar{s}\gamma_5 s)^2. \tag{26.A.19}$$

Будет также полезно записать свойства действительности билинейных произведений майорановских спиноров

$$(\bar{s}_1 M s_2)^* = -(s_1^+\varepsilon\gamma_5 M^* s_2^*) = (\bar{s}_1\beta\varepsilon\gamma_5 M^*\beta\varepsilon\gamma_5 s_2).$$

(Знак минус в среднем члене возникает из-за взаимной перестановки s_1 и s_2, что происходит, когда мы производим комплексное сопряжение.) Но из формул (5.4.40) и (26.A.6) следует равенство $\beta\varepsilon\gamma_\mu^*\beta\varepsilon\gamma_5 = \gamma_\mu$, так что

$$\beta\varepsilon\gamma_5 M^*\beta\varepsilon\gamma_5 = \begin{cases} +M & M = 1, \gamma_\mu, [\gamma_\mu, \gamma_\mu] \\ -M & M = \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5 \end{cases}, \tag{26.A.20}$$

и, следовательно,

$$(\bar{s}_1 M s_2)^* = \begin{cases} +(\bar{s}_1 M s_2) & M = 1, \gamma_\mu, [\gamma_\mu, \gamma_\mu] \\ -(\bar{s}_1 M s_2) & M = \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5 \end{cases}. \tag{26.A.21}$$

В заключение напоминаем, что любой спинор u может быть записан через пару майорановских спиноров $s_\pm$ в виде

$$u = s_+ + s_-, \tag{26.A.22}$$

где

$$s_+ \equiv \frac{1}{2}(u - \beta\varepsilon\gamma_5 u^*), \quad s_- \equiv \frac{1}{2i}(u + \beta\varepsilon\gamma_5 u^*). \tag{26.A.23}$$

Чтобы проверить, что $s_\pm$ — майорановские спиноры, удовлетворяющие уравнению (26.A.2), необходимо только вспомнить, что матрица $\beta\varepsilon\gamma_5$ действительна и что $(\beta\varepsilon\gamma_5)^2 = 1$.

Задачи

1. Используя прямой метод из раздела 26.1, найдите в случае $N = 2$ суперсимметрии законы преобразования супермультиплета массивных полей

с единственнным майорановским спинорным полем и двумя комплексными скалярами относительно преобразований суперсимметрии.

2. Вычислите компонентные поля обращенного по времени суперполя

$$\mathrm{T}^{-1}S(x,\theta)\mathrm{T},$$

выразив их через компоненты суперполя $S(x,\theta)$. Какого рода суперполе получится при обращении по времени левокирального суперполя? Линейного суперполя?

3. Рассмотрим $N=1$ суперсимметричную теорию одного левокирального суперполя Φ. В суперполевых обозначениях перечислите все члены размерности 5, включающие Φ и(или) Φ^*, которые могут быть добавлены к лагранжевой плотности.

4. Рассмотрим теорию трех левокиральных скалярных суперполей Φ_1, Φ_2 и Φ_3 с обычным кинематическим членом и суперпотенциалом

$$f(\Phi_1, \Phi_2\Phi_3) = \Phi_1\Phi_3^2 + \Phi_2(\Phi_3^2 + a)$$

где a — ненулевая действительная постоянная. Покажите, что это теория со спонтанно нарушенной суперсимметрией. Найдите минимальное значение потенциала. Выразите поле голдстино через фермионные компоненты Φ_1, Φ_2 и Φ_3.

5. Выразите все компоненты токового суперполя для действия (26.6.9) через компоненты левокиральных суперполей Φ_n и производные суперпотенциала f и потенциала Келера K.

6. Убедитесь в том, что ток суперсимметрии, определяемый (26.7.18) и (26.7.10), связан с ω -компонентой суперполя (26.7.21) соотношением (26.7.20).

Список литературы

1. A. Salam and J. Strathdee, *Nucl. Phys.* **B76**, 477 (1974). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersymmetry*, S. Ferrara, ed. (North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapore, 1987).

2. J. Wess and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B70**, 13 (1974). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersymmetry* [1].

3. L. O'Raifeartaigh, *Nucl. Phys.* **B96**, 331 (1975). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersymmetry* [1].

4. F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization* (Academic Press, New York, 1966) (на русском языке см. Ф. А. Березин, Метод вторичного квантования (М.: Наука, 1986).

5. J. Iliopoulos and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B76**, 310 (1974); S. Ferrara and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B87**, 207 (1975). Эти статьи перепечатаны в сб.: *Supersymmetry* [1].

6. Изложение в этом разделе следует подходу С. Феррара и Б. Зумино [5]

7. X. Grácia and J. Pons, *J. Phys.* **A25**, 6357 (1992). Я благодарен X. Гомесу (J. Gomis) за предложение использовать уравнение, приравнивающее коэффициенты при $\ddot{q}^n$.

7a. M. T. Grisaru, в книге: *Recent Developments in Gravitation – Cargése 1978*, M. Lévy and S. Deser, eds. (Plenum Press, New York, 1979), p. 577.

8. B. Zumino, *Phys. Lett.* **87B**, 203 (1979). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersymmetry* [1].

9. P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry* (Wiley, New York, 1978), p. 109. Благодарю Д. Фрида (D. Freed) за то, что он сообщил мне об этом применении общей теоремы.

27

Суперсимметричные калибровочные теории

Все успешные теории сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий, описанные в первых двух томах, являются калибровочными. Чтобы увидеть, может ли простая суперсимметрия быть связана с реальным миром, необходимо научиться строить действия, которые являются как суперсимметричными, так и калибровочно-инвариантными [1].

27.1. Калибровочно-инвариантные действия для киральных суперполей

Рассмотрим множество абелевых или неабелевых калибровочных преобразований, оставляющих инвариантным генератор суперсимметрии Q. (Для простой суперсимметрии существует лишь один генератор суперсимметрии, имеющий вид майорановского спинора, который может реализовать только тривиальное представление любой полупростой калибровочной группы.) При таких калибровочных преобразованиях все компоненты поля в супермультиплете должны преобразовываться одинаково. В частности, для левокирального суперполя имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) &\to \sum_m \left[\exp\left(i\sum_A t_A \Lambda^A(x)\right)\right]_{nm} \varphi_m(x),\\
\psi_{nL}(x) &\to \sum_m \left[\exp\left(i\sum_A t_A \Lambda^A(x)\right)\right]_{nm} \psi_{mL}(x),\\
\mathscr{F}_n(x) &\to \sum_m \left[\exp\left(i\sum_A t_A \Lambda^A(x)\right)\right]_{nm} \mathscr{F}_m(x),
\end{aligned} \tag{27.1.1}$$

где t_A — эрмитовы матрицы, представляющие генераторы калибровочной алгебры; $\Lambda^A(x)$ — действительные функции x^μ, параметризующие конечное калибровочное преобразование. (Мы используем те же обозначения для калибровочных преобразований, что и в разделе 15.1, но, чтобы избежать путаницы с дираковскими индексами, калибровочные генераторы и параметры калибровочного преобразования обозначаем буквами A, B и т. д. вместо α, β и т. д.)

Левокиральное суперполе (26.3.11) содержит производные некоторых компонент полей, так что его преобразование более сложно, чем то, которое задается формулой (27.1.1). Однако формула (26.3.21) показывает, что суперполе не содержит производных, если его выразить через θ_L и переменную x_+, определенную соотношением (26.3.23). Поэтому оно преобразуется по правилу

$$\Phi_n(x,\theta) \to \sum_m \left[\exp\Big(i\sum_A t_A \Lambda^A(x_+)\Big)\right]_{nm} \Phi_m(x,\theta). \qquad (27.1.2)$$

Если член в действии зависит только от левокиральных суперполей и не зависит от их производных или комплексно сопряженных полей, типа члена $\int d^4x[f(\Phi)]_{\mathscr{F}}$ в (26.3.30), тогда этот член (и ему комплексно сопряженный) будет инвариантным относительно локального преобразования (27.1.2), если при этом он инвариантен относительно глобальных преобразований с независящими от x^μ функциями $\Lambda^A(x)$. Необходимость вводить калибровочные поля в перенормируемых теориях киральных суперполей возникает только в D-членах, содержащих как Φ_n, так и Φ_n^*. Поскольку матрицы t_A эрмитовы, эрмитово сопряженное к выражению (27.1.2) имеет вид

$$\Phi_n^\dagger(x,\theta) \to \sum_m \Phi_m^\dagger(x,\theta)\left[\exp\Big(-i\sum_A t_A \Lambda^A(x_+)^*\Big)\right]_{nm}. \qquad (27.1.3)$$

Если бы не различие между $\Lambda^A(x_+)^* = \Lambda^A(x_-)$ и $\Lambda^A(x_+)$, то можно было бы сказать, что $\Phi^\dagger$ преобразуется по представлению калибровочной группы, контраградиентному к представлению, реализованному суперполем Φ, и любая функция от Φ и $\Phi^\dagger$, инвариантная относительно глобальных калибровочных преобразований, инвариантна также относительно локальных калибровочных преобразований. Поскольку x_+ и x_- — разные, мы должны ввести калибровочную матрицу связи $\Gamma_{nm}(x,\theta)$, закон преобразования которой имеет вид

$$\Gamma(x,\theta) \to \exp\Big(+i\sum_A t_A \Lambda^A(x_+)^*\Big)\Gamma(x,\theta)\exp\Big(-i\sum_A t_A \Lambda^A(x_+)\Big). \qquad (27.1.4)$$

Затем, умножая $\Phi^\dagger$ справа на Γ, получаем, что суперполе преобразуется как

$$\Big[\Phi^\dagger(x,\theta)\Gamma(x,\theta)\Big]_n \to \sum_m \Big[\Phi^\dagger(x,\theta)\Gamma(x,\theta)\Big]_m \left[\exp\Big(-i\sum_A t_A \Lambda^A(x_+)\Big)\right]_{nm}, \qquad (27.1.5)$$

так что любая глобально калибровочно-инвариантная функция, построенная из Φ и $\Phi^\dagger\Gamma$ (и не содержащая их производных или комплексно сопряженных), также будет локально калибровочно-инвариантной. Очевидным примером является калибровочно-инвариантное выражение $(\Phi^\dagger\Gamma\Phi)_D$ для D-члена в лагранжиане, построенном в разделе 26.4.

Любая матрица $\Gamma(x,\theta)$, преобразующаяся так же, как в (27.1.4), позволяет построить калибровочно-инвариантные лагранжианы киральных суперполей. Сделанный выбор не единственный; если взять матрицу Γ, преобразующуюся как в (27.1.4), и умножить ее справа на любое левокиральное суперполе Υ_L, которое преобразуется по закону

$$\Upsilon_L(x,\theta)\to\exp\Big(+i\sum_A t_A\Lambda^A(x_+)\Big)\Upsilon_L(x,\theta)\exp\Big(-i\sum_A t_A\Lambda^A(x_+)\Big),$$

то получим новую калибровочную связь, также удовлетворяющую закону преобразования (27.1.4). Возможное упрощение — выбрать $\Gamma(x,\theta)$ эрмитовой матрицей:

$$\Gamma^\dagger(x,\theta)=\Gamma(x,\theta) \tag{27.1.6}$$

Это всегда возможно, если существует $\Gamma(x,\theta)$, удовлетворяющая (27.1.4); тогда, взяв эрмитовое сопряжение от (27.1.4), легко увидеть, что $\Gamma^\dagger(x,\theta)$ преобразуется также, как и $\Gamma(x,\theta)$. Поэтому, если $\Gamma(x,\theta)$ неэрмитова, ее можно заменить эрмитовой частью $(\Gamma+\Gamma^\dagger)/2$ (или, если это равно нулю, то антиэрмитовой частью $(\Gamma-\Gamma^\dagger)/2i$). Другое упрощение, имеющее важное физическое значение, состоит в том, чтобы выразить $\Gamma(x,\theta)$ через поля, для которых свойства калибровочных преобразований не зависят от конкретного представления t_A калибровочной алгебры, по которому преобразуется киральное суперполе $\Phi(x,\theta)$. Тогда эти поля можно использовать для построения подходящей матрицы $\Gamma(x,\theta)$ для киральных суперполей, преобразующихся по любому представлению калибровочной группы. С этой целью полезно вспомнить формулу Бейкера–Хаусдорфа, согласно которой для произвольных матриц a и b выполняется равенство

$$e^ae^b=\exp\Big(a+b+\frac{1}{2}[a,b]+\frac{1}{12}[a,[a,b]]+\frac{1}{12}[b,[a,b]]+\ldots\Big), \tag{27.1.7}$$

где «...» обозначает члены более высокого порядка, являющиеся многократными коммутаторами матриц a и b, аналогично выписанным здесь явно членам второго и третьего порядка. Из этого следует, что для любого представления алгебры Ли

$$\exp\Big(\sum_A a^At_A\Big)\exp\Big(\sum_A b^At_A\Big)=\exp\Big(\sum_A f^A(a,b)t_A\Big), \tag{27.1.8}$$

где

$$f^A(a,b) = a^A + b^A + \frac{1}{2}i\sum_{BC} C^A_{BC}a^Bb^C - \frac{1}{12}\sum_{BCDE} C^A_{BC}C^C_{DE}a^Ba^Db^E$$
$$- \frac{1}{12}\sum_{BCDE} C^A_{BC}C^C_{DE}b^Bb^Da^E + \ldots, \qquad (27.1.9)$$

зависит от алгебры Ли через ее структурные константы C^A_{BC}, определенные, как обычно, выражением

$$[t_B, t_C] = i\sum_A C^A_{BC}t_A,$$

и не зависит от конкретного представления, реализуемого операторами t_A. Поэтому возьмем $\Gamma(x,\theta)$ в виде

$$\Gamma(x,\theta) = \exp\Big(-2\sum_A t_A V^A(x,\theta)\Big), \qquad (27.1.10)$$

где $V^A(x,\theta)$ — множество действительных суперполей (так что Γ — эрмитова матрица), не зависящих от представления калибровочной алгебры, реализуемого операторами t_A.

Можно сделать еще одно важное упрощение, обратив внимание на дополнительную симметрию суперсимметричных калибровочных теорий. Если некоторая функция полей Φ и $\Phi^\dagger\Gamma$ инвариантна относительно глобальных калибровочных преобразований, то она автоматически будет инвариантной не только относительно локальных калибровочных преобразований (27.1.2)–(27.1.4), но также относительно более широкой группы расширенных калибровочных преобразований

$$\Phi_{nL}(x,\theta) \to \sum_m \Big[\exp\Big(i\sum_A t_A\Omega^A(x,\theta)\Big)\Big]_{nm}\Phi_{mL}(x,\theta) \qquad (27.1.11)$$

и

$$\Gamma(x,\theta) \to \exp\Big(-i\sum_A t_A\Omega^A(x,\theta)\Big)\Gamma(x,\theta)\exp\Big(+i\sum_A t_A\Omega^A(x,\theta)^*\Big), \qquad (27.1.12)$$

где $\Omega^A(x,\theta)$ — произвольное левокиральное суперполе, т. е. произвольная функция как θ_L, так и x_+. При таком преобразовании

$$V^A(x,\theta) \to V^A(x,\theta) + \frac{i}{2}\Big[\Omega^A(x,\theta) - \Omega^A(x,\theta)^*\Big] + \ldots, \qquad (27.1.13)$$

где «...» обозначает члены, возникающие от коммутаторов в формуле (27.1.7), первого и более высокого порядков по калибровочным константам связи. Как и левокиральное суперполе общего вида, Ω может быть записано в виде (26.3.11)

$$\begin{aligned}\Omega^A(x,\theta) =& W^A(x) - \sqrt{2}\left(\bar{\theta}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)w^A(x)\right) + \mathcal{W}^A(x)\left(\bar{\theta}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\theta\right)\\ &+\frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta)\partial^\mu W^A(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\left(\bar{\theta}\not{\partial}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)w^A\right)\\ &-\frac{1}{8}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2\Box W^A(x),\end{aligned} \tag{27.1.14}$$

где $W^A(x)$ и $\mathcal{W}^A(x)$ — произвольные комплексные функции x^μ. Здесь введены майорановские спиноры $w^A(x)$, определенные так, что левые спинорные компоненты суперполей имеют вид $\frac{1}{2}(1+\gamma_5)w^A(x)$. Используя свойства комплексного сопряжения (26.A.21) для майорановских билинейных комбинаций, и выпоняя комплексное сопряжение (27.1.14), имеем:

$$\begin{aligned}\Omega^A(x,\theta) =& W^A(x) - \sqrt{2}\left(\bar{\theta}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)w^A(x)\right) + \mathcal{W}^{A*}(x)\left(\bar{\theta}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\theta\right)\\ &-\frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta)\partial^\mu W^{A*}(x)\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\left(\bar{\theta}\not{\partial}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)w^A\right)\\ &+\frac{1}{8}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2\Box W^{A*}(x).\end{aligned} \tag{27.1.15}$$

Действительные суперполя $V^A(x,\theta)$ записываются через компоненты полей так же, как в (26.2.10):

$$\begin{aligned}V^A(x,\theta) =& C^A(x) - i\left(\bar{\theta}\gamma_5\omega^A(x)\right) - \frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)M^A(x) - \frac{1}{2}\left(\bar{\theta}\theta\right)N^A(x)\\ &+\frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)V^A_\mu(x) - i\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)\left(\bar{\theta}\left[\lambda^A(x)+\frac{1}{2}\not{\partial}\omega^A(x)\right]\right)\\ &-\frac{1}{4}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)^2\left(D^A(x)+\frac{1}{2}\Box C^A(x)\right),\end{aligned} \tag{27.1.16}$$

где $C^A(x)$, $M^A(x)$, $N^A(x)$ и $V^A_\mu(x)$ все действительны; $\omega^A(x)$ и $\lambda^A(x)$ — майорановские спиноры. Подставляя (27.1.14)–(27.1.16) в (27.1.13), получаем, что компоненты полей калибровочного суперполя подвергаются расширенному калибровочному преобразованию

$$
\begin{aligned}
&C^A(x) \to C^A(x) - \operatorname{Im} W^A(x) + \ldots, \\
&\omega^A(x) \to \omega^A(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} w^A(x) + \ldots, \\
&V^A_\mu(x) \to V^A_\mu(x) + \partial_\mu \operatorname{Re} W^A(x) + \ldots, \\
&M^A(x) \to M^A(x) - \operatorname{Re} \mathscr{W}^A(x) + \ldots, \\
&N^A(x) \to N^A(x) + \operatorname{Im} \mathscr{W}^A(x) + \ldots, \\
&\lambda^A(x) \to \lambda^A(x) + \ldots, \\
&D^A(x) \to D^A(x) + \ldots,
\end{aligned}
\tag{27.1.17}
$$

где опять «...» обозначает члены, возникающие из структурных констант в формуле (27.1.9), и которые поэтому пропорциональны одной или более степеням калибровочных констант связи. Такое расширенное калибровочное преобразование можно использовать для записи калибровочных суперполей в удобной форме, известной как *калибровка Весса–Зумино* [1], когда

$$C^A(x) = \omega^4(x) = M^A(x) = N^A(x) = 0, \tag{27.1.18}$$

В этом случае

$$
\begin{aligned}
V^A(x,\theta) = &\frac{i}{2}\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\mu\theta\right) V^A_\mu(x) - i\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)\left(\bar\theta\lambda^A(x)\right) \\
&- \frac{1}{4}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2 D^A(x).
\end{aligned}
\tag{27.1.19}
$$

Чтобы это выражение было нулевого порядка по константам связи, необходимо только положить $\operatorname{Im} W^A(x) = C^A(x)$, $w^A(x) = -\sqrt{2}\omega^A(x)$ и $\mathscr{W}^A(x) = M^A(x) - iN^A(x)$. Тогда для абелевых калибровочных теорий, не содержащих структурных констант, задача решена. Для неабелевых калибровочных теорий к $\operatorname{Im} W^A(x)$, $w^A(x)$ и $\mathscr{W}^A(x)$ необходимо добавить члены первого порядка по калибровочным константам связи, чтобы сократить слагаемые, возникающие от коммутаторов членов нулевого порядка; после этого к $\operatorname{Im} W^A(x)$, $w^A(x)$ и $\mathscr{W}^A(x)$ добавить члены второго порядка по калибровочным константам связи, чтобы сократить слагаемые, возникающие из коммутаторов членов первого порядка с членами нулевого порядка, и т. д. Вычислять ряд членов в $\operatorname{Im} W^A(x)$, $w^A(x)$ и $\mathscr{W}^A(x)$, необходимых для удовлетворения калибровочных условий (27.1.18) во всех порядках по калибровочным константам связи, совсем не просто, но в этом нет необходимости — важно то, что это можно сделать.

Исследование законов преобразования (26.2.11)–(26.2.14) показывает, что калибровочное условие Весса–Зумино (27.1.18) неинвариантно относительно суперсимметричных преобразований, если только не выполены условия $V^A_\mu = \lambda^A = 0$, а условие $\lambda^A = 0$ не суперсимметрично, если также не выполняется $D^A = 0$, а в этом случае все суперполе обращается в нуль. Как только выбирается калибровка Весса–Зумино, действие перестает быть инвариантным как относительно произвольных расширенных калибровочных преобразований, так и относительно преобразований суперсимметрии, но оно остается инвариантным относительно суперсимметричных преобразований, нарушающих калибровку Весса–Зумино, за которыми следуют подходящие расширенные калибровочные преобразования, возвращающие назад к калибровке Весса–Зумино. (В явном виде это будет сделано в разделе 27.8.) Как мы сейчас покажем, действие также инвариантно относительно обычных калибровочных преобразований (27.1.2)–(27.1.4), сохраняющих калибровку Весса–Зумино.

Взяв калибровочное суперполе, удовлетворяющее калибровочному условию Весса–Зумино (27.1.18), сравнительно легко вычислить его поведение при обычных бесконечно малых калибровочных преобразованиях. В этом случае $\Omega^A(x_+)$ являются левокиральными суперполями вида (26.3.11), без компонент ψ_L и $\mathscr{F}$, а φ-компоненты даются *действительными* бесконечно малыми функциями $\Lambda^A(x)$:

$$\Omega^A(x_+) = \Lambda^A(x) + \frac{1}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta\right)\partial^\mu\Lambda^A(x) - \frac{1}{8}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)^s\Box\Lambda^A(x). \tag{27.1.20}$$

Для вычисления произведения экспонент в законе преобразования (27.1.4), воспользуемся другим выражением для формулы Бейкера–Хаусдорфа:

$$\exp(a)\exp(X)\exp(b) = \exp\left(X + L_X\cdot(b-a) + (L_X \operatorname{cth} L_X)\cdot(b+a) + \ldots\right), \tag{27.1.21}$$

где a, b и X — произвольные матрицы, L_X — оператор,

$$L_X\cdot f = \frac{1}{2}[X,f], \tag{27.1.22}$$

и «...» обозначает члены второго и более высокого порядков по a и (или) b. В нашем случае имеем

$$b+a = 2\sum_A t_A \operatorname{Im}\Lambda^A(x_+) = -i\left(\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta\right)\sum_A t_A\partial^\mu\Lambda^A(x),$$

$$b-a = -2i\sum_A t_A \operatorname{Re}\Lambda^A(x_+) = -2i\sum_A t_A\left[\Lambda^A(x) - \frac{1}{8}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)^2\Box\Lambda^A(x)\right],$$

$$X = -2\sum_A t_A V^A(x,\theta) = -2\sum_A t_A \left[\frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta\right) V^A_\mu(x)\right.$$
$$\left. - i\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)\left(\bar{\theta}\lambda^A(x)\right) - \frac{1}{4}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)^2 D^A(x)\right].$$

Теперь каждый член в X содержит, по крайней мере, один множитель θ_L и один множитель θ_R; в силу того, что $a+b$ имеет только один множитель θ_L и один множитель θ_R, можно опустить в $L_X \operatorname{cth} L_X$ все члены второго и более высокого порядков по L_X. Поскольку $L_X \operatorname{cth} L_X$ является *четной* функцией L_X, можно заменить ее членом нулевого порядка по L_X, равным единице. Кроме того, можно опустить член в $b-a$, пропорциональный $(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2$, поскольку в результате действия L_X получатся, по крайней мере, три множителя, включающие либо θ_L, либо θ_R. Таким образом, аргумент экспоненты в правой части формулы (27.1.21) можно заменить на

$$X + \frac{1}{2}[X, b-a] + b + a = -2\sum_A t_A \left[V^A(x,\theta) + \sum_{BC} C^A_{BC} S^B(x,\theta)\Lambda^C(x)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\partial^\mu\Lambda^A(x)\right].$$

Итак, для бесконечно малых калибровочных преобразований закон преобразования (27.1.4) дает

$$V^A(x,\theta) \to V^A(x,\theta) + \sum_{BC} C^A_{BC} S^B(x,\theta)\Lambda^C(x) + \frac{1}{2} i\left(\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\partial^\mu\Lambda^A(x). \quad (27.1.23)$$

Важно заметить, что при обычных калибровочных преобразованиях калибровочное суперполе в калибровке Весса–Зумино остается в рамках этой калибровки. Если записать формулы (27.1.23) через компонентные поля, входящие в выражение (27.1.19), то

$$V^A_\mu(x) \to \sum_{BC} C^A_{BC} V^B_\mu(x)\Lambda^C(x) + \partial_\mu\Lambda^A(x), \quad (27.1.24)$$

$$\lambda^A(x) \to \sum_{BC} C^A_{BC}\lambda^B(x)\Lambda^C(x), \quad (27.1.25)$$

$$D^A(x) \to \sum_{BC} C^A_{BC} D^B(x)\Lambda^C(x), \quad (27.1.26)$$

Формула (27.1.24) оказывается обычным янг–миллсовским законом калибровочного преобразования (15.1.9) для калибровочного поля, а из формул (27.1.25) и (27.1.26) следует, что поля $\lambda^A(x)$ и $D^A(x)$ преобразуются как поля материи, принадлежащие присоединенному представлению калибровочной группы. Майорановские спиноры λ^A известны как поля *калибрино*, а действительные скаляры D^A оказываются другим множеством вспомогательных полей.

Теперь следует вычислить матрицу Γ, необходимую для построения калибровочно-инвариантных функций киральных суперполей. Поскольку все члены, содержащие более четырех множителей θ, обращаются в нуль, то в калибровке Весса–Зумино разложение экспоненты очень простое:

$$\begin{aligned}\Gamma(x,\theta) &= \exp\Big(-2\sum_A t_A V^A(x,\theta)\Big)\\ &= 1 - i\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\sum_A t_A V^A_\mu(x)\\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\sum_{AB} t_A t_B V^A_\mu(x)V^B_\nu(x)\\ &\quad +2i\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)\sum_A t_A\left(\bar\theta\lambda^A(x)\right)+\frac{1}{2}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2\sum_A t_A D^A(x).\end{aligned}$$

Калибровочно-инвариантную плотность можно построить, умножив это выражение справа на вектор-столбец левокиральных суперполей вида (26.3.11):

$$\begin{aligned}\Phi_n(x,\theta) &= \varphi_n(x) - \sqrt{2}\left(\bar\theta\psi_{nL}(x)\right) + \mathscr{F}_n(x)\left(\bar\theta\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\theta\right)\\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\partial^\mu\varphi_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)\left(\bar\theta\not{\partial}\psi_{nL}(x)\right)\\ &\quad -\frac{1}{8}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2\sqrt{\varphi_n}(x),\end{aligned}$$

а слева на столбец

$$\begin{aligned}\Phi_n(x,\theta)^* &= \varphi^*_n(x) - \sqrt{2}\left(\bar\theta\psi_{nL}(x)\right) + \mathscr{F}^*_n(x)\left(\bar\theta\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\theta\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\partial^\mu\varphi^*_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)\partial_\mu\left(\overline{\psi_{nL}(x)}\gamma^\mu\theta\right)\\ &\quad -\frac{1}{8}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2\sqrt{\varphi^*_n}(x).\end{aligned}$$

Член четвертого порядка по θ, в этом произведении имеет вид

$$\begin{aligned}\left[\Phi^\dagger\Gamma\Phi\right]_{\theta^4} &= -\frac{1}{8}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2\Big\{\left[\varphi^\dagger\Box\varphi\right]+\left[\left(\Box\varphi^\dagger\right)\dot\varphi\right]\Big\}\\ &\quad +\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)\Big\{\left[\left(\overline{\psi_L}\theta\right)\left(\bar\theta\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L\right)\right]+\left[\left(\left(\partial_\mu\overline{\psi_L}\right)\gamma^{mu}\theta\right)\left(\bar\theta\psi_L\right)\right]\Big\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{4}\left(\bar\theta(1-\gamma_5)\theta\right)\left(\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\right)\left[\mathscr{F}^\dagger\mathscr{F}\right]\\
&-\frac{1}{4}\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\nu\theta\right)\left[\partial_\mu\varphi^\dagger\partial_\nu\varphi\right]\\
&-\frac{i}{2}\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\nu\theta\right)\sum_A V_\mu^A\Big\{\left[\varphi^\dagger t_A\partial_\nu\varphi\right]-\left[\left(\partial_\nu\varphi^\dagger\right)t_A\varphi\right]\Big\}\\
&-\frac{1}{2}\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\nu\theta\right)\sum_{AB} V_\mu^A V_\nu^B\left[\varphi^\dagger t_A t_B\varphi\right]\\
&-2i\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\mu\theta\right)\sum_A V_\mu^A\left[\left(\overline{\psi_L}\theta\right)t_A\left(\bar\theta\psi_L\right)\right]\\
&-2i\sqrt{2}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)\sum_A\left[\left(\overline{\psi_L}\theta\right)t_A\left(\bar\theta\lambda^A\right)\varphi\right]\\
&-2i\sqrt{2}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)\sum_A\left[\varphi^\dagger\left(\overline{\lambda^A}\theta\right)t_A\left(\bar\theta\psi_L\right)\right]\\
&+\frac{1}{2}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2\sum_A D_A\left[\varphi^\dagger t_A\varphi\right].
\end{aligned}
$$

Здесь использованы квадратные скобки, чтобы показать скалярные произведения по индексам аромата n и m, и по-прежнему использованы круглые скобки, чтобы показать скалярные произведения по дираковским индексам. Как и в разделе 26.4, можно воспользоваться тождествами (26.A.17)–(26.A.19), чтобы собрать всю зависимость от θ в общий множитель $\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2$:

$$
\begin{aligned}
\left[\Phi^\dagger\Gamma\Phi\right]_{\theta^4}=\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2\Big\{&-\frac{1}{8}\left[\varphi^\dagger\Box\varphi\right]-\frac{1}{8}\left[\left(\Box\varphi^\dagger\right)\varphi\right]+\frac{1}{4}\left[\left(\overline{\psi_L}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L\right)\right]\\
&-\frac{1}{4}\left[\left(\left(\partial_\mu\overline{\psi_L}\right)\gamma^\mu\psi_L\right)\right]-\frac{1}{2}\left[\mathscr{F}^\dagger\mathscr{F}\right]+\frac{1}{4}\left[\partial_\mu\varphi^\dagger\partial^\mu\varphi\right]\\
&+\frac{i}{2}\sum_A V_\mu^A\left[\varphi^\dagger t_A\partial^\mu\varphi\right]-\frac{i}{2}\sum_A V_\mu^A\left[\left(\partial^\mu\varphi^\dagger\right)t_A\varphi\right]\\
&+\frac{1}{2}\sum_{AB} V_\mu^A V^{B\mu}\left[\varphi^\dagger t_A t_B\varphi\right]-\frac{i}{2}\sum_A V_\mu^A\left[\left(\overline{\psi_A}\gamma^\mu t_A\psi_A\right)\right]\\
&-\frac{i}{\sqrt{2}}\sum_A\left[\left(\overline{\psi_L}t_A\lambda^A\right)\varphi\right]+\frac{i}{\sqrt{2}}\sum_A\left[\varphi^\dagger\left(\overline{\lambda^A}t_A\psi_L\right)\right]\\
&+\frac{1}{2}\sum_A D_A\left[\varphi^\dagger t_A\varphi\right]\Big\}.
\end{aligned}
$$

D-член является коэффициентом при $-\frac{1}{4}\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\right)^2$ за вычетом $\frac{1}{2}\Box$, действующего на независящий от θ член, который для $\left[\Phi^\dagger\Gamma\Phi\right]$ равен $\left[\varphi^\dagger\varphi\right]$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left[\Phi^\dagger\Gamma\Phi\right]_D = &-2\left[\partial_\mu\varphi^\dagger\partial^\mu\varphi\right] \\
&-\left[\left(\overline{\psi_L}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L\right)\right]+\left[\left(\left(\partial_\mu\overline{\psi_L}\right)\gamma^\mu\psi_L\right)\right]+2\left[\mathcal{F}^\dagger\mathcal{F}\right] \\
&-2i\sum_A V^A_\mu\left[\varphi^\dagger t_A\partial^\mu\varphi\right]+2i\sum_A V^A_\mu\left[\left(\partial^\mu\varphi^\dagger\right)t_A\varphi\right] \\
&-2\sum_{AB}V^A_\mu V^{B\nu}\left[\varphi^\dagger t_A t_B\varphi\right]+2i\sum_A V^A_\mu\left[\left(\overline{\psi_A}\gamma^\mu t_A\psi_A\right)\right] \\
&+2i\sqrt{2}\sum_A\left[\left(\overline{\psi_L}t_A\lambda^A\right)\varphi\right]-2i\sqrt{2}\sum_A\left[\varphi^\dagger\left(\overline{\lambda^A}t_A\psi_L\right)\right] \\
&-2\sum_A D_A\left[\varphi^\dagger t_A\varphi\right].
\end{aligned}$$

Чтобы увидеть, что это выражение действительно калибровочно-инвариантно, заметим, что его можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\Phi^\dagger\Gamma\Phi\right]_D = &-\left[\left(D_\mu\varphi\right)^\dagger D^\mu\varphi\right] \\
&-\frac{1}{2}\left[\left(\overline{\psi_L}\gamma^\mu D_\mu\psi_L\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\overline{\left(D_\mu\psi_L\right)}\gamma^\mu\psi_L\right)\right]+\left[\mathcal{F}^\dagger\mathcal{F}\right] \\
&+i\sqrt{2}\sum_A\left[\left(\overline{\psi_L}t_A\lambda^A\right)\varphi\right]-i\sqrt{2}\sum_A\left[\varphi^\dagger\left(\overline{\lambda^A}t_A\psi_L\right)\right] \\
&-\sum_A D_A\left[\varphi^\dagger t_A\varphi\right],
\end{aligned}\tag{27.1.27}$$

где D_μ — калибровочно-инвариантная производная (15.1.10):

$$D_\mu\psi_L \equiv \partial_\mu\psi_L - i\sum_A t_A V^A_\mu\psi_L, \qquad D_\mu\varphi \equiv \partial_\mu\varphi - i\sum_A t_A V^A_\mu\varphi. \tag{27.1.28}$$

Таким образом, выражение (27.1.27) является калибровочно-инвариантным кинематическим лагранжианом для скалярных и спинорных компонент левокирального суперполя, дополненным юкавскими связями полей калибрино со скалярными и спинорными компонентами киральных суперполей, а также членами, содержащими вспомогательные поля $\mathcal{F}_n$ и D_A.

27.2. Калибровочно-инвариантное действие для абелевых калибровочных суперполей

Теперь необходимо понять, как построить калибровочно-инвариантное суперсимметричное действие для калибровочных суперполей $V^A(x,\theta)$, содержащее калибровочные поля $V^A_\mu(x)$. С этой целью сначала рассмотрим случай одного абелева калибровочного поля (опуская индекс A), а потом, в следующем разделе, вернемся к общему случаю.

В абелевой калибровочной теории типа квантовой электродинамики, построенное из $V_\mu(x)$ калибровочно-инвариантное поле является известным тензором напряженности поля

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu V_\nu(x) - \partial_\nu V_\mu(x). \tag{27.2.1}$$

Закон суперсимметричного преобразования для $f_{\mu\nu}(x)$ дается законом преобразования (26.2.15) для $V_\mu(x)$, т.е. имеет вид

$$\delta f_{\mu\nu} = \left(\bar{\alpha}\left(\partial_\mu \gamma_\nu - \partial_\nu \gamma_\mu\right)\lambda\right). \tag{27.2.2}$$

Закон преобразования для $\lambda(x)$ получается из (26.2.16) в виде

$$\delta\lambda = \left(-\frac{1}{4} f_{\mu\nu}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu] + i\gamma_5 D\right)\alpha, \tag{27.2.3}$$

а закон преобразования для $D(x)$ получаем из (26.2.17):

$$\delta D = i\,(\bar{\alpha}\gamma_5 \not{\partial}\lambda). \tag{27.2.4}$$

Ни один из этих законов не зависит от того, берется суперполе $S(x)$ в калибровке Весса–Зумино или нет. Отсюда видно, что поля $f_{\mu\nu}(x)$, $\lambda(x)$ и $D(x)$ образуют полный суперсимметричный мультиплет.

Для полей этого супермультиплета несложно построить соответствующую кинематический лагранжиан. Функции $f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$, $\bar{\lambda}\not{\partial}\lambda$ и D^2 являются единственными лоренц-инвариантными, сохраняющими четность и калибровочно-инвариантными функциями этих полей с размерностью четыре. Векторное поле V^μ можно стандартным образом отнормировать, взяв коэффициент при $f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$ равным $-\frac{1}{4}$, и тогда, в качестве пробы, можно написать кинематический лагранжиан в виде

$$\mathscr{L}_{\text{калибр}} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - c_\lambda\left(\bar{\lambda}\not{\partial}\lambda\right) - c_D D^2,$$

с коэффициентами c_λ и c_D, определяемыми из условия суперсимметричности $\int \mathscr{L}_{\text{калибр}} d^4x$. Используя законы преобразования (27.2.2)–(27.2.4), получаем, что бесконечно малые изменения операторов в лагранжиане за счет суперсимметричного преобразования имеют вид

$$\delta\left(f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}\right) = 2 f^{\mu\nu}\left(\bar{\alpha}\left(\gamma_\nu \partial_\mu - \gamma_\mu \partial_\nu\right)\right),$$

$$\delta\left(\bar{\lambda}\not{\partial}\lambda\right) = 2\left(\bar{\alpha}\left[+\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] + i\gamma_5 D\right]\not{\partial}\lambda\right),$$

$$\delta D^2 = 2iD\left(\bar{\alpha}\gamma_5 \not{\partial}\lambda\right),$$

где мы опустили члены с производными, потому что они не дают вклад в вариацию действия. Чтобы увидеть, как эти члены сокращаются, надо воспользоваться тождеством для γ-матриц*

$$[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\gamma^\rho = -2\eta^{\mu\rho}\gamma^\nu + 2\eta^{\nu\rho}\gamma^\mu - 2i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma\gamma_5. \tag{27.2.5}$$

Член $-i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f_{\mu\nu}\left(\overline{\alpha}\gamma_\sigma\gamma_5\partial_\rho\lambda\right)$ не дает вклада в $\int d^4x\delta\mathscr{L}$, потому что результат интегрирования по частям пропорционален $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho f_{\mu\nu}$ и обращается в нуль для $f_{\mu\nu}$ вида (27.2.1). Это тождество позволяет переписать вариацию λ-члена в виде

$$\delta\left(\overline{\lambda}\not{\partial}\lambda\right) = -f^{\mu\nu}\left(\overline{\alpha}\left(\gamma_\nu\partial_\mu - \gamma_\mu\partial_\nu\right)\lambda\right) + 2iD\left(\overline{\alpha}\gamma_5\not{\partial}\lambda\right).$$

Члены, пропорциональные $f^{\mu\nu}\lambda$, сокращаются при условии $c_\lambda = 1/2$, а члены, пропорциональные $D\lambda$, — при условии $c_D = -c_\lambda$. Тогда суперсимметричный лагранжиан принимает вид

$$\mathscr{L}_{\text{калибр}} = -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\overline{\lambda}\not{\partial}\lambda\right) + \frac{1}{2}D^2. \tag{27.2.6}$$

Отсюда видно, что при канонически нормированном поле V^μ, поле λ, связанное с V^μ законами преобразования (27.2.2) и (27.2.3), тоже канонически нормировано.

Кроме того, в абелевых калибровочных теориях существует суперперенормируемый член, известный как *член Файе–Иллиопулоса* [2]:

$$\mathscr{L}_{\text{ФИ}} = \xi D, \tag{27.2.7}$$

где ξ — произвольная константа. Закон преобразования (27.2.4) показывает, что вариация этого члена при суперсимметричном преобразовании будет полной производной, так что в действии появляется еще один суперсимметричный член. Как мы увидим в разделе 27.5, присутствие такого члена может обеспечить механизм спонтанного нарушения суперсимметрии.

Помимо нахождения инструмента для построения суперсимметричных взаимодействий, включающих поля $f_{\mu\nu}$, λ и D, отдельный интерес имеет вопрос, компонентами суперполя какого типа эти поля являются? Несколько неожиданно оказывается, что это будет *спинорное* суперполе $W_\alpha(x)$, компонентные поля которого (в обозначениях (26.2.10)) даются выражениями

*Для получения этого тождества воспользуемся тем фактом, что любая матрица 4×4 может быть представлена как линейная комбинация 16 независимых ковариантных матриц, описанных в разделе 5.4, выбор которых в нашем случае ограничен выписанными членами в силу лоренц-инвариантности и инвариантности относительно пространственной инверсии. Коэффициенты при этих членах можно вычислить, придавая $\mu\nu\rho$ значения 121 и 123.

$$
\begin{aligned}
&C_{(\alpha)}(x) = \lambda_\alpha(x),\\
&\omega_{(\alpha)\beta}(x) = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\varepsilon\right)_{\alpha\beta} f_{\mu\nu}(x) + (\gamma_5\varepsilon)_{\alpha\beta} D(x),\\
&V_{(\alpha)\mu}(x) = -i\partial_\mu\left(\gamma_5\lambda(x)\right)_\alpha,\\
&M_{(\alpha)}(x) = -i\left(\not\partial\gamma_5\lambda(x)\right)_\alpha, \qquad N_{(\alpha)}(x) = -\left(\not\partial\lambda(x)\right)_\alpha,\\
&\lambda_{(\alpha)\beta}(x) = D_{(\alpha)}(x) = 0.
\end{aligned}
\tag{27.2.8}
$$

(Нижний индекс α у компонентных полей заключен в скобки, чтобы подчеркнуть, что он относится ко всему суперполю.) Использование законов преобразования (27.2.2)–(27.2.4) позволяет непосредственно проверить, что компоненты суперполя, определенные в (27.2.8), действительно преобразуются по законам (26.2.11)–(26.2.17).

Подставив компоненты поля (27.2.8) в (26.2.10) и использовав формулу (26.A.5), получаем суперполе W_α в форме

$$
\begin{aligned}
W_\alpha = \Big[&\lambda(x) + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\theta f_{\mu\nu}(x) - i\gamma_5\theta D(x) - \frac{1}{2}\left(\theta^{\mathrm T}\varepsilon\theta\right)\not\partial\gamma_5\lambda(x)\\
&+\frac{1}{2}\left(\theta^{\mathrm T}\varepsilon\gamma_5\theta\right)\not\partial\lambda(x) + \frac{1}{2}\left(\theta^{\mathrm T}\varepsilon\gamma^\mu\theta\right)\gamma_5\partial_\mu\lambda(x)\\
&-\frac{1}{4}\left(\theta^{\mathrm T}\varepsilon\theta\right)\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\theta\partial_\sigma f_{\mu\nu}(x)\\
&+\frac{1}{2}i\left(\theta^{\mathrm T}\varepsilon\theta\right)\gamma^\sigma\theta\partial_\sigma D(x) - \frac{1}{8}\left(\theta^{\mathrm T}\varepsilon\theta\right)^2\Box\lambda(x)\Big]_\alpha.
\end{aligned}
\tag{27.2.9}
$$

Как было показано в разделе 26.3, аналогичное этому суперполе с нулевыми λ- и D-компонентами, является *киральным*, т. е. оно является суммой лево- и правокирального суперполей

$$
W(x,\theta) = W_L(x,\theta) + W_R(x,\theta). \tag{27.2.10}
$$

Здесь лево- и правокиральные суперполя являются просто проекциями W на подпространства с $\gamma_5 = +1$ и $\gamma_5 = -1$ соответственно:

$$
\begin{aligned}
W_L(x,\theta) &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)W(x,\theta)\\
&= \lambda_L(x_+) + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\theta_L f_{\mu\nu}(x_+) + \left(\theta_L^{\mathrm T}\varepsilon\theta_L\right)\not\partial\lambda_R(x_+) - i\theta_L D(x_+), \quad (27.2.11)\\
W_R(x,\theta) &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)W(x,\theta)\\
&= \lambda_R(x_-) + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\theta_R f_{\mu\nu}(x_-) - \left(\theta_R^{\mathrm T}\varepsilon\theta_R\right)\not\partial\lambda_L(x_-) - i\theta_R D(x_-), \quad (27.2.12)
\end{aligned}
$$

где $x_\pm^\mu$ дано формулой (26.3.23).

Как показано в разделе 26.3, можно построить соответствующий лагранжиан из $\mathcal{F}$-члена любой скалярной функции левокирального суперполя и ему эрмитово сопряженного. Простейшая скалярная функция левокирального суперполя (27.2.11) имеет вид $\sum_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{L\alpha}W_{L\beta}$. Чтобы вычислить $\mathcal{F}$-член, заметим, что член второго порядка по θ_L в $\sum_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{L\alpha}W_{L\beta}$, выраженный через θ_L и x_+, имеет вид

$$-\left[\sum_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{L\alpha}W_{L\beta}\right]_{\theta_L^2} = \left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L\right)\left[-2\left(\lambda_L^{\mathrm{T}}(x)\varepsilon\not{\partial}\lambda_R(x)\right)+D^2(x)\right]$$
$$+\frac{1}{16}\left(\overline{\theta_L}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]\left[\gamma^\rho,\gamma^\sigma\right]\theta_L\right)f_{\mu\nu}(x)f_{\rho\sigma}(x).$$

(Здесь в качестве аргументов поля вместо x_+^μ можно брать x^μ, потому что разность даст члены, содержащие, по крайней мере, три множителя θ_L и поэтому обращающиеся в нуль.) Из лоренц-инвариантности и того, что $\left(\bar{s}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]s\right)$ и $\left(\bar{s}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\gamma_5 s\right)$ равны нулю для любого майорановского спинора s, следует, что билинейная комбинация $\left(\overline{\theta_L}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]\left[\gamma^\rho,\gamma^\sigma\right]\theta_L\right)$ должна быть пропорциональна линейной комбинации $\left(\overline{\theta_L}\theta_L\right)\left(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}-\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\right)$ и $\left(\overline{\theta_L}\theta_L\right)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Коэффициенты в ней можно получить, придав индексам $\mu\nu\rho\sigma$ значения 1212 и 1230. Таким образом, получаем

$$\left(\overline{\theta_L}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]\left[\gamma^\rho,\gamma^\sigma\right]\theta_L\right) = 4\left(\overline{\theta_L}\theta_L\right)\left[-\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}+\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu rho}+i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\right].$$

$\mathcal{F}$-член является коэффициентом при $\left(\overline{\theta_L}\theta_L\right)$, тогда

$$-\left[\sum_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{L\alpha}W_{L\beta}\right]_{\mathcal{F}} = -2\left(\overline{\lambda_R}\not{\partial}\lambda_R\right)-\frac{1}{2}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}+\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f_{\mu\nu}f_{\rho\sigma}+D^2. \quad (27.2.13)$$

Формула (26.A.21) показывает, что множитель $\left(\bar{\lambda}\not{\partial}\lambda\right)$ действительный, а $\left(\bar{\lambda}\not{\partial}\gamma_5\lambda\right)$ — мнимый, так что действительная часть (27.2.13) дает лагранжиан (27.2.6) для калибровочных полей и полей калибрино

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\sum_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{L\alpha}W_{L\beta}\right]_{\mathcal{F}} = -\frac{1}{2}\left(\bar{\lambda}\not{\partial}\lambda\right)-\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}+\frac{1}{2}D^2. \quad (27.2.14)$$

Физическое значение мнимой части будет обсуждаться в более общем контексте в следующем разделе.

Существует другой путь вывода формы спинорного суперполя, который окажется более удобным для получения компонент калибровочного суперполя в неабелевых калибровочных теориях. Громоздкое, но несложное вычисление показывает, что калибровочно-инвариантное суперполе (27.2.9) можно выразить через калибровочное суперполе (27.1.16) в виде

$$W_\alpha(x,\theta) = \frac{i}{4}\left(\mathscr{D}^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}\right)\mathscr{D}_\alpha V(x,\theta), \tag{27.2.15}$$

где $\mathscr{D}_\alpha$ — суперпроизводная, определенная в (26.2.26):

$$\mathscr{D}_\alpha \equiv \sum_\beta (\gamma_5\varepsilon)_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_\beta} - (\gamma^\mu\theta)\frac{\partial}{\partial x^\mu} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_\alpha} - (\gamma^\mu\theta)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

Этот результат мог бы быть получен (с точностью до нормировочного множителя), если заметить, что функция (27.2.15) является желаемым калибровочно-инвариантным киральным спинорным суперполем. Прежде всего заметим, что выражение (27.2.15) является суперполем, потому что оно получено действием суперпроизводных на суперполе V. Кроме того, из антикоммутации производных $\mathscr{D}$ следует, что произведение трех и более $\mathscr{D}_L$ или трех и более полей $\mathscr{D}_R$ равно нулю, так что

$$\left(\mathscr{D}^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}\right)\mathscr{D} = \left(\mathscr{D}_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_L\right)\mathscr{D}_R + \left(\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R\right)\mathscr{D}_L. \tag{27.2.16}$$

Поскольку $\mathscr{D}_L\left(\mathscr{D}_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_L\right) = \mathscr{D}_R\left(\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R\right) = 0$, суперполе (27.2.15) киральное с

$$W_{L\alpha}(x,\theta) = \frac{i}{4}\left(\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R\right)\mathscr{D}_{L\alpha}V(x,\theta), \quad W_{R\alpha}(x,\theta) = \frac{i}{4}\left(\mathscr{D}_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_L\right)\mathscr{D}_{R\alpha}V(x,\theta). \tag{27.2.17}$$

Наконец, можно показать, что суперполе (27.2.15) инвариантно относительно обобщенного калибровочного преобразования (27.1.13), которое для одного абелева калибровоченого суперполя есть просто

$$V(x,\theta) \to V(x,\theta) + \frac{i}{2}\left[\Omega(x,\theta) - \Omega^*(x,\theta)\right], \tag{27.2.18}$$

где $\Omega(x,\theta)$ — произвольное левокиральное суперполе. Поскольку $\mathscr{D}_L\Omega^* = 0$, изменение в $W_{L\alpha}$ пропорционально $\left(\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R\right)\mathscr{D}_{L\alpha}\Omega$. Но $\mathscr{D}_R\Omega = 0$ и

$$\left[\left(\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R\right), \mathscr{D}_{L\alpha}\right] = -2\left[(1+\gamma_5)\not{\partial}\mathscr{D}_R\right]_\alpha,$$

так что изменение в $W_{L\alpha}$ равно нулю. Простые соображения показывают, что $W_{R\alpha}$ также калибровочно-инвариантно. (Проверка (27.2.15) значительно упрощается, если использовать это калибровочно-инвариантное свойство для $V(x,\theta)$ в калибровке Весса–Зумино.)

Очевидно, что вид киральных суперполей (27.2.11) и (27.2.12) не является самым общим для лево- и правокиральных полей. Чтобы записать связи между этими суперполями в явно суперсимметричной форме, используем антикоммутатор (26.2.30) и получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta}\mathscr{D}_{L\alpha}\left(\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R\right)\mathscr{D}_{L\beta} &= -2\mathscr{D}_{R\alpha}\mathscr{D}_{L\beta}\left(\varepsilon(1+\gamma_5)\not{\partial}\right)_{\beta\alpha} + \left(\mathscr{D}_R^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_R\right)\left(\mathscr{D}_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_L\right) \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta}\mathscr{D}_{R\alpha}\left(\mathscr{D}_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\mathscr{D}_L\right)\mathscr{D}_{R\beta}. \end{aligned} \tag{27.2.19}$$

Тогда из выражения (27.2.17) следует, что W_L и W_R связаны условием

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\mathscr{D}_{L\alpha}W_{L\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}\mathscr{D}_{R\alpha}W_{R\beta}. \tag{27.2.20}$$

Несложно показать, что наиболее общий вид киральных спинорных суперполей, удовлетворяющих условию (27.2.20), представлен формулами (27.2.11) и (27.2.12) при условии, что $f_{\mu\nu}$ удовлетворяют «тождествам Бьянки» $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho f_{\mu\nu} = 0$.

27.3. Калибровочно-инвариантное действие для произвольных калибровочных суперполей

Из нашего опыта работы с суперсимметричными абелевыми калибровочными теориями в предыдущем разделе следует, что кинематический лагранжиан в произвольной неабелевой калибровочной теории для полей $V_\mu^A(x)$, $\Lambda^A(x)$ и $D^A(x)$ должен возникать как часть калибровочно-инвариантного обобщения лагранжиана (27.2.6):

$$\mathscr{L}_{\text{калибр}} = -\frac{1}{4}\sum_A F_{A\mu\nu}f_A^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\sum_A\left(\overline{\lambda_A}(\not{D}\lambda)_A\right) + \frac{1}{2}\sum_A D_A D_A. \tag{27.3.1}$$

Здесь использован базис для алгебры Ли с полностью антисимметричными структурными константами, и, следовательно, нет смысла сохранять различие между верхними и нижними группами индексов, так что все индексы A, B и т. д. пишутся внизу. Кроме того, $f_{A\mu\nu}$ является калибровочно-инвариантным тензором напряженности поля

$$F_{A\mu\nu} = \partial_\mu V_{A\nu} - \partial_\nu V_{A\mu} + \sum_{BC} C_{ABC}V_{B\mu}V_{C\nu}, \tag{27.3.2}$$

а $D_\mu\lambda$ — калибровочно-ковариантная производная поля калибрино, которая в присоединенном представлении имеет вид

$$\left(D_\mu\lambda\right)_A = \partial_\mu\lambda_A + \sum_{BC} C_{ABC}V_{B\mu}\lambda_C. \tag{27.3.3}$$

Возникает вопрос: получится ли из лагранжиана (27.3.1) суперсимметричное действие?

Поскольку лагранжиан (27.3.1) явно калибровочно-инвариантен, суперсимметричность действия можно проверить в любой удобной калибровке. Чтобы выяснить, будет ли $\delta\mathscr{L}_{\text{калибр}}$ производной в некоторой точке X^μ, удобно выбрать частный случай калибровки Весса–Зумино с условием $V_A^\mu(X) = 0$. Тогда поправки к компонентам полей в точке X даются формулами (26.2.15)–(26.2.17) при $x = X$:

$$\delta V_{A\mu} = \left(\overline{\alpha}\gamma_\mu\lambda_A\right), \tag{27.3.4}$$

$$\delta\lambda_A = \left(\frac{1}{4}f_{A\mu\nu}\left[\gamma^\nu,\gamma^\mu\right] + i\gamma_5 D_A\right)\alpha, \tag{27.3.5}$$

$$\delta D_A = i\left(\overline{\alpha}\gamma_5\not{\partial}\lambda_A\right). \tag{27.3.6}$$

(В этих выражениях x^μ необходимо полагать равным X^μ *после* вычисления поправки при суперсимметричном преобразовании, а не до этого.) Кроме того, нелинейные члены в $f_A^{\mu\nu}$ квадратичны по V и поэтому их вариация при $x = X$ равна нулю. Следовательно для $x = X$ мы имеем

$$\delta f_{A\mu\nu} = \left(\overline{\alpha}\left(\gamma_\nu\partial_\mu - \gamma_\mu\partial_\nu\right)\lambda_A\right). \tag{27.3.7}$$

Все члены в лагранжиане (27.3.1), кроме одного, и преобразования этих членов относительно суперсимметричных преобразований являются просто рядом копий (отмеченных индексом A) абелевой теории, обсуждавшейся в предыдущем разделе, и поэтому они дают суперсимметричное действие. Нарушение суперсимметричности действия может возникнуть только из второго члена в калибровочно-ковариантной производной (27.3.3) поля калибрино:

$$\mathscr{L}_{\lambda\lambda V} = -\frac{1}{2}\sum_{ABC} C_{ABC}\left(\overline{\lambda_A}\not{V}_B\lambda_C\right), \tag{27.3.8}$$

вариация которого при $x = X$ имеет вид

$$\delta\mathscr{L}_{\lambda\lambda V} = -\frac{1}{2}\sum_{ABC} C_{ABC}\left(\overline{\lambda_A}\left(\delta\not{V}_B\right)\lambda_C\right) = -\frac{1}{2}\sum_{ABC} C_{ABC}\left(\overline{\lambda_A}\gamma_\mu\lambda_C\right)\left(\overline{\alpha}\gamma^\mu\lambda_B\right). \tag{27.3.9}$$

Произведение билинейных комбинаций в правой части этой формулы можно представить в виде суммы двух членов

$$\left(\overline{\lambda_A}\gamma_\mu\lambda_C\right)\left(\overline{\alpha}\gamma^\mu\lambda_B\right) = X_{ABC} + Y_{ABC},$$

$$X_{ABC} \equiv \frac{1}{4}\sum_{\pm}\left(\overline{\lambda_A}(1\pm\gamma_5)\gamma_\mu\lambda_C\right)\left(\overline{\alpha}\gamma^\mu(1\pm\gamma_5)\lambda_B\right),$$

$$Y_{ABC} \equiv \frac{1}{4}\sum_{\pm}\left(\overline{\lambda_A}(1\pm\gamma_5)\gamma_\mu\lambda_C\right)\left(\overline{\alpha}\gamma^\mu(1\mp\gamma_5)\lambda_B\right).$$

Используя стандартные тождества Фирца и антикоммутативность спинорных полей, имеем

$$\left(\overline{\lambda_A}(1\pm\gamma_5)\gamma_\mu\lambda_B\right)\left(\overline{\alpha}(1\pm\gamma_5)\gamma^\mu\lambda_C\right) = \left(\overline{\lambda_A}(1\pm\gamma_5)\gamma_\mu\lambda_C\right)\left(\overline{\alpha}(1\pm\gamma_5)\gamma^\mu\lambda_B\right),$$

$$\left(\overline{\lambda_A}(1\pm\gamma_5)\gamma_\mu\lambda_B\right)\left(\overline{\alpha}(1\mp\gamma_5)\gamma^\mu\lambda_C\right) = \left(\overline{\lambda_A}(1\pm\gamma_5)\gamma_\mu\lambda_C\right)\left(\overline{\alpha}(1\mp\gamma_5)\gamma^\mu\lambda_B\right).$$

(Чтобы получить первое из этих равенств, заметим, что $\left[(1\pm\gamma_5)\gamma_\mu\right]_{\alpha\gamma}\times\left[(1\pm\gamma_5)\gamma^\mu\right]_{\delta\beta}$ можно рассматривать как матричный элемент $\alpha\beta$ матрицы, зависящей от δ и γ; поэтому это выражение можно представить как линейную комбинацию $1_{\alpha\beta}$, $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$, $\left[\gamma^\mu,\gamma^k\right]_{\alpha\beta}$, $(\gamma_5\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ и $(\gamma_5)_{\alpha\beta}$. Из-за наличия множителей $(1\pm\gamma_5)$ единственный член в этом разложении пропорционален $[(1\pm\gamma_5)\gamma^\mu]_{\alpha\beta}$. Из лоренц-инвариантности и наличия множителя $1\pm\gamma_5$, следует, что это разложение имеет вид

$$\left[(1\pm\gamma_5)\gamma_\mu\right]_{\alpha\gamma}\left[(1\pm\gamma_5)\gamma^\mu\right]_{\delta\beta} = k\left[(1\pm\gamma_5)\gamma_\mu\right]_{\alpha\beta}\left[(1\pm\gamma_5)\gamma^\mu\right]_{\delta\gamma}.$$

Чтобы определить константу пропорциональности k, вычислим свертку этого выражения с $(\gamma_\nu)_{\gamma\alpha}$ и получим $k=-1$. Знак минус сокращается со знаком минус, возникающим из антикоммутации λ_C с $\overline{\alpha}$. Другое тождество Фирца доказывается так же, но при этом нужно использовать свойство симметрии (26.A.7) для майорановских билинейных комбинаций.) Следовательно, выражение для X_{ABC} симметрично относительно перестановки B и C, а Y_{ABC} — относительно перестановки A и B. Поскольку C_{ABC} полностью антисимметрично, X_{ABC} и Y_{ABC} дают нулевой вклад в сумму (27.3.9). В результате мы получаем $\delta\mathscr{L}_{\lambda\lambda V}=0$, так что из лагранжиана (27.3.1) получается суперсимметричное действие, что и требовалось показать.

Можно понять, *почему* лагранжиан (27.3.1) дает суперсимметричное действие, если считать, что $f_{A\mu\nu}$, λ_A и D_A являются компонентами суперполя. Вспомним, что при обобщенном калибровочном преобразовании векторное суперполе $V_A(x,\theta)$ подчиняется закону преобразования (27.1.12):

$$\exp\Big(-2\sum_A t_A V_A(x,\theta)\Big) \to \exp\Big(-i\sum_A t_A \Omega_A(x,\theta)\Big)$$
$$\times \exp\Big(-2\sum_A t_A V_A(x,\theta)\Big) \exp\Big(+i\sum_A t_A \Omega^*(x,\theta)\Big), \qquad (27.3.10)$$

где $\Omega_A(x,\theta)$ — произвольное левокиральное суперполе. Поскольку $\Omega_A^* \neq \Omega_A$, это выражение не является калибровочно ковариантным законом преобразования. Чтобы исключить множитель, содержащий Ω_A^*, заметим, что Ω_A^* является правокиральным суперполем, так что $\mathscr{D}_{L\alpha}\Omega_A^* = 0$ и поэтому

$$\exp\Big(-2\sum_A t_A V_A(x,\theta)\Big) \mathscr{D}_{L\alpha} \exp\Big(+2\sum_A t_A V_A(x,\theta)\Big)$$
$$\to \exp\Big(-i\sum_A t_A \Omega_A(x,\theta)\Big) \exp\Big(-2\sum_A t_A V_A(x,\theta)\Big)$$
$$\times \mathscr{D}_{L\alpha}\left[\exp\Big(+2\sum_A t_A V_A(x,\theta)\Big) \exp\Big(+i\sum_A t_A \Omega(x,\theta)\Big)\right]. \qquad (27.3.11)$$

Это выражение все еще не калибровочно-ковариантно, потому что левая суперпроизводная $\mathscr{D}_{L\alpha}$ действует как на $\exp(+i\sum_A t_A \Omega_A(x,\theta))$, так и на $\exp(+2\sum_A t_A V_A(x,\theta))$. Это можно исправить, следуя аргументации, принятой при обсуждении абелевой теории в предыдущем разделе. Определим спинорное суперполе

$$2\sum_A t_A W_{AL\alpha}(x,\theta) \equiv \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} \mathscr{D}_{R\beta} \mathscr{D}_{R\gamma} \left[\exp\Big(-2\sum_A t_A V_A(x,\theta)\Big)\right.$$
$$\left.\times \mathscr{D}_{L\alpha} \exp\Big(+2\sum_A t_A V_A(x,\theta)\Big)\right]. \qquad (27.3.12)$$

Поскольку произведение любых трех производных $\mathscr{D}_R$ равно нулю, поле $W_{AL\alpha}$ левокирально:

$$\mathscr{D}_{R\alpha} W_{AL\alpha}(x,\theta) = 0, \qquad (27.3.13)$$

а поскольку $\mathscr{D}_{R\beta}\mathscr{D}_{R\gamma}\mathscr{D}_{L\alpha}\Omega_A \propto \mathscr{D}_{R\delta}\Omega_A = 0$, поле $W_{AL\alpha}$ калибровочно-ковариантно в том смысле, что для обобщенного калибровочного преобразования имеем

$$\sum_A t_A W_{AL\alpha}(x,\theta) \to \exp\Big(-i\sum_A t_A \Omega_A(x,\theta)\Big) \sum_A t_A W_{AL\alpha}(x,\theta)$$
$$\times \exp\Big(+i\sum_A t_A \Omega_A(x,\theta)\Big). \qquad (27.3.14)$$

Чтобы вычислить спинорное суперполе в точке $x^\mu = X^\mu$, снова можно выбрать версию калибровки Весса–Зумино, в которой $V_A(X) = 0$. Прямые вычисления в этой калибровке приводят к выражению

$$\begin{aligned} W_{AL}(X,\theta) =& \lambda_{AL}(X_+) + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\theta_L\left(\partial_\mu V_{A\nu}(X_+) - \partial_\nu V_{A\mu}(X_+)\right) \\ &+ \left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L\right)\not\partial\lambda_{RA}(X_+) - i\theta_L D_A(X_+). \end{aligned}$$

Поскольку W_{AL} калибровочно-ковариантно, для произвольной калибровки в произвольной точке оно должно иметь значение

$$W_{AL}(X,\theta) = \lambda_{AL}(X_+) + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\theta_L f_{A\mu\nu}(x_+) + \left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L\right)\not{D}\lambda_{RA}(x_+) - i\theta_L D_A(x_+). \tag{27.3.15}$$

Теперь можно построить билинейный по W лоренц- и калибровочно-инвариантный $\mathscr{F}$-член

$$\begin{aligned} -\left[\sum_{A\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{AL\alpha}W_{AL\beta}\right]_{\mathscr{F}} = \sum_A\Bigg[&-\left(\overline{\lambda_A}\not\partial(1-\gamma_5)\lambda_A\right) - \frac{1}{2}f_{A\mu\nu}f_A^{\mu\nu} \\ &+ \frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_A^{\mu\nu}F_A^{\rho\sigma} + D_A^2\Bigg]. \end{aligned} \tag{27.3.16}$$

Так же, как и в предыдущем разделе, калибровочно-инвариантный лагранжиан (27.3.1) получается из действительной части $\mathscr{F}$-члена:

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\sum_{A\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{AL\alpha}W_{AL\beta}\right]_{\mathscr{F}} = \mathscr{L}_{\text{калибр}}. \tag{27.3.17}$$

Что можно сказать о мнимой части? Она дается выражением

$$-\mathrm{Im}\left[\sum_{A\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{AL\alpha}W_{AL\beta}\right]_{\mathscr{F}} = -i\sum_A\left(\overline{\lambda_A}\not{D}\gamma_5\lambda_A\right) + \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sum_A f_A^{\mu\nu}f_A^{\rho\sigma}. \tag{27.3.18}$$

Из формулы (26.A.7) и антисимметрии структурных констант следует, что $(\lambda_A D\gamma_5\lambda_A) = \frac{1}{2}\partial_\mu(\overline{\lambda_A}\gamma^\mu\gamma_5\lambda_A)$, поэтому первый член является полной производной, а из формулы (23.5.4) следует, что второй член также является полной производной. Для абелевых калибровочных теорий это означает, что член вида (27.3.18) не дает никакого эффекта. Однако, как обсуждалось в разделах 23.5 и 23.6, для неабелевых калибровочных теорий существование инстантонных решений позволяет иметь ненулевой интеграл по пространству-времени от плотности (23.3.18). Поэтому мы должны учесть в лагранжиане новый член

$$\mathscr{L}_\theta = -\frac{g^2\theta}{16\pi^2}\,\mathrm{Im}\left[\sum_{A\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{AL\alpha}W_{AL\beta}\right]_{\mathscr{F}}, \qquad (27.3.19)$$

где θ — новый действительный параметр, g — калибровочная константа связи, которую удобно определить для простой калибровочной группы, так что, если t_A, t_B и t_C принадлежат стандартной $SU(2)$ подалгебре калибровочной алгебры, используемой при вычислении инстантонных эффектов, то структурные константы $C_{ABC} = g\epsilon_{ABC}$. С учетом этого определения калибровочной константы связи, для простых калибровочных групп формула (23.5.20) дает

$$\int d^4x\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sum_A f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma} = 64\pi^2\nu/g^2, \qquad (27.3.20)$$

где $\nu = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ — целое число, называемое *топологическим числом**, характеризующее топологический класс конфигурации калибровочного поля. Таким образом, для инстантонов с топологическим числом ν вклад плотности лагранжиана $\mathscr{L}_\theta$ имеет вид фазы, дающей вклад в функциональный интегралы:

$$\left[\exp\left(i\int d^4x\mathscr{L}_\theta\right)\right]_\nu = \exp(i\nu\theta), \qquad (27.3.21)$$

так что обусловленные $\mathscr{L}_\theta$ эффекты периодичны по θ с периодом 2π.

Часто бывает удобно включить множитель g в калибровочное поле, чтобы структурные константы не зависели от g, при этом лагранжиан калибровочного поля умножается на общий множитель $1/g^2$. В этих обозначениях полный лагранжиан калибровочного поля может быть записан через калибровочные поля с измененным масштабом и структурные константы в форме

$$\mathscr{L}_{\text{калибр}} + \mathscr{L}_\theta = -\mathrm{Re}\left[\frac{\tau}{8\pi i}\sum_{A\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{AL\alpha}W_{AL\beta}\right]_{\mathscr{F}}, \qquad (27.3.22)$$

где τ — комплексный параметр связи

$$\tau \equiv \frac{4\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{2\pi}. \qquad (27.3.23)$$

---

*Автор употребляет принятый в англоязычной литературе термин «winding number», который иногда переводится как «число наматываний» или «число оборотов». Однако мы предпочли использовать более широкий термин (см. монографию А.С. Шварц. *Квантовая теория поля и топология*. М.: Наука, 1989). — *Прим. пер.*

Согласно (23.5.19) вклад инстантонов с топологическим числом ν в функциональные интегралы подавляется множителем $\exp(-8\pi^2|\nu|/g^2)$, который вместе с (27.3.21) дает общий множитель

$$\exp\left[i\nu\theta-\frac{8\pi^2|\nu|}{g^2}\right]=\begin{cases}\exp(2\pi i\nu\tau) & \nu\geqslant 0\\ \exp(2\pi i\nu\tau^*) & \nu\leqslant 0\end{cases}. \tag{27.3.24}$$

27.4. Перенормируемые калибровочные теории с киральными суперполями

Соберем вместе отдельные результаты первых трех разделов и построим самый общий вид перенормируемого действия для киральных суперполей, взаимодействующих с произвольными калибровочными полями. Складывая выражения (27.1.27), (27.2.7) и (27.3.1) с суперпотенциальными членами в (26.4.5), получаем лагранжиан

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&\frac{1}{2}\left[\Phi^\dagger\exp\left(-2\sum_A t_A V_A\right)\Phi\right]_D-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_A\left(W_{AL}^T\epsilon W_{AL}\right)_{\mathscr{F}}\\&-\frac{g^2\theta}{16\pi^2}\sum_A\mathrm{Im}\left(W_{AL}^T\epsilon W_{AL}\right)_{\mathscr{F}}\\=&-\sum_n(D_\mu\varphi)_n^*(D^\mu\varphi)_n-\frac{1}{2}\sum_n\left(\overline{\psi_n}\gamma^\mu(D_\mu\psi)_n\right)+\sum_n\mathscr{F}_n^*\mathscr{F}_n\\&-\mathrm{Re}\sum_m\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\left(\psi_{nL}^{\mathrm{T}}\epsilon\psi_{mL}\right)+2\,\mathrm{Re}\sum_n\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\mathscr{F}_n\\&-2\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\sum_{Anm}(t_A)_{nm}\left(\overline{\psi_{nL}}\lambda_A\right)\varphi_m+2\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\sum_{Anm}(t_A)_{nm}\left(\overline{\psi_{nR}}\lambda_A\right)\varphi_m^*\\&-\sum_{Anm}\varphi_n^*(t_A)_{nm}\varphi_m D_A-\sum_A\xi_A D_A+\frac{1}{2}\sum_A D_A D_A\\&-\frac{1}{4}\sum_A f_{A\mu\nu}F_A^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\sum_A\left(\overline{\lambda_A}(\not{D}\lambda)_A\right)+\frac{g^2\theta}{64\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sum_A f_A^{\mu\nu}f_A^{\rho\sigma}.\end{aligned}\tag{27.4.1}$$

Здесь $f(\varphi)$ — суперпотенциал, т. е. калибровочно-инвариантная комплексная функция φ_n (но не φ_n^*), которая в силу условия перенормируемости должна быть кубическим полиномом; ξ_A — константы связи, которые в силу калибровочной инвариантности должны обращаться в нуль, кроме случая, когда t_A — генератор группы $U(1)$; калибровочно-ковариантные производные имеют вид

$$D_\mu \psi_L \equiv \partial_\mu \psi_L - i \sum_A t_A V_{A\mu} \psi_L, \tag{27.4.2}$$

$$D_\mu \varphi \equiv \partial_\mu \varphi - i \sum_A t_A V_{A\mu} \varphi, \tag{27.4.3}$$

$$(D_\mu \lambda)_A = \partial_\mu \lambda_A + \sum_{BC} C_{ABC} V_{B\mu} \lambda_C, \tag{27.4.4}$$

а $f_{A\mu\nu}$ — калибровочно-ковариантный тензор напряженности поля

$$f_{A\mu\nu} = \partial_\mu V_{A\nu} - \partial_\nu V_{A\mu} + \sum_{BC} C_{ABC} V_{B\mu} V_{C\nu}. \tag{27.4.5}$$

Вспомогательные поля входят квадратично с независимыми от поля константами в качестве коэффициентов при членах второго порядка. Поэтому их можно исключить, положив равными тем значениям, при которых лагранжиан стационарен:

$$\mathscr{F}_n = -(\partial f(\varphi)/\partial \varphi_n)^*, \tag{27.4.6}$$

$$D_A = \xi_A + \sum_{nm} \varphi_n^* (t_A)_{nm} \varphi_m. \tag{27.4.7}$$

Подставляя эти выражения в (27.4.1), получаем лагранжиан

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = &-\sum_n (D_\mu \varphi)_n^* (D^\mu \varphi)_n \\
&- \frac{1}{2} \sum_n \left(\overline{\psi_n} \gamma^\mu (D_\mu \psi_L)_n \right) + \frac{1}{2} \sum_n \left(\overline{(D_\mu \psi_L)_n} \gamma^\mu \psi_{nL} \right) \\
&- \frac{1}{2} \sum_{nm} \frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial \varphi_n \partial \varphi_m} \left(\psi_{nL}^{\mathrm{T}} \epsilon \psi_{mL} \right) - \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial \varphi_n \partial \varphi_m} \right)^* \left(\psi_{nL}^{\mathrm{T}} \epsilon \psi_{mL} \right)^* \\
&- \sum_n \left| \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n} \right|^2 \\
&+ i\sqrt{2} \sum_{Anm} \left(\overline{\psi_{nL}} (t_A)_{nm} \lambda_A \right) \varphi_m - i\sqrt{2} \sum_{Anm} \varphi_n^* \left(\overline{\lambda_A} (t_A)_{nm} \psi_{mL} \right) \\
&- \frac{1}{2} \sum_A \left(\xi_A + \sum_{nm} \varphi_n^* (t_A)_{nm} \varphi_m \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_A f_{A\mu\nu} f_A^{\mu\nu} \\
&- \frac{1}{2} \sum_A \left(\overline{\lambda_A} (\not{D} \lambda)_A \right) + \frac{g^2 \theta}{64\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sum_A f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma}.
\end{aligned} \tag{27.4.8}$$

В силу лоренц-инвариантности усредненные по вакууму значения полей ψ_{nL}, λ_A и $f_{A\mu\nu}$ должны быть равными нулю, а для средних значений φ_n

в древесном приближении потенциал достигает минимума

$$V(\varphi) = \sum_n \left|\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n}\right|^2 + \frac{1}{2}\left(\xi_A + \sum_{nm} \varphi_n^*(t_A)_{nm}\varphi_m\right)^2. \qquad (27.4.9)$$

Это выражение положительно, поэтому, *если* существует множество значений поля, для которых $V(\varphi)$ равно нулю, то это автоматически соответствует также минимуму потенциала. Чтобы потенциал $V(\varphi)$ обращался в нуль при некотором значении поля $\varphi_n = \varphi_{n0}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{F}_{n0} = -\left[\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n}\right]^*_{\varphi=\varphi_0} = 0 \qquad (27.4.10)$$

и

$$D_{A0} = \xi_A + \sum_{nm} \varphi_{n0}^*(t_A)_{nm}\varphi_{m0} = 0. \qquad (27.4.11)$$

Это, в свою очередь, есть необходимое и достаточное условие отсутствия спонтанного нарушения суперсимметрии, поскольку из (26.3.15) следует, что $\langle\delta\psi_{nL}\rangle_{\text{VAC}} = \sqrt{2}\langle\mathcal{F}_n\rangle_{\text{VAC}}\alpha_L$, а из (26.2.16) следует, что $\langle\delta\lambda_A\rangle_{\text{VAC}} = i\langle D_A\rangle_{\text{VAC}}\gamma_5\alpha$.

Здесь следует подчеркнуть, что спонтанное нарушение суперсимметрии более затруднительно, чем в случае других симметрий. Для большинства симметрий действия существуют конфигурации полей, для которых симметрия не нарушена и потенциал стационарен, но, тем не менее, симметрия будет спонтанно нарушена, если потенциал не достигает минимума ни при одной из этих конфигураций. В противоположность этому, для любой суперсимметричной конфигурации поля потенциал обращается в нуль, что безусловно меньше значения потенциала для любой несуперсимметричной конфигурации; поэтому существование *любой* суперсимметричной конфигурации поля гарантирует сохранение суперсимметрии. Как мы увидим в разделе 27.6, этот вывод выходит за рамки древесного приближения, использованного в данном разделе, и не изменяется за счет поправок любого конечного порядка теории возмущений.

Может показаться, что соотношения (27.4.10) и (27.4.11) накладывают слишком много условий на скалярные поля, чтобы ожидать существование решения без тонкой настройки суперпотенциала. Однако для калибровочной группы размерности D суперпотенциал $f(\varphi)$ подчинен D ограничениям

$$\sum_m \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n}(t_A\varphi)_m = 0 \qquad (27.4.12)$$

для всех A и всех φ. Следовательно, если φ имеет N независимых компонент, то число *независимых* условий (27.4.10) равно $N - D$, в то время как число условий (27.4.11) равно D, т. е. суммарно существует всего N условий. Если число условий равно числу свободных переменных, то вполне вероятно найти решения для произвольных суперпотенциалов. На самом деле найти решения проще, чем не найти. Например, для киральных скалярных суперполей в нетривиальном представлении полупростой калибровочной группы имеем $\xi_A = 0$, в то же время $f(\varphi)$ может не иметь членов, линейных по φ_n, так что оба условия (27.4.10) и (27.4.11) удовлетворяются для $\varphi_{n0} = 0$. Могут быть и другие решения для (27.4.10) и (27.4.11), нарушающие калибровочные симметрии, но в такой теории суперсимметрия не может быть нарушена, по крайней мере в древесном приближении, и, как будет показано в разделе 27.6, ни в каком порядке теории возмущений.

В общем случае нетрудно показать, что даже если в калибровочной группе есть $U(1)$ множители, или если суперпотенциал содержит калибровочно-инвариантные суперполя и существует множество значений скалярного поля φ_{n0}, удовлетворяющих (27.4.10), то существует другое множество, удовлетворяющее как (27.4.10), *так и* (27.4.11) при единственном условии, что все константы Файе–Иллиопулоса ξ_A равны нулю. Чтобы это показать, заметим, что поскольку суперпотенциал $f(\varphi)$ не содержит φ^*, он инвариантен не только относительно обычных калибровочных преобразований $\varphi \to \exp(i\sum_A \Lambda_A t_A)\varphi$, где Λ_A — произвольные действительные числа, но также относительно преобразований, где Λ_A — произвольные комплексные числа. Относительно всех этих преобразований $\mathcal{F}$-члены в (27.4.10) преобразуются линейно, так что если φ_0 удовлетворяет (27.4.10), то и $\varphi^\Lambda \equiv \exp(i\sum_A \Lambda_A t_A)\varphi_0$ удовлетворяет тому же условию. С другой стороны, скалярное произведение $[\varphi^\dagger\varphi]$ не инвариантно относительно преобразований с комплексными Λ_A; при этом $[\varphi^{\Lambda\dagger}\varphi^\Lambda]$ остается действительным и положительным для комплексных Λ_A, т. е. это произведение ограничено снизу и поэтому имеет минимум. Для $\xi_A = 0$, чтобы произведение $[\varphi^{\Lambda\dagger}\varphi^\Lambda]$ было стационарным в этом минимуме, φ^Λ должны удовлетворять условию (27.4.11). Тогда видно, что в отсутствие D-членов Файе–Иллиопулоса, вопрос о том, сохраняется ли суперсимметрия в калибровочных теориях, сводится к вопросу, допускает ли суперпотенциал решения (27.4.10). Этот же результат относится к неперенормируемым теориям [3].

Теперь допустим, что существует множество значений φ_{n0}, для которых $V(\varphi_{n0}) = 0$, так что суперсимметрия сохраняется. Степени свободы спина 0 описываются смещенным полем

$$\phi_n = \varphi_n - \varphi_{n0}. \tag{27.4.13}$$

Тогда существует перекрестное слагаемое между ϕ и калибровочными полями, возникающее из первого слагаемого в (27.4.1):

$$2\sum_{nA}\mathrm{Im}\left(\partial_\mu\phi_n(t_A\varphi_0)_n^*\right)V_A^\mu .$$

Как показано в разделе 21.1, это слагаемое всегда можно исключить, выбрав «унитарную калибровку», в которой φ_n удовлетворяет условию, которое обращает его в нуль:

$$\sum_n \mathrm{Im}\left(\varphi_n(t_A\varphi_0)_n^*\right) = 0. \tag{27.4.14}$$

Это приведет к исключению голдстоуновских бозонов, связанных с нарушенными калибровочными симметриями.

Рассмотрим массы частиц спина 0, 1/2 и 1, возникающие в теории, если суперсимметрия сохраняется, но существует возможность спонтанного нарушения калибровочных симметрий.

Спин 0

Поскольку $\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n$ и $\xi_A+\sum_{nm}\varphi_n^*(t_A)_{nm}\varphi_m$ должны обращаться в нуль при $\varphi_n=\varphi_{n0}$, члены второго порядка по $\phi_n\equiv\varphi_n-\varphi_{n0}$ и (или) φ_n^* в $V(\varphi)$ имеют вид

$$\begin{aligned}V_{\text{квадр}}(\varphi) &= \sum_{nm}(\mathcal{M}^*\mathcal{M})_{nm}\phi_n^*\phi_m + \sum_{Anm}(t_A\varphi_0)_n(t_A\varphi_0)_m^*\phi_n^*\phi_m \\ &\quad \frac{1}{2}\sum_{Anm}(t_A\varphi_0)_n^*(t_A\varphi_0)_m^*\phi_n\phi_m + \frac{1}{2}\sum_{Anm}(t_A\varphi_0)_n(t_A\varphi_0)_m\phi_n^*\phi_m^*,\end{aligned} \tag{27.4.15}$$

где $\mathcal{M}$ — комплексная симметричная матрица (26.4.11):

$$\mathcal{M}_{nm}\equiv\left(\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\right)_{\varphi=\varphi_0}.$$

Тогда (27.4.15) можно записать в форме

$$V_{\text{квадр}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\phi\\ \phi^*\end{bmatrix}^\dagger M_0^2\begin{bmatrix}\phi\\ \phi^*\end{bmatrix}, \tag{27.4.16}$$

где M_0^2 — матрица, состоящая из блоков,

$$M_0^2=\begin{bmatrix}\mathcal{M}^*\mathcal{M}+\sum_A(t_A\varphi_0)(t_A\varphi_0)^\dagger & \sum_A(t_A\varphi_0)(t_A\varphi_0)^{\mathrm{T}} \\ \sum_A(t_A\varphi_0)(t_A\varphi_0)^\dagger & \mathcal{M}\mathcal{M}^*+\sum_A(t_A\varphi_0)^*(t_A\varphi_0)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}. \tag{27.4.17}$$

Теперь надо найти собственные значения этой квадратичной по массам матрицы. Дифференцируя (27.4.12) по φ_n, получаем

$$\sum_m \frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n \partial\varphi_m}(t_A\varphi)_m + \sum_m \frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_m}(t_A)_{mn} = 0. \qquad (27.4.18)$$

Как было показано, $\partial f(\varphi)/\partial\varphi_m$ обращается в нуль для $\varphi = \varphi_0$, поэтому, положив φ в (27.4.18) равным этому значению, находим

$$\sum_m \mathcal{M}_{nm}(t_A\varphi_0)_m = 0. \qquad (27.4.19)$$

Отсюда следует, что

$$M_0^2 \begin{bmatrix} t_B\varphi_0 \\ \pm(t_B\varphi_0)^* \end{bmatrix} = \sum_A \left(\varphi_0^\dagger[t_A t_B \pm t_B t_A]\varphi_0\right) \begin{bmatrix} t_B\varphi_0 \\ \pm(t_B\varphi_0)^* \end{bmatrix}.$$

Из обращения D_A в нуль при $\varphi = \varphi_0$ и из глобальной калибровочной инвариантности ξ_A следует, что

$$\left(\varphi_0^\dagger[t_A, t_B]\varphi_0\right) = i\sum_C C_{ABC}\left(\varphi_0^\dagger t_C\varphi_0\right) = -i\left(\varphi_0^\dagger\varphi_0\right)\sum_C C_{ABC}\xi_C = 0. \qquad (27.4.20)$$

Поэтому матрица (27.4.17) для каждой калибровочной симметрии имеет два собственных вектора

$$u = \begin{bmatrix} \sum_B c_B t_B\varphi_0 \\ \sum_B c_B(t_B\varphi_0)^* \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \sum_B c_B t_B\varphi_0 \\ -\sum_B c_B(t_B\varphi_0)^* \end{bmatrix}, \qquad (27.4.21)$$

для которых

$$M_0^2 u = \mu^2 u, \quad M_0^2 v = 0, \qquad (27.4.22)$$

где μ^2 и c_A — любые действительные решения задачи на собственные значения*

$$\sum_B \left(\varphi_0^\dagger\{t_A, t_B\}\varphi_0\right) c_B = \mu^2 c_A, \qquad (27.4.23)$$

Однако если собственное значение μ^2 равно нулю, то $\sum_B c_B t_B\varphi_0 = 0$, и тогда нет собственных векторов u и v. Безмассовые частицы, связанные с собственными векторами v, оказываются голдстоуновскими бозонами, которые исключаются из физического спектра условием унитарной калибровки (27.4.14). Кроме этих собственных состояний с ненулевыми массами,

*Наличие множителя 1/2 в (21.1.17), которого нет в (27.4.23), связано с различными способами нормировки скалярных полей.

существует еще одно решение, ортогональное всем векторам u и v, которое поэтому имеет вид

$$w_\pm = \begin{bmatrix} \zeta \\ \pm\zeta^* \end{bmatrix}, \tag{27.4.24}$$

где

$$\sum_n (t_A \varphi_0)^*_n \zeta_n = 0. \tag{27.4.25}$$

Условие (27.4.19) показывает, что пространство состояний ζ, удовлетворяющих (27.4.25), инвариантно относительно умножения на эрмитову матрицу $\mathcal{M}^\dagger\mathcal{M}$; поэтому оно реализуется собственными векторами этой матрицы, удовлетворяющими уравнению

$$\mathcal{M}^\dagger\mathcal{M}\zeta = m^2\zeta, \tag{27.4.26}$$

где m^2 — множество действительных положительных (или нулевых) собственных значений. Уравнение (27.4.26), комплексно сопряженное ему уравнение и условие (27.4.25) показывают, что $w_\pm$ являются собственными векторами M_0^2 с собственными значениями m^2:

$$M_0^2 w_\pm = m^2 w_\pm. \tag{27.4.27}$$

Таким образом, имеются *два* зарядово самосопряженных бесспиновых бозона массой m, удовлетворяющей уравнению (27.4.27), и один зарядово самосопряженный бесспиновый бозон, ненулевая масса которого μ удовлетворяет условию (27.4.23).

Спин 1/2

Массы фермионов возникают в лагранжиане (27.4.8) из членов второго порядка по фермионным полям ψ_n и λ_A, не содержащих производных:

$$\mathcal{L}_{1/2} = -\frac{1}{2}\sum_{nm} \mathcal{M}_{nm} \left(\psi^{\mathrm{T}}_{nL}\varepsilon\psi_{mL}\right) - i\sqrt{2}\sum_{Am}(t_A\varphi_0)^*_m \left(\lambda^{\mathrm{T}}_{LA}\varepsilon\psi_{mL}\right) + \text{э.с.} \tag{27.4.28}$$

В разделе 26.4 мы видели, что если в лагранжиане член с фермионной массой для столбца χ майорановских спинорных полей выбрать в виде

$$\mathcal{L}_{1/2} = -\frac{1}{2}\left(\chi^{\mathrm{T}}_L\varepsilon M\chi_L\right) + \text{э.с.}, \tag{27.4.29}$$

то квадраты фермионных масс будут собственными значениями эрмитовой матрицы $M^\dagger M$. Лагранжиан (27.4.28) дает элементы матрицы M:

$$M_{nm} = \mathcal{M}_{nm}, \quad M_{nA} = M_{An} = i\sqrt{2}(t_A\varphi_0)^*_n, \quad M_{AB} = 0, \tag{27.4.30}$$

для которых, используя (27.4.19) и (27.4.20), получаем

$$
\begin{aligned}
&(M^\dagger M)_{nm} = (\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M})_{nm} + 2\sum_A (t_A\varphi_0)_n (t_A\varphi_0)^*_m, \\
&(M^\dagger M)_{nA} = (M^\dagger M)_{An} = 0, \qquad (27.4.31)\\
&(M^\dagger M)_{AB} = 2(\varphi_0^\dagger t_B t_A \varphi_0) = (\varphi_0^\dagger \{t_B, t_A\}\varphi_0).
\end{aligned}
$$

Матрица (27.4.30) имеет собственные векторы трех типов. Векторы первого типа имеют вид

$$
z = \begin{bmatrix} \zeta \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (27.4.32)
$$

с собственными значениями m^2, где ξ_n и m^2 — любые собственные вектора и соответствующие собственные значения $\mathcal{M}^\dagger\mathcal{M}$. Следующий тип векторов записывается в форме

$$
g = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}, \qquad (27.4.33)
$$

с собственными значениями μ^2, где c_B и μ^2 — любые собственные вектора и собственные значения матрицы $(\varphi_0^\dagger\{t_B, t_A\}\varphi_0)$. И наконец, третий тип векторов имеет вид

$$
h = \begin{bmatrix} \sum_B c_B t_B \varphi_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (27.4.34)
$$

с собственными значениями μ^2, где c_B и μ^2 — любые собственные векторы и собственные значения матрицы $(\varphi_0^\dagger\{t_B, t_A\}\varphi_0)$. Единственное исключение — собственные векторы c этой матрицы с нулевым собственным значением удовлетворяют условию $\sum_A c_A t_A \varphi_0 = 0$, что соответствует ненарушенным симметриям, так что в этом случае вектор (27.4.34) равен нулю и остается только собственный вектор (27.4.33). Итак, существует один майорановский фермион массой m, удовлетворяющей уравнению (27.4.26), два майорановских фермиона ненулевыми массами μ, удовлетворяющие уравнению (27.4.22), и один майорановский фермион нулевой массы для каждой ненарушенной калибровочной симметрии.

Спин 1

Массовые члены в лагранжиане калибровочных полей возникают частично из первого члена в формуле (27.4.1) второго порядка по калибровочному полю V_A^μ:

$$
\mathcal{L}_V = -\sum_{nAB} (t_A\varphi_0)^*_n (t_B\varphi_0)_n V_{A\mu} V_B^\mu. \qquad (27.4.35)
$$

Поскольку поля $V_{A\mu}$ действительны, их матрица квадратов масс есть матрица в уравнении (27.4.23):

$$(\mu^2)_{AB} = \left(\varphi_0^\dagger\{t_B, t_A\}\varphi_0\right). \tag{27.4.36}$$

Для каждого собственного значения μ^2 матрицы (27.4.36) существует одна частица массой μ и спина 1.

Итак мы видим, что для каждого собственного значения m^2 матрицы $\mathcal{M}^*\mathcal{M}$ существуют две зарядово самосопряженные бесспиновые частицы массой m и один майорановский фермион такой же массы; для каждого ненулевого собственного значения матрицы μ^2_{AB} существуют четыре частицы массой μ: один зарядово самосопряженный бесспиновый бозон, два майорановских фермиона и один зарядово самосопряженный бозон спина 1; для каждого нулевого собственного значения этой матрицы существуют две частицы нулевой массы: один майорановский фермион и один зарядово самосопряженный бозон спина 1. Неудивительно, что частицы нулевой и ненулевой массы, входящие в мультиплеты, — те же самые, что были найдены прямым применением супесимметричной алгебры в разделах 25.4 и 25.5. Удивление вызывает то, что массы калибровочных и киральных частиц не влияют друг на друга. Массы m получаются из собственных значений матрицы $(\mathcal{M}^*\mathcal{M})_{nm}$, и частицы, обладающие этими массами, оказываются теми же частицами, которые получаются в теории киральных суперполей без калибровочных суперполей; массы μ получаются из собственных значений матрицы μ^2_{AB}, а частицы с этими массами оказываются частицами, возникающими в теории калибровочных суперполей, но без киральных суперполей.

Воспользуемся теперь методом, описанным в разделе 26.7, и построим суперсимметричный ток для суперсимметричного калибровочного лагранжиана (27.4.1). Это понадобится нам в разделе 27.9. В калибровке, использованной ранее, изменения V_A, λ_A и D_A при бесконечно малых суперсимметричных преобразованиях даются формулами (27.3.4)–(27.3.6). Добавляя нетеровский суперсимметричный ток (26.7.2) для этих полей к нетеровскому току для φ_n, ψ_n и $\mathcal{F}_n$, полученному в (26.7.8), где производные заменены калибровочно-инвариантными производными, получаем полный нетеровский суперсимметричный ток:

$$\begin{aligned} N^\mu = & \sum_A f_A^{\mu\nu}\gamma_\nu\lambda_A - \frac{1}{8}\sum_A f_{A\rho\sigma}[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]\gamma^\mu\lambda_A - \frac{1}{2}i\sum_A D_A\gamma_5\gamma^\mu\lambda_A \\ & + \frac{1}{2}\sum_n [2(D^\mu\varphi)^*_n\psi_{nL} + 2(D^\mu\varphi)_n\psi_{nR} + (\not{D}\varphi)_n\gamma^\mu\psi_{nR} \\ & + (\not{D}\varphi)^*_n\gamma^\mu\psi_{nL} - \mathcal{F}_n\gamma^\mu\psi_{nR} - \mathcal{F}^*_n\gamma^\mu\psi_{nL}]. \end{aligned} \tag{27.4.37}$$

Это — не суперсимметричный ток, потому что плотность лагранжиана не инвариантна относительно суперсимметрии. Вариация лагранжиана равна производной

$$\delta\mathscr{L} = \partial_\mu (\overline{\alpha} K^\mu), \tag{27.4.38}$$

где★

$$\begin{aligned} K^\mu = & \frac{1}{2} i \sum_A \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} f_{A\rho\sigma} \gamma_\nu \gamma_5 \lambda_A + \frac{1}{8} \sum_A [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \gamma^\mu \lambda_A f_{A\rho\sigma} + \frac{1}{2} i \sum_A D_A \gamma_5 \gamma^\mu \lambda_A \\ & - i \sum_{Anm} (t_A)_{nm} \gamma_5 \gamma^\mu \lambda_A \varphi_n^* \varphi_m \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \gamma^\mu \Big[-(\not{\partial}\varphi)_n \psi_{nR} - (\not{\partial}\varphi)_n^* \psi_{nL} + \mathscr{F}_n^* \psi_{nL} + \mathscr{F}_n \psi_{nR} \\ & + 2 \left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n} \right) \psi_{nL} + 2 \left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n} \right)^* \psi_{nR} \Big]. \end{aligned} \tag{27.4.39}$$

Первые два члена выведены с помощью тождества (27.2.5). Применив это тождество еще раз к (26.7.4), получаем полный суперсимметричный ток

$$\begin{aligned} S^\mu = & N^\mu + K^\mu \\ = & -\frac{1}{4} \sum_A f_{A\rho\sigma} [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \gamma^\mu \lambda_A - i \sum_{Anm} (t_A)_{nm} \gamma_5 \gamma^\mu \lambda_A \varphi_n^* \varphi_m \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \Big[(\not{\partial}\varphi)_n \gamma^\mu \psi_{nR} + (\not{\partial}\varphi^*)_n \gamma^\mu \psi_{nL} \\ & + 2 \left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n} \right) \gamma^\mu \psi_{nL} + 2 \left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n} \right)^* \gamma^\mu \psi_{nR} \Big]. \end{aligned} \tag{27.4.40}$$

* * *

В разделе 26.8 был рассмотрен класс суперсимметричных теорий с суперпотенциалом $f(\Phi)$, произвольно зависящим от множества левокиральных суперполей Φ_n, но не от их производных, и с келеровым потенциалом $K(\Phi, \Phi^*)$, произвольно зависящим от Φ_n и Φ_n^*, но не от их производных. Это рассмотрение можно расширить на калибровочные теории, лагранжиан которых зависит от киральных суперполей, ограниченных только суперсимметрией, не вводя новые суперпроизводные или

★Самый простой путь вычислить поправку к члену $[\Phi^\dagger \exp(-2\sum_A t_A V_A)\Phi]_D$ — это вычислить λ-компоненту $\Phi^\dagger \exp(-2\sum_A t_A V_A)\Phi$ и воспользоваться формулой (26.2.17). В процессе этого вычисления из λ-компоненты $\exp(-2\sum_A t_A V_A)$ возникает важный член во второй строке правой части тока (27.4.39).

пространственно-временные производные. Тогда перенормируемый лагранжиан будет иметь вид

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[K\left(\Phi, \Phi^\dagger \exp(-2\sum_A t_A V_A)\right)\right]_D + 2\,\mathrm{Re}\left[f(\Phi)\right]_{\mathscr{F}}$$
$$- \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_{AB}\left[h_{AB}(\Phi)\left(W_{AL}^{\mathrm{T}}\varepsilon W_{BL}\right)\right]_{\mathscr{F}}, \qquad (27.4.41)$$

где $h_{AB}(\Phi)$ — новая функция, зависящая от Φ_n, но не от Φ_n^* или производных.

Киральные калибровочные и скалярные суперполя даются разложениями (26.3.21) и (27.3.15):

$$W_{AL}(x,\theta) = \lambda_{AL}(x_+) + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\theta_L f_{A\mu\nu}(x_+) + \left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L\right)\not{D}\lambda_{AR}(x_+) - i\theta_L D_A(x_+),$$
$$\Phi_n(x,\theta) = \varphi_n(x_+) - \sqrt{2}\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\psi_{nL}(x_+)\right) + \mathscr{F}_n(x_+)\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L\right),$$

где x_+^μ — смещенная координата (26.3.23). Члены второго порядка по θ_L (и не зависящие от θ_R) в $\sum_{AB} h_{AB}(\Phi)(W_{AB}^T\varepsilon W_{BL})$ имеют вид

$$- \left[\sum_{AB} h_{AB}(\Phi)\left(W_{AL}^{\mathrm{T}}\varepsilon W_{BL}\right)\right]_{\theta_L^2}$$
$$= \left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L\right)\sum_{AB}\left(\lambda_{AL}^{\mathrm{T}}\varepsilon\lambda_{BL}\right)\left[\frac{1}{2}\sum_{nm}\left(\psi_{nL}^{\mathrm{T}}\varepsilon\psi_{mL}\right)\frac{\partial^2 h_{AB}(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m} - \sum_n \mathscr{F}_n\frac{\partial h_{AB}(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right]$$
$$+ \left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L\right)\sum_{AB} h_{AB}(\varphi)\left[-\left(\overline{\lambda_A}\not{D}(1-\gamma_5)\lambda_B\right) - \frac{1}{2}f_{A\mu\nu}f_B^{\mu\nu}\right.$$
$$\left.+ \frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f_A^{\mu\nu}f_B^{\rho\sigma} + D_A D_B\right]$$
$$+ \sqrt{2}\sum_{ABn}\frac{\partial h_{AB}(\varphi)}{\partial\varphi_n}\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\psi_{nL}\right)\left[-\left(\lambda_{BL}^{\mathrm{T}}\varepsilon\gamma^\mu\gamma^\nu\theta_L\right)f_{A\mu\nu} + 2i\left(\lambda_{BL}^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L\right)\right],$$

где считается, что все поля вычисляются в точке x^μ, а не в точке x_+^μ. (Первые и вторые члены в правой части берутся соответственно из формул (26.4.4) и (27.3.16).) Кроме того, записав $\theta_{L\alpha}\theta_{L\beta}$ как $\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}(\theta_L^T\varepsilon\theta_L)$, можно сделать третий член пропорциональным $(\theta_L^T\varepsilon\theta_L)$:

$$\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\psi_{nL}\right)\left[\left(\overline{\psi_B}\gamma^\mu\gamma^\nu\theta_L\right)f_{A\mu\nu} - 2i\left(\overline{\psi_B}\theta_L\right)\right] =$$
$$\frac{1}{2}\left(\theta_L^{\mathrm{T}}\varepsilon\theta_L\right)\left[\left(\overline{\psi_B}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_{nL}\right) - 2i\left(\overline{\psi_B}\psi_{nL}\right)D_A\right].$$

$\mathcal{F}$-член является коэффициентом при $(\theta_L^T\varepsilon\theta_L)$, т. е.

$$
\begin{aligned}
&-\left[\sum_{AB} h_{AB}(\Phi)\left(W_{AL}^{\mathrm{T}}\varepsilon W_{BL}\right)\right]_{\mathcal{F}} \\
&=\sum_{AB}\left(\lambda_{AL}^{\mathrm{T}}\varepsilon\lambda_{BL}\right)\left[\frac{1}{2}\sum_{nm}\left(\psi_{nL}^{\mathrm{T}}\varepsilon\psi_{mL}\right)\frac{\partial^2 h_{AB}(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}-\sum_n \mathcal{F}_n\frac{\partial h_{AB}(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right] \\
&+\sum_{AB} h_{AB}(\varphi)\left[-\left(\overline{\lambda_A}\not{D}(1-\gamma_5)\lambda_B\right)-\frac{1}{2}f_{A\mu\nu}f_B^{\mu\nu}+\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f_A^{\mu\nu}f_B^{\rho\sigma}+D_AD_B\right] \\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{ABn}\frac{\partial h_{AB}(\varphi)}{\partial\varphi_n}\left[-\left(\overline{\psi_B}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_{nL}\right)f_{A\mu\nu}+2i\left(\overline{\psi_B}\psi_{nL}\right)D_A\right].
\end{aligned}
$$

Остальные члены в (27.4.41) выводятся из калибровочно-инвариантного выражения для лагранжиана (26.8.6). Собирая все вместе, получаем лагранжиан

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &=\mathrm{Re}\sum_{nm}\mathcal{G}_{nm}(\varphi,\varphi^*)\left[-\frac{1}{2}\left(\overline{\psi_m}\not{D}(1+\gamma_5)\psi_n\right)+\mathcal{F}_n\mathcal{F}_m^*-D_\mu\varphi_nD^\mu\varphi_m^*\right] \\
&-\mathrm{Re}\sum_{nml}\frac{\partial^3K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi_l^*}\left(\overline{\psi_n}\psi_{mL}\right)\mathcal{F}_\ell^*+\mathrm{Re}\sum_{nml}\frac{\partial^3K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi_l^*}\left(\overline{\psi_m}\gamma^\mu\psi_{\ell R}\right)D_\mu\varphi_n \\
&+\frac{1}{4}\sum_{nmlk}\frac{\partial^4K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi_l^*\partial\varphi_k^*}\left(\overline{\psi_n}\psi_{mL}\right)\left(\overline{\psi_k}\psi_{\ell R}\right) \\
&-\mathrm{Re}\sum_{nm}\frac{\partial^2f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\left(\overline{\psi_n}\psi_{mL}\right)+2\mathrm{Re}\sum_n\mathcal{F}_n\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n} \\
&+\frac{1}{4}\mathrm{Re}\sum_{ABnm}\left(\overline{\lambda_A}\lambda_{BL}\right)\left(\overline{\psi_n}\psi_{mL}\right)\frac{\partial^2h_{AB}(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{ABn}\left(\overline{\lambda_A}\lambda_{BL}\right)\mathcal{F}_n\frac{\partial h_{AB}(\varphi)}{\partial\varphi_n} \\
&+\mathrm{Re}\sum_{AB}h_{AB}(\varphi)\left[-\left(\overline{\lambda_A}\not{D}\lambda_{BR}\right)-\frac{1}{4}f_{A\mu\nu}f_B^{\mu\nu}+\frac{1}{8}i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f_A^{\mu\nu}f_B^{\rho\sigma}+\frac{1}{2}D_AD_B\right] \\
&+\frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}\sum_{ABn}\frac{\partial h_{AB}(\varphi)}{\partial\varphi_n}\left[-\left(\overline{\lambda_B}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_{nL}\right)f_{A\mu\nu}+2i\left(\overline{\lambda_B}\psi_{nL}\right)D_A\right]. \qquad (27.4.42)
\end{aligned}
$$

Интересной особенностью этого выражения является возникновение массы у калибрино в теориях с функциями $h_{AB}(\varphi)$, зависящими от φ_n, когда суперсимметрия нарушается за счет ненулевого значения $\mathcal{F}_n$. Такой же механизм используется для генерации масс калибрино в некоторых теориях с вызванным гравитацией нарушением суперсимметрии, которые будут обсуждаться в разделе 31.7.

27.5. Нарушение суперсимметрии в древесном приближении. Продолжение.

В предыдущем разделе было показано, что если все константы Файе–Иллиопулоса ξ_A равны нулю и если существует решение уравнений $\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n = 0$, то существует также решение этих уравнений, где все D-компоненты калибровочных суперполей равны нулю, так что суперсимметрия не нарушается. Следовательно, в перенормируемых теориях калибровочных и киральных суперполей в древесном приближении есть только две (не исключающие друг друга) возможности, приводящие к спонтанному нарушению суперсимметрии: суперпотенциал $f(\varphi)$ можно сделать таким, что не все уравнения $\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n = 0$ будут иметь решения, или для калибровочных групп с $U(1)$ множителями возможно появление членов Файе–Илиопулоса в действии.

В разделе 26.5 уже было показано, при каких условиях не будет ни одного значения φ, для которого $\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n = 0$. При рассмотрении взаимодействия киральных суперполей с калибровочными полями справедливы те же рассуждения. Поэтому рассмотрим другую возможность: спонтанное нарушение суперсимметрии за счет членов Файе–Иллиопулоса. Поскольку они могут появиться только для калибровочных групп, содержащих произведение нескольких $U(1)$, то в простейшей ситуации теория будет содержать только один такой множитель. Как обсуждалось в разделе 22.4, чтобы избежать $U(1)$–$U(1)$–$U(1)$ и $U(1)$–гравитон–гравитон аномалий, необходимо чтобы сумма $U(1)$ квантовых чисел всех левокиральных суперполей и сумма их кубов равнялась нулю. Рассмотрим простейшую возможность: два левокиральных суперполя $\Phi_\pm$ с $U(1)$ квантовыми числами $\pm e$. (Такая теория является суперсимметричным вариантом квантовой электродинамики со спинорными компонентами ψ_{-L} и ψ_{+L} двух суперполей, обеспечивающих левые части электронного поля и ему комплексно сопряженного.) Наиболее общий вид $U(1)$-инвариантного суперпотенциала в перенормируемой теории есть просто $f(\Phi) = m\Phi_+\Phi_-$. Скалярный потенциал (27.4.9) для скалярных компонент $\varphi_\pm$ этих суперполей имеет тогда вид

$$V(\varphi_+,\varphi_-) = m^2|\varphi_+|^2 + m^2|\varphi_-|^2 + \left(\xi + e^2|\varphi_+|^2 - e^2|\varphi_-|^2\right)^2. \qquad (27.5.1)$$

Очевидно, что кроме случая, когда все константы Файе–Илиопулоса ξ равны нулю, невозможно найти суперсимметричный вакуум с $V = 0$. Для $\xi > m^2/2e^2$ или $\xi < -m^2/2e^2$ потенциал (27.5.1) имеет минимум в двух случаях: либо $\varphi_+ = 0$ и $|\varphi_-|^2 = (2e^2\xi - m^2)/2e^4$, либо $\varphi_- = 0$

и $|\varphi_+|^2 = (-2e^2\xi - m^2)/2e^4$. Поэтому вместе с суперсимметрией нарушается калибровочная симметрия $U(1)$. Для $|\xi| < m^2/2e^2$ минимум потенциала достигается при $\varphi_+ = \varphi_- = 0$, и тогда калибровочная симметрия сохраняется. В общем случае нет обязательной связи между возможным нарушением суперсимметрии и калибровочных симметрий.

Независимо от того, происходит ли спонтанное нарушение суперсимметрии за счет обсуждаемого сейчас механизма Файе–Иллиопулоса, или механизма О'Райферти из раздела 26.5, или какой-то их комбинации, суперсимметрия оставляет память о себе в структуре масс в древесном приближении. Исследование лагранжиана (27.4.8) в случае произвольной перенормируемой суперсимметричной теории калибровочных и киральных суперполей показывает, что спонтанное нарушение суперсимметрии в такой теории приводит к следующим поправкам к тем массам, которые вычислены в разделе 27.4.

Массы частиц спина 0

Если $\mathscr{F}$-члены $\mathscr{F}_n = -(\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n)^*$ не обращаются в нуль в точке минимума потенциала φ_0, то к слагаемым второго порядка по $\phi_n \equiv \varphi_n - \varphi_{n0}$ в потенциале добавляются, помимо перечисленных в формуле (27.4.15), дополнительные слагаемые:

$$\begin{aligned}V_{\text{квадр}} = &\sum_{nm}(\mathscr{M}^*\mathscr{M})_{nm}\phi_n^*\phi_m + \sum_{Anm}(t_A\varphi_0)_n(t_A\varphi_0)_m^*\phi_n^*\phi_m\\ &+\frac{1}{2}\sum_{Anm}(t_A\varphi_0)_n^*(t_A\varphi_0)_m^*\phi_n\phi_m + \frac{1}{2}\sum_{Anm}(t_A\varphi_0)_n(t_A\varphi_0)_m\phi_n^*\phi_m^*\\ &+\frac{1}{2}\sum_{nm}\mathscr{N}_{nm}\phi_n\phi_m + \frac{1}{2}\sum_{nm}\mathscr{N}_{nm}^*\phi_n^*\phi_m^*\\ &+\sum_{Anm}D_{A0}(t_A)_{nm}\phi_n^*\phi_m,\end{aligned} \tag{27.5.2}$$

где опять $\mathscr{M}$ — комплексная симметричная матрица (26.4.11):

$$\mathscr{M}_{nm} \equiv \left(\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\right)_{\varphi=\varphi_0},$$

$\mathscr{N}_{nm}$ — новый множитель, равный

$$\mathscr{N}_{nm} \equiv -\sum_{\ell}\mathscr{F}_{\ell 0}\left(\frac{\partial^3 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m\partial\varphi_\ell}\right)_{\varphi=\varphi_0}, \tag{27.5.3}$$

а $\mathscr{F}_0$ и D_{A0} — опять $\mathscr{F}$- и D-члены киральных скалярных и калибровочных суперполей, вычисленные в минимуме потенциала:

$$\mathscr{F}_{n0} = -\left[\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n}\right]^*_{\varphi=\varphi_0}, \quad D_{A0} = \xi_A + \sum_{nm} \varphi^*_{n0}(t_A)_{nm}\varphi_{m0}.$$

Если мы запишем квадратичную часть потенциала (27.5.2) в форме (27.4.16):

$$V_{\text{квадр}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\phi \\ \phi^*\end{bmatrix}^\dagger M_0^2 \begin{bmatrix}\phi \\ \phi^*\end{bmatrix},$$

то вместо (27.4.17), получим скалярную массовую матрицу

$$M_0^2 = \begin{bmatrix} \mathscr{M}^*\mathscr{M} + \mathscr{A} + \sum_A D_{A0} t_A & \mathscr{B} + \mathscr{N}^* \\ \mathscr{B}^* + \mathscr{N} & \mathscr{M}\mathscr{M}^* + \mathscr{A}^* + \sum_A D_{A0} t_A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \tag{27.5.4}$$

где

$$\mathscr{A} \equiv \sum_A (t_A\varphi_0)(t_A\varphi_0)^\dagger, \qquad \mathscr{B} \equiv \sum_A (t_A\varphi_0)(t_A\varphi_0)^{\mathrm{T}}.$$

Массы частиц спина 1/2

Массовая матрица фермионов M дается выражением (27.4.30):

$$M_{nm} = \mathscr{M}_{nm}, \quad M_{nA} = M_{An} = i\sqrt{2}(t_A\varphi_0)^*_n, \quad M_{AB} = 0.$$

Однако условие калибровочной инвариантности (27.4.18) вместо выражения (27.4.19) дает

$$\sum_m \mathscr{M}_{nm}(t_A\varphi_0)_m = \sum_m \mathscr{F}_{m0}(t_A)_{mn}. \tag{27.5.5}$$

Отсюда эрмитова положительная матрица, собственные значения которой квадратичны по массам фермионов, имеет вид

$$\begin{aligned} (M^\dagger M)_{nm} &= (\mathscr{M}^\dagger\mathscr{M})_{nm} + 2\sum_A (t_A\varphi_0)_n (t_A\varphi_0)^*_m, \\ (M^\dagger M)_{AB} &= 2(\varphi_0^\dagger t_B t_A \varphi_0), \\ (M^\dagger M)_{An} &= (M^\dagger M)^*_{nA} = i\sqrt{2}\sum_m \mathscr{F}_{m0}(t_A)_{mn}. \end{aligned} \tag{27.5.6}$$

Массы частиц спина 1

Квадраты масс векторных бозонов опять даются собственными значениями матрицы (27.4.36):

$$(\mu^2)_{AB} = \left(\varphi_0^\dagger, \{t_B, t_A\}\varphi_0\right). \tag{27.5.7}$$

За исключением D-членов в (27.5.4), все изменения в матрицах квадратов масс возникают в недиагональных элементах. Поэтому следы матриц (27.5.4), (27.5.6) и (27.5.7) имеют чрезвычайно простой вид: для спина 0

$$\operatorname{Tr} M_0^2 = 2\operatorname{Tr}(\mathcal{M}^*\mathcal{M}) + \operatorname{Tr}\mu^2 + 2\sum_A D_{A0}\operatorname{Tr} t_A, \tag{27.5.8}$$

а для спина $1/2$

$$\operatorname{Tr}(M^\dagger, M) = \operatorname{Tr}(\mathcal{M}^*\mathcal{M}) = 2\operatorname{Tr}\mu^2. \tag{27.5.9}$$

Поскольку след матрицы равен сумме ее собственных значений, то получается *правило сумм для масс*

$$\sum_{\text{спин } 0} \text{масса}^2 - \sum_{\text{спин } 1/2} \text{масса}^2 + 3\sum_{\text{спин } 1} \text{масса}^2 = -2\sum_A D_{A0}\operatorname{Tr} t_A. \tag{27.5.10}$$

След матрицы t_A автоматически равен нулю, если только t_A не является генератором группы $U(1)$. Как уже говорилось в разделе 22.4, для калибровочных генераторов группы $U(1)$ след, взятый по левым фермионам, также должен быть равен нулю, чтобы исключить гравитационные вклады в аномалию, нарушающую сохранение $U(1)$ тока. Тогда формула (27.5.10) упрощается [4]:

$$\sum_{\text{спин } 0} \text{масса}^2 - \sum_{\text{спин } 1/2} \text{масса}^2 + 3\sum_{\text{спин } 1} \text{масса}^2 = 0. \tag{27.5.11}$$

Конечно, ненарушенные законы сохранения заряда, цвета, барионного и лептонного чисел приводят к тому, что массовые матрицы не имеют элементов, связывающих частицы с разными значениями этих квантовых чисел. Поэтому все эти результаты выполняются отдельно для каждого набора сохраняющихся квантовых чисел.

Во многих работах часто говорится, что правило сумм (27.5.11) свидетельствует против моделей, в которых имеется спонтанное нарушение суперсимметрии в древесном приближении минимального суперсимметричного расширения стандартной модели. Этот и другие аргументы будут обсуждаться в разделе 28.3.

Как уже говорилось в разделе 26.5 (и еще будет обсуждаться в более общем случае в разделах 29.1 и 29.2), спонтанное нарушение суперсимметрии обязательно приводит к существованию безмассового фермиона голдстино. Для перенормируемых калибровочных теорий в древесном приближении поле голдстино g появляется как член в спинорных компонентах ψ_n и λ_A киральных и калибровочных суперполей в виде

$$\phi_{nL} = i\sqrt{2}\mathscr{F}_{n0}g_L + \ldots, \quad \lambda_{AL} = D_{A0}g_L + \ldots, \tag{27.5.12}$$

где точки обозначают члены, содержащие спинорные поля определенной ненулевой массы. Чтобы это проверить, надо показать, что $(i\sqrt{2}\mathscr{F}_{n0}, D_{A0})$ является собственным вектором матрицы квадратов масс фермионов $M^\dagger M$ с для собственным значением, равным нулю. С этой целью придется использовать условие, что потенциал (27.4.9) стационарен при $\varphi = \varphi_0$:

$$0 = \left.\frac{\partial V}{\partial \varphi_n}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -\sum_m \mathscr{M}_{nm}\mathscr{F}_{m0} + \sum_A D_{A0}(\phi_0^\dagger t_A)_n. \tag{27.5.13}$$

Кроме того необходимо условие калибровочной инвариантности (27.4.12), которое при $\varphi = \varphi_0$ имеет вид:

$$\sum_n \mathscr{F}_{n0}(t_A\varphi_0)_n = 0. \tag{27.5.14}$$

Комбинируя (27.5.13) и (27.5.14) с (27.5.5) и (27.5.6), получаем

$$i\sqrt{2}\sum_m (M^\dagger M)_{nm}\mathscr{F}_{m0} = i\sqrt{2}\sum_A D_A(t_A\mathscr{F}_0^*)_n = -\sum_A (M^\dagger M)_{nA}D_{A0} \tag{27.5.15}$$

и

$$i\sqrt{2}\sum_m (M^\dagger M)_{Am}\mathscr{F}_{m0} = -2\sum_{nm}\mathscr{F}_{n0}(t_A)_{nm}\mathscr{F}_{m0} = -\sum_B (M^\dagger M)_{AB}D_{B0}, \tag{27.5.16}$$

т. е.

$$M^\dagger M \begin{pmatrix} i\sqrt{2}\mathscr{F}_0 \\ D_0 \end{pmatrix} = 0, \tag{27.5.17}$$

что и требовалось показать.

27.6. Теоремы об отсутствии перенормировок в рамках теории возмущений

С самого начала было обнаружено, что несколько ультрафиолетовых расходимостей, характерных для обычных перенормируемых квантовых теорий поля, отсутствуют в их суперсимметричных версиях. С 1975 года начала развиваться техника супердиаграмм, в которой все частицы каждого супермультиплета рассматриваются вместе. Тогда стало возможным показать, что некоторые радиационные поправки не только конечны, но и вообще отсутствуют в теории возмущений [5]. Супердиаграммы будут детально описаны в главе 30. Однако, для доказательства наиболее важных теорем они не потребуются. В этом разделе излагается вариант метода, разработанного Зайбергом в 1993 году [6], показывающий, что теоремы об отсутствии перенормировок могут быть легко получены из простых соображений симметрии и аналитичности.

Рассмотрим общую перенормируемую суперсимметричную калибровочную теорию, содержащую левокиральные поля Φ_n и (или) калибровочные суперполя V_A. Как упоминалось в разделе 27.3, если мы уберем множитель g из t_A и C_{ABC} и включим его в калибровочные суперполя, то лагранжиан примет вид

$$\mathscr{L} = \left[\Phi^{\dagger} e^{-V}\Phi\right]_D + 2\,\mathrm{Re}\left[f(\Phi)\right]_{\mathscr{F}} + \frac{1}{2g^2}\,\mathrm{Re}\Big[\sum_{A\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} W_{A\alpha L} W_{A\beta L}\Big]_{\mathscr{F}}, \qquad (27.6.1)$$

где суперпотенциал $f(\Phi)$ является калибровочно-инвариантным полиномом третьей степени по левокиральным суперполям. (Здесь пренебрегается возможным θ-членом, не играющим роли в теории возмущений.)

Предположим, что введено ультрафиолетовое обрезание λ по импульсам, циркулирующим в петлевых диаграммах. Тогда, как уже обсуждалось в разделе 12.4, можно найти *локальный* вильсоновский эффективный лагранжиан $\mathscr{L}_\lambda$, который с учетом этого обрезания дает точно такие же результаты для элементов S-матрицы, относящихся к процессам с импульсами ниже λ, что и исходный лагранжиан. Массы и параметры связи эффективной плотности лагранжиана зависят теперь от λ; как правило, в нем будет бесконечное число членов с взаимодействием, т. е. все возможные члены, разрешенные симметрией теории. Однако в суперсимметричных теориях все гораздо проще. Теоремы от отсутствии перенормировок утверждают, что пока обрезание сохраняет суперсимметрию и калибровочную инвариантность, во всех порядках теории возмущений эффективный лагранжиан будет иметь структуру

$$\mathcal{L}_\lambda = \left[\mathcal{A}_\lambda\left(\Phi, \Phi^\dagger, V, \mathcal{D}, \ldots\right)\right]_D + 2\,\mathrm{Re}\left[f(\Phi)\right]_{\mathcal{F}} + \frac{1}{2g_\lambda^2}\mathrm{Re}\left[\sum_{A\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} W_{A\alpha L} W_{A\beta L}\right]_{\mathcal{F}} \tag{27.6.2}$$

где $\mathcal{A}_\lambda$ — общая лоренц- и калибровочно-инвариантная функция, символ «$\mathcal{D}, \ldots$» обозначает члены, содержащие суперпроизводные или пространственно-временные производные предшествующих аргументов, g_λ — *однопетлевая* эффективная калибровочная константа связи, определенная той же формулой, что и однопетлевая перенормируемая калибровочная константа связи

$$g_\lambda^{-2} = \text{константа} - 2b\ln\lambda, \tag{27.6.3}$$

где b — коэффициент при g^3 в функции Гелл-Манна–Лоу $\beta(g)$, обсуждавшейся в главе 18. Это справедливо для простой калибровочной группы с одной константой связи, но расширение до прямого произведения простой группы и группы $U(1)$ тривиально. В частности заметим, что эффективный суперпотенциал не только конечен при $\lambda \to \infty$, но, по крайней мере, в рамках теории возмущений, не содержит членов, отсутствующих в исходном суперпотенциале. Поэтому коэффициенты при всех его членах не изменяются.

Чтобы доказать эту теорему, будем интерпретировать теорию как частный случай теории с двумя дополнительными внешними калибровочно-инвариантными левокиральными суперполями X и Y с лагранжианом

$$\mathcal{L}^\sharp = \frac{1}{2}\left[\Phi^\dagger e^{-V}\Phi\right]_D + 2\,\mathrm{Re}\left[Y f(\Phi)\right]_{\mathcal{F}} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[X \sum_{A\alpha B} \varepsilon_{\alpha\beta} W_{A\alpha L} W_{A\beta L}\right]_{\mathcal{F}}. \tag{27.6.4}$$

Этот лагранжиан становится равным исходному, когда скалярные компоненты полей X и Y равны $x = 1/g^2$ и $y = 1$, а спинорные и вспомогательные компоненты X и Y выбраны равными нулю. Поскольку предполагается, что процедура обрезания сохраняет суперсимметрию и калибровочную инвариантность, эффективный лагранжиан при наличии этих внешних суперполей должен быть суммой D-члена общего суперполя и действительной части $\mathcal{F}$-члена левокирального суперполя

$$\mathcal{L}_\lambda^\sharp = \left[\mathcal{A}_\lambda\left(\Phi, \Phi^\dagger, V, X, X^\dagger, Y, Y^\dagger, \mathcal{D}, \ldots\right)\right]_D + 2\,\mathrm{Re}\left[\mathcal{B}_\lambda(\Phi, W_L, X, Y)\right]_{\mathcal{F}}, \tag{27.6.5}$$

где $\mathcal{A}_\lambda$ и $\mathcal{B}_\lambda$ — калибровочно-инвариантные функции выписанных аргументов. В $\mathcal{F}$-члены не включены суперпроизводные и пространственно-временные производные, потому что, как показано в разделе 26.3, члены, содержащие производные любых левокиральных суперполей и им сопряженных, можно переписать как вклады в $[\mathscr{A}_\lambda]_D$. (Действительно в формуле (27.3.12) W_L выражено через два $\mathscr{D}_R$, действующих на суперполе $\exp(-2V)\mathscr{D}_L\exp(2V)$, но это суперполе не калибровочно-инвариантно, а мы требуем калибровочную инвариантность $\mathscr{A}_\lambda$.)

Зависимость $\mathscr{B}_\lambda$ от X и Y сильно ограничена двумя дополнительными симметриями действия, полученного из лагранжиана (27.6.4). (Обе симметрии нарушаются непертурбативными эффектами, которые будут обсуждены в главе 29.) Первая симметрия — пертурбативная $U(1)$ R-симметрия, аналогичная той, которая обсуждалась в разделе 26.3. Для нее θ_L и θ_R имеют значения R, равные $+1$ и -1; суперполя Φ, V и X нейтральны по R; Y имеет значение R, равное $+2$. (Вспомним, что $f_\mathscr{F}$ является коэффициентом при θ_L^2 в f. Поэтому, для того, чтобы значение R для $f_\mathscr{F}$ равнялось нулю, f должна иметь $R = 2$.) Поскольку W_L содержит два $\mathscr{D}_R$ и один $\mathscr{D}_L$-член, действующие на R-нейтральные суперполя, он имеет значение $R = 1$. Тогда R-инвариантность требует, чтобы для функции $\mathscr{B}_\lambda$, подобно суперпотенциалу, значение R было равно $+2$. Эта функция *аналитична* и поэтому не может зависеть ни от какого суперполя с отрицательными значениями R, такими, как сопряженные левокиральным суперполям. Следовательно все члены в $\mathscr{B}_\lambda$ могут быть только первого порядка по Y и второго порядка по W_L с коэффициентами, зависящими только от R-нейтральных суперполей Φ и (или) X:

$$\mathscr{B}_\lambda(\Phi, W_L, X, Y) = Y f_\lambda(\Phi) + \sum_{\alpha\beta AB} \epsilon_{\alpha\beta} W_{A\alpha L} W_{B\beta L} h_{\lambda AB}(\Phi, X). \tag{27.6.6}$$

(В силу лоренц-инвариантности спинорные индексы в W_L должны быть свернуты с $\epsilon_{\alpha\beta}$.)

Другой симметрией является трансляция X на мнимую числовую константу, т. е. $X \to X + i\xi$, где ξ — действительное число. Это изменяет лагранжиан (27.6.4) на величину, пропорциональную $\operatorname{Im}\sum_{A\alpha\beta} W_{A\alpha\beta} W_{A\beta L}$, что, как было показано в разделе 27.3, является пространственно-временной производной, и поэтому не проявляется в теории возмущений. В силу этой трансляционной симметрии поле X не входит в эффективный лагранжиан (27.6.5), кроме случая, когда оно содержится в исходном лагранжиане (27.6.4). Из этого следует, что f_λ не зависит от X, а $h_{\lambda AB}$ состоит из не зависящего от Φ члена, пропорционального $X\delta_{AB}$, и члена, не зависящего от X, т. е.

$$\mathscr{B}_\lambda(\Phi, W_L, X, Y) = Y f_\lambda(\Phi) + \sum_{\alpha\beta AB} \epsilon_{\alpha\beta} W_{A\alpha L} W_{B\beta L} \left[c_\lambda \delta_{AB} X + \ell_{\lambda AB}(\Phi)\right]. \tag{27.6.7}$$

где c_λ — действительная зависящая от обрезания константа.

Смысл введения вспомогательных внешних полей X и Y — в том, что, придавая им соответствующие значения, можно использовать приближения слабой связи и найти коэффициенты в (27.6.7). Если положить спинорные и вспомогательные компоненты X и Y равными нулю и устремить их скалярные компоненты x и y к бесконечности и к нулю соответственно, то калибровочная константа связи обращается в нуль как $1/\sqrt{x}$, а все скалярные константы связи и юкавские константы, полученные из суперпотенциала, обращаются в нуль как y. В этом пределе только одна диаграмма дает вклад в пропорциональный Y член в (27.6.7). Эта диаграмма имеет одну вершину, возникающую от члена $2\text{Re}[Yf(\Phi)]_{\mathscr{F}}$ в (27.6.4), так что

$$f_\lambda(\Phi) = f(\Phi). \tag{27.6.8}$$

Кроме того, для $Y=0$ существует закон сохранения, требующий, чтобы каждый член в $\mathscr{L}^\sharp_\lambda$ имел одинаковое число Φ и $\Phi^\dagger$. Поэтому поскольку $\Phi^\dagger$ не может входить в $\ell_{\lambda AB}$, то там не должно быть и Φ. В силу калибровочной инвариантности константа $\ell_{\lambda AB}$ в случае простой группы должна быть пропорциональна δ_{AB}:

$$\ell_{\lambda AB} = \delta_{AB} L_\lambda. \tag{27.6.9}$$

Поскольку калибровочные пропагаторы ведут себя как $1/x$, в то время как чисто калибровочные взаимодействия — как x, а скалярные пропагаторы и взаимодействия не зависят от x, то при $y=0$ число степеней x в диаграмме с V_W вершинами взаимодействия только калибровочных бозонов, I_W внутренними бозонными линиями и любым числом вершин взаимодействия скаляров с калибровочными бозонами и скалярных пропагаторов равно

$$N_x = V_W - I_W. \tag{27.6.10}$$

Число петель определяется выражением

$$L = I_W + I_\Phi - V_W - V_\Phi + 1, \tag{27.6.11}$$

где I_Φ — число внутренних Φ-линий; V_Φ — число вершин Φ—V взаимодействия. Ко всем Φ—V вершинам прикреплены две Φ-линии, поэтому если нет внешних Φ-линий, то I_Φ и V_Φ равны и поэтому сокращаются в (27.6.11), так что (27.6.10) принимает вид

$$N_x = 1 - L. \tag{27.6.12}$$

Итак, коэффициент c_λ при поле X в (27.6.7) в древесном приближении получается правильным и поэтому он такой же, как и в исходном лагранжиане, т. е. $c_\lambda = 1$; коэффициент L_λ в члене, не зависящем от X, вычисляется только из однопетлевых диаграмм. Собираем все члены вместе и получаем

$$\mathscr{L}^\sharp_\lambda = \left[\mathscr{A}_\lambda\left(\Phi, \Phi^\dagger, V, X, X^\dagger, Y, Y^\dagger, \mathscr{D}, \ldots\right)\right]_D + 2\,\mathrm{Re}\left[Y f(\Phi)\right]_{\mathscr{F}} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(X + L_\lambda)\sum_{A\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} W_{A\alpha L} W_{A\beta L}\right]_{\mathscr{F}}, \tag{27.6.13}$$

где L_λ — однопетлевой вклад. Положив $Y = 1$ и $X = 1/g^2$, получим (27.6.2), где $g_\lambda^{-2} = g^{-2} + L_\lambda$. Как показано в разделе 18.3, вклад старшего порядка в $\lambda dg_\lambda/d\lambda$ — это та же функция g_λ, независимо от схемы перенормировки, использованной для определения этой константы связи. Поэтому в однопетлевом приближении мы должны иметь

$$\lambda d g_\lambda / d\lambda = b g_\lambda^3, \tag{27.6.14}$$

где b — тот же коэффициент при g^3, как и в уравнении ренормгруппы Гелл-Манна и Лоу. Решением является (27.6.3), что и завершает доказательство.

В теориях с $U(1)$ калибровочным полем V_1 лагранжиан может содержать член Файе–Иллиопулоса (27.2.7):

$$\mathscr{L}_{\text{ФИ}} = \xi\,[V_1]_D. \tag{27.6.15}$$

Легко видеть, что коэффициент ξ в этом выражении не перенормируется [7]. Если бы соответствующий коэффициент ξ_λ в вильсоновском лагранжиане зависел от калибровочных констант связи или от констант связи в суперпотенциале, тогда после замены исходного лагранжиана (27.6.1) лагранжианом (27.6.4), содержащим внешние суперполя X и Y, в силу суперсимметрии этот член в вильсоновском лагранжиане имел бы вид

$$\mathscr{L}^\sharp_{\text{ФИ}\lambda} = \left[\xi_\lambda(X, Y, X^*, Y^*) V_1\right]_D, \tag{27.6.16}$$

где ξ_λ — функция, нетривиально зависящая от X и (или) Y и им сопряженных полей. Но такой член не был бы калибровочно-инвариантным, потому что, согласно (27.2.18), калибровочное преобразование сдвигает V_1 на киральное суперполе $i(\Omega - \Omega^*)/2$, и хотя D-член кирального суперполя равен нулю, произведение $i(\Omega - \Omega^*)/2$ и ξ_λ не кирально по отношению к общим калибровочным преобразованиям, если ξ_λ как-то зависит от других суперполей. В действительности есть диаграммы, дающие вклад в ξ_λ и независящие от всех констант связи.

Для лагранжиана (27.6.1) в вершины взаимодействия калибровочного суперполя с киральной материей не входят множители константы связи g.

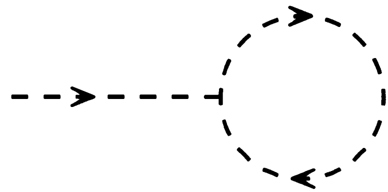

Рис. 27.1. Однопетлевая диаграмма, которая может расходиться квадратично в теориях с суперсимметрией, нарушенной трилинейными связями между скалярными полями и им сопряженными полями. Все линии представляют комплексные скалярные поля.

Однако каждый калибровочный пропагатор содержит множитель g^{-2}, так что диаграмма без внутренних линий калибровочных бозонов и без самодействия кирального поля не зависит от констант связи. Вклад в ξ_λ дают только те диаграммы, в которых одна внешняя линия калибровочного бозона присоединяется к киральной петле (рис. 27.1.). Вклад таких диаграмм пропорционален сумме калибровочных констант связи всех киральных суперполей, т. е. следу генератора группы $U(1)$. Но, как обсуждалось в разделе 22.4, этот след должен быть равен нулю (если симметрия $U(1)$ не нарушена), чтобы избежать гравитационных аномалий, которые нарушают сохранение $U(1)$ тока.

Наиболее важным применением этих теорем является вывод, что если нет члена Файе–Иллиопулоса и если суперпотенциал $f(\Phi)$ допускает решения уравнения $\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n = 0$, то суперсимметрия не нарушается в любом конечном порядке теории возмущений.

Чтобы это проверить, необходимо исследовать лоренц-инвариантные конфигурации полей, в которых Φ_n имеет только скалярные компоненты φ_n и постоянные компоненты вспомогательных полей $\mathcal{F}_n$, а коэффициенты V_A (в калибровке Весса–Зумино) калибровочных генераторов t_A в матричном калибровочном суперполе V имеют только вспомогательные компоненты D_A. Суперсимметрия не нарушается, если существуют такие значения φ_n, для которых $\mathcal{L}_\lambda$ не содержит членов первого порядка по $\mathcal{F}_n$ и D_A. В этом случае наверняка должно существовать равновесное решение $\mathcal{F}_n = D_A = 0$. (В разделе 29.2 будет показано, что это необходимое и достаточное условие сохранения суперсимметрии.) Если нет членов Файе–Иллиопулоса, то так и произойдет, если для всех A

$$\sum_{nm} \frac{\partial K_\lambda(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n^*}(t_A)_{nm}\varphi_m^* = 0 \qquad (27.6.17)$$

и для всех n

$$\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n} = 0, \tag{27.6.18}$$

где эффективный келеров потенциал $K_\lambda(\varphi, \varphi^*)$ равен

$$K_\lambda(\varphi, \varphi^*) = \mathscr{A}_\lambda(\varphi, \varphi^*, 0, 0, \ldots), \tag{27.6.19}$$

с $\mathscr{A}_\lambda(\varphi, \varphi^*, 0, 0, \ldots)$, полученным из $\mathscr{A}_\lambda$, если положить калибровочное суперполе и все производные равными нулю. (В силу лоренц-инвариантности все суперпроизводные равны нулю, поэтому $\mathscr{A}_\lambda$ зависит от V только как $\exp(-V)$ при каждом множителе $\Phi^\dagger$.) Используем прием, к которому уже прибегали в разделе 27.4. Если уравнение (27.6.18) имеет решение $\varphi^{(0)}$, то в силу калибровочной симметрии существует множество таких решений, где φ_n заменяется на

$$\varphi_n(z) = \left[\exp\left(i\sum_A t_A z_A\right)\right]_{nm} \varphi_m^{(0)}, \tag{27.6.20}$$

где (поскольку f зависит от φ и не зависит от φ^*) z_A — произвольное множество *комплексных* параметров. Если $K_\lambda(\varphi, \varphi^*)$ имеет стационарную точку где угодно на поверхности $\varphi = \varphi(z)$, то в этой точке

$$0 = \sum_{nmA} \frac{\partial K_\lambda(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi_n} (t_A)_{nm} \varphi_m \delta z_A - \sum_{nmA} \frac{\partial K_\lambda(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi_n^*} (t_A)_{mn} \varphi_m^* \delta z_A^*. \tag{27.6.21}$$

Поскольку это условие должно выполняться для всех бесконечно малых *комплексных* δz_A, коэффициенты при δz_A и δz_A^* должны быть равны нулю. Поэтому в этой точке удовлетворяются как уравнение (27.6.17), так и уравнение (27.6.18). Таким образом, существование стационарной точки $K_\lambda(\varphi, \varphi^*)$ на поверхности $\varphi = \varphi(z)$ означало бы, что суперсимметрия не нарушается во всех порядках теории возмущений. Келеров потенциал нулевого порядка $(\varphi^\dagger\varphi)$ ограничен снизу и стремится к бесконечности при $\varphi \to \infty$, поэтому он безусловно имеет минимум на поверхности $\varphi = \varphi(z)$, где он, конечно, стационарен. Если бы не было плоских направлений, вдоль которых K_λ постоянен в этом минимуме, то любое достаточно малое возмущение келерова потенциала, сместило бы этот минимум, но не уничтожило бы его. Однако на поверхности $\varphi = \varphi(z)$ в точке, где келеров потенциал имеет минимум, есть два плоских направления: обычные глобальные калибровочные преобразования $\delta\varphi = i\sum_A \delta_{z_A} t_A \varphi$ с действительным z_A. Но, кроме того, существуют плоские направления для возмущения $K_\lambda(\varphi, \varphi^*) - (\varphi^\dagger\varphi)$. Поэтому для любого возмущения (по крайней мере в конечном интервале), а следовательно во всех порядках по любым константам связи, которые могут появиться в $K_\lambda(\varphi, \varphi^*)$, сохраняется локальный минимум K_λ на поверхности $\varphi = \varphi(z)$.

Как уже было показано, это множество значений скалярного поля, для которых $\mathcal{F}_n = 0$ и $D_A = 0$ для всех n и A, а это означает, что суперсимметрия не нарушается.

* * *

Эти результаты могут быть распространены на неперенормируемые теории [3]. В таких теориях первый член $[\Phi^\dagger e^{-V}\Phi]_D$ в (27.6.1) заменяется на D-член произвольной действительной калибровочно-инвариантной скалярной функции от $\Phi^\dagger$, Φ, V, их суперпроизводных и пространственно-временных производных; второй и третий члены в (27.6.1) заменяются $\mathcal{F}$-членом произвольной глобально калибровочно-инвариантной скалярной функции $f(\Phi, W)$ от Φ_n и W_α. Было показано, что во всех порядках теории возмущений функция $f_\lambda(\Phi, W)$, появляющаяся в $\mathcal{F}$-члене вильсоновского лагранжиана, — это та же функция $f(\Phi, W)$, за исключением однопетлевой переномировки квадратичного по W слагаемого.

27.7. Мягкое нарушение суперсимметрии [*]

В следующей главе будет показано, что даже если суперсимметрия является точной симметрией действия, то спонтанное нарушение суперсимметрии при очень высоких энергиях может привести к появлению суперперенормируемых членов, нарушающих сохранение суперсимметрии в эффективном действии, описывающем физику при низких энергиях. Эти суперперенормируемые члены могут объяснить отсутствие наблюдаемых проявлений суперсимметрии при доступных энергиях. В этом разделе рассмотрим радиационные поправки, которые могут возникнуть от таких нарушающих суперсимметрию суперперенормируемых членов, отчасти чтобы увидеть, создает ли это критерий для включения или отбрасывания таких членов в суперсимметричных вариантах стандартной модели.

Признаком нарушения суперсимметрии является появление средних значений D-членов произвольных суперполей или $\mathcal{F}$-членов киральных суперполей. Любой нарушающий суперсимметрию оператор $\varepsilon\mathcal{O}$ в плотности лагранжиана можно записать в суперсимметричной форме в виде D-члена

$$\varepsilon\mathcal{O} = [ZS]_D, \tag{27.7.1}$$

где S — некиральное суперполе, в которое $\mathcal{O}$ входит как его C-член; Z — некиральное внешнее суперполе, единственная ненулевая компонента которого равна $[Z]_D = \varepsilon$. Некоторые, но не все операторы $\varepsilon\mathcal{O}$, нарушающие

[*]Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

суперсимметрию, могут быть записаны как $\mathcal{F}$-члены

$$\varepsilon\mathcal{O} = [\Omega O]_{\mathcal{F}}\,, \tag{27.7.2}$$

или им сопряженные, где O — левокиральное суперполе, $\mathcal{F}$-членами которого являются $\mathcal{O}$; Ω — внешнее левокиральное суперполе, единственная ненулевая компонента которого $[\Omega]_{\mathcal{F}} = \varepsilon$. Можно выяснить порядок по ε, для которого появится соответствующая поправка к эффективному лагранжиану, определив степени Z или Ω, необходимые для получения этой поправки суперсимметричным способом. Мы получим интересные ограничения на радиационные поправки, возникающие от взаимодействий, которые можно записать в виде (27.7.2) и (27.7.1).

В соответствии с результатами предыдущего раздела, радиационные поправки к $\mathcal{F}$-членам отсутствуют, поэтому все нарушающие суперсимметрию радиационные поправки к вильсоновскому лагранжиану должны иметь вид D-членов. Эта теорема не запрещает любому данному оператору появиться в вильсоновском лагранжиане, потому что, даже если оператор $\varepsilon\Delta\mathcal{L}$ нельзя записать в форме $[Z\Lambda]_D$, где Λ — общее суперполе, C-член которого равен $\Delta\mathcal{L}$, выражение $\varepsilon^2\Delta\mathcal{L}$ *может* быть записано как

$$\varepsilon^2\Delta\mathcal{L} = 2\,[\Omega^*\Omega\Lambda]_D\,. \tag{27.7.3}$$

Однако не все операторы могут возникнуть за счет радиационных поправок *первого порядка* по Ω или Ω^*. В частности, функция, зависящая только от φ-члена левокирального поля Φ, но не от φ^*, не может быть записана как D-член суперполя линейного по Ω. (Заметим, что $[\Omega h(\Phi)]_D$ является производной, а $[\Omega^* h(\Phi)]_D = 2[\Phi]_{\mathcal{F}}\, \partial h(\varphi)/\partial\varphi$ зависит не только от φ.) Можно сделать вывод, что ***нарушающие суперсимметрию и зависящие только от φ члены в вильсоновском лагранжиане не могут появиться за счет радиационных поправок первого порядка по нарушающим суперсимметрию взаимодействиям вида*** (27.7.2).

Этот результат важен, потому что наиболее расходящиеся радиационные поправки как раз те, которые имеют самый низкий порядок по суперперенормируемым константам связи. Конкретнее, коэффициент при взаимодействии размерности $\mathcal{D}$ имеет размерность $4 - \mathcal{D}$ (в степенях энергии) , поэтому анализ размерностей показывает, что вклад множества взаимодействий размерности d_1, d_2 и т. д. в коэффициент при взаимодействии размерности d может содержать ультрафиолетовое обрезание в степени не выше

$$p = 4 - d - (4 - d_1) - (4 - d_2) - \ldots \tag{27.7.4}$$

и поэтому он конечен, если $p < 0$. (В этом рассуждении мы пренебрегли воможными ультрафиолетовыми расходимостями во внутренних интегрированиях; этот вопрос подробно рассмотрен в работе [8].) Суперперенормируемые взаимодействия являются «мягкими» в том смысле, что они уменьшают степень расходимости диаграмм, в которых они появляются. В частности, в перенормируемой теории, где все взаимодействия имеют $d_i \leqslant 4$, и строго перенормируемые взаимодействия с $d_i = 4$ суперсимметричны, вклад одного или более суперперенормируемых взаимодействий в коэффициент взаимодействия с $d = 4$ всегда имеет степень $p < 0$, так что, даже если суперперенормируемые взаимодействия не суперсимметричны, они не создадут нарушающих суперсимметрию и имеющих ультрафиолетовые расходимости поправок в коэффициентах при суперсимметричных $d = 4$ взаимодействиях.

С другой стороны, в такой теории могут быть расходящиеся радиационные поправки к самим суперперенормируемым взаимодействиям [9]. Наиболее опасны в этом отношении квадратичные (или более высоких порядков) расходимости, когда после обрезания на некотором, отвечающим большим энергиям масштабе M_X может потребоваться тонкая настройка голых констант связи для сохранения суперсимметрии в качестве хорошей приближенной симметрии при энергиях ниже M_X. В силу условия (27.7.4) в перенормируемых теориях, где все взаимодействия с $d_i = 4$ суперсимметричны, радиационные поправки могут привести к нарушающим суперсимметрию операторам размерности d, расходящимся квадратично (или более высокой степени $p \geqslant 2$), только если они содержат вставку суперперенормируемого, нарушающего суперсимметрию взаимодействия размерностью $d_1 \geqslant 2 + d$. Тогда возможны либо $d = 0$ и $d_1 \geqslant 2$, что возникает только при вычислении космологической постоянной, либо $d = 1$ и $d_1 = 3$, что возникает при вычислении диаграмм-головастиков, в которых линия скалярного поля уходит в вакуум. Учет космологической постоянной во всех известных теориях [10] связан с проблемами тонкой настройки, и здесь этот вопрос больше не будет рассматриваться. Диаграммы-головастики представляют операторы, линейные по φ или φ^*, и, как уже было показано, они не могут возникнуть в первом порядке по нарушающим симметрию взаимодействиям, которые нельзя записать в форме (27.7.2). Поэтому такие суперперенормируемые взаимодействия называются «мягкими» в том смысле, что они не создают квадратичные или более высоких порядков расходимости. Вместе с суперперенормируемыми взаимодействиями с $d \leqslant 2$, содержащими произвольные квадратичные полиномы по φ и φ^*, нарушающие суперсимметрию мягкие (в указанном смысле) взаимодействия содержат члены третьего порядка по φ, которые можно записать в виде $\varphi^3 = [\Omega\Phi^3]_{\mathscr{F}}$, аналогичные члены третьего порядка по φ^* и члены с массой калибрино с $d = 3$, которые можно записать как $[\Omega\epsilon_{\alpha\beta}W_\alpha W_\beta]_{\mathscr{F}}$, но не содержат членов типа $\varphi^2\varphi^*$ и $\varphi\varphi^{2*}$, которые, вообще говоря, *могут* привести к квадратично расходящимся диаграммам-головастикам [9].

Тем не менее, головастики могут появиться только для скалярных полей, нейтральных по отношению ко всем точным симметриям. В теориях без таких нейтральных скаляров, таких, например, как суперсимметричная стандартная модель, обсуждаемая в следующей главе, *все* суперперенормируемые взаимодействия могут рассматриваться как мягкие.

27.8. Другой подход: калибровочно-инвариантные суперсимметричные преобразования *

Некоторое беспокойство вызывает то обстоятельство, что обсуждавшиеся до сих пор законы суперсимметричных преобразований содержат обычные, а не калибровочно-инвариантные пространственно-временные производные. Например в $U(1)$ калибровочной теории преобразование компонент поля кирального скалярного суперполя дается формулами (26.3.15)–(26.3.17) в виде

$$\begin{aligned}
\delta\psi_L &= \sqrt{2}\partial_\mu\varphi\gamma^\mu\alpha_R\varphi + \sqrt{2}\mathscr{F}\alpha_L, \\
\delta\mathscr{F} &= \sqrt{2}\left(\overline{\alpha_L}\not{\partial}\psi_L\right), \\
\delta\varphi &= \sqrt{2}\left(\overline{\alpha_R}\psi_L\right).
\end{aligned} \tag{27.8.1}$$

Можно подумать, что в преобразовании кирального суперполя, обладающего $U(1)$ зарядом q, обычные пространственно-временные производные в (27.8.1) следует заменить калибровочно-ковариантными производными, определяемыми с помощью $U(1)$ калибровочного поля V_μ выражением

$$D_\mu = \partial_\mu - iqV_\mu. \tag{27.8.2}$$

Имея такие калибровочно-инвариантные суперсимметричные преобразования киральных суперполей, можно попытаться сформулировать суперсимметричные преобразования калибровочного супермультиплета, содержащего только физические и вспомогательные поля V_μ, λ и D:

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}V_\mu &= \left(\overline{\alpha}\gamma_\mu\lambda\right), \\
\tilde{\delta}\lambda &= iD\gamma_5\alpha + \frac{1}{2}\left[\partial_u\not{V},\gamma^\mu\right]\alpha, \\
\tilde{\delta}D &= i\left(\overline{\alpha}\gamma_5\not{\partial}\lambda\right).
\end{aligned} \tag{27.8.3}$$

*Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

Здесь стоят обычные пространственно-временные производные, потому что калибровочные суперполя не обладают $U(1)$ зарядом.

Но ничего не получается. Алгебра этих преобразований не замкнута: коммутатор двух модифицированных суперсимметричных преобразований не является линейной комбинацией бозонных симметричных преобразований типа пространственно-временных трансляций и калибровочных преобразований. Следовательно, невозможно построить лагранжиан для киральных и калибровочных суперполей, инвариантный относительно модифицированных суперсимметричных преобразований, потому что, если бы такой лагранжиан существовал, он должен был бы быть также инвариантным относительно коммутаторов этих преобразований, так что эти коммутаторы должны были бы быть бозонными симметриями лагранжиана.

В 1973 году де Вит и Фридман [11] показали, что алгебра суперсимметрии может быть сделана замкнутой, если модифицировать свойства суперсимметричного преобразования киральных суперполей не только за счет замены обычных производных на калибровочно-инвариантные, но и за счет добавления еще одного члена в преобразовании $\mathcal{F}$-компоненты, так, чтобы для $U(1)$ калибровочных теорий модифицированные законы суперсимметричного преобразования имели вид

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}\psi_L &= \sqrt{2}D_\mu\varphi\gamma^\mu\alpha_R\varphi + \sqrt{2}\mathcal{F}\alpha_L,\\
\tilde{\delta}\mathcal{F} &= \sqrt{2}\left(\overline{\alpha_L}\not{D}\psi_L\right) - 2iq\varphi\left(\overline{\alpha_L}\lambda_R\right),\\
\tilde{\delta}\varphi &= \sqrt{2}\left(\overline{\alpha_R}\psi_L\right).
\end{aligned} \tag{27.8.4}$$

Сделав это, они смогли также построить лагранжиан, инвариантный относительно преобразований (27.8.3)–(27.8.4). Оказалось, что он совпадает с тем лагранжианом, который получен в разделах 27.1 и 27.2.

Нет ничего плохого в том, чтобы и дальше использовать стандартные законы преобразования (27.8.1), поэтому нам не обязательно применять формализм де Вита–Фридмана в суперсимметричных калибровочных теориях. Тем не менее этот формализм интересен, потому что в теориях супергравитации аналог стандартного формализма очень громоздок. Как будет показано в главе 31, формализм, используемый, в основном, в теориях супергравитации для получения интересных физических результатов, подобен формализму де Вита–Фридмана, когда работают с законами суперсимметричных преобразований, содержащими ковариантные производные вместо обычных, а не следуют подходу, основанному на стандартных суперсимметричных преобразованиях, подобных преобразованиям (27.8.1). Поэтому интеренсно понять связь между формализмом де Вита–Фридмана и стандартным подходом в относительно простом случае $U(1)$ калибровочной теории, и, в частности, объяснить происхождение дополнительного члена в законе преобразования для $\mathscr{F}$.

Записав суперсимметричные преобразования (27.8.3), не содержащие компоненты C, M, N и ω калибровочного суперполя V, де Вит и Фридман неявно использовали обсуждавшуюся в разделе 27.1 калибровку Весса–Зумино. Однако выбор этой калибровки не инвариантен ни относительно стандартных суперсимметричных преобразований (26.2.11)–(26.2.17), ни относительно расширенных калибровочных преобразований (27.1.17). Поэтому, как только выбирается такая калибровка, сразу же обе симметрии теряются. Однако можно определить *комбинированное* преобразование, действующее на поля в калибровке Весса–Зумино, состоящее из стандартного суперсимметричного преобразования с последующим расширенным калибровочным преобразованием, который возвращает нас обратно в калибровку Весса–Зумино. Это называется *преобразованием де Вита–Фридмана* $\tilde{\delta}$*.

Чтобы таким образом построить преобразования де Вита–Фридмана, заметим, что для калибровочного суперполя, удовлетворяющего калибровочным условиям Весса–Зумино, $C = M = N = \omega = 0$ и законы преобразования (26.2.11)–(26.2.14) дают

$$\delta C = 0, \quad \delta\omega = \not{\partial}\alpha, \quad \delta M = -(\overline{\alpha}\lambda), \quad \delta N = i(\overline{\alpha}\gamma_5\lambda). \tag{27.8.5}$$

Согласно (27.1.17), можно вернуться к калибровке Весса–Зумино, выполнив бесконечно малое расширенное калибровочное преобразование (27.1.13):

$$V \to V + \frac{i}{2}[\Omega - \Omega^*]m, \tag{27.8.6}$$

где Ω — левокиральное суперполе с компонентами

$$\varphi^\Omega = 0, \quad \psi_L^\Omega = -\sqrt{2}\not{\partial}\alpha_R, \quad \mathscr{F}^\Omega = -(\overline{\alpha}(1-\gamma_5)\lambda). \tag{27.8.7}$$

Согласно (27.1.11), это расширенное калибровочное преобразование индуцирует преобразование кирального суперполя зарядом q

$$\delta'\Phi = iq\Omega\Phi. \tag{27.8.8}$$

*Де Вит и Фридман не показали это явно. По существу, ключевым моментом статьи было желание подчеркнуть, что детали преобразований (27.8.3) и (27.8.4) могут быть получены из требования замкнутости алгебры суперсимметрии (в том числе и для неабелевых калибровочных теорий). Тем не менее, они написали, что нашли эти преобразования, установив фермионные преобразования, выживающие в калибровке Весса–Зумино.

В результате использования законов умножения (26.3.27)–(26.3.29) получаем преобразование компонент Φ

$$\begin{aligned}
&\delta'\psi_L = -i\sqrt{2}q\varphi\not{\partial}\alpha_R, \\
&\delta'\mathscr{F} = -2iq\varphi(\overline{\alpha_L}\lambda_R) - i\sqrt{2}q(\overline{\alpha_L}\not{\partial}\psi_L), \\
&\delta'\varphi = 0.
\end{aligned} \tag{27.8.9}$$

Добавляя это к формулам (27.8.1) и сравнивая с выражением (27.8.4), получаем, что преобразование де Вита–Фридмана действительно является комбинацией стандартного суперсимметричного преобразования и соответствующего расширенного калибровочного преобразования (27.8.8):

$$\tilde{\delta}\Phi = \delta\Phi + \delta'\Phi. \tag{27.8.10}$$

27.9. Калибровочные теории с расширенной суперсимметрией *

Теории с ненарушенной расширенной суперсимметрией не считаются подходящими кандидатами для реалистических расширений стандартной модели из-за обсуждавшейся в разделе 25.4 некиральности мультиплетов частиц. Тем не менее, рассмотрение калибровочных теорий с расширенной суперсимметрией имеет смысл, потому что эти теории определили схему использования мощных математических методов при решении динамических задач.

Разработано несколько конкретных формализмов для построения лагранжиана с $N = 2$ расширенной суперсимметрией [12], но, к счастью, можно обойтись уже имеющимися в нашем распоряжении инструментами. Любая теория с $N = 2$ суперсимметрией обладает также и $N = 1$ суперсимметрией. Поэтому соответствующий лагранжиан должен быть частным случаем лагранжианов, уже рассмотренных в этой главе. Чтобы построить лагранжиан с $N = 2$ суперсимметрией для некоторого множества $N = 2$ супермультиплетов частиц, полученных в разделах 25.4 и 25.5, следует только записать в самом общем виде лагранжиан с $N = 1$ суперсимметрией, $N = 1$ супермультиплеты которого содержат физические поля для частиц в $N = 2$ супермультиплетах, и затем наложить на лагранжиан дискретную R-симметрию, действующую по-разному на разные компоненты $N = 2$ супермультиплетов. Тогда лагранжиан будет инвариантен относительно второй суперсимметрии,

*Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

супермультиплеты которой получаются в результате действия R-симметрии на супермультиплеты обычной $N = 1$ суперсимметрии.

Удобно выбрать дискретное R-преобразование так, чтобы

$$Q_1 \to Q_2, \qquad Q_2 \to -Q_1. \tag{27.9.1}$$

Если бы центральный заряд был равен нулю, то алгебра суперсимметрии была бы инвариантной относительно группы $SU(2)$ R-симметрии, имеющей преобразование (27.9.1) в виде одного конечного элемента $\exp(i\pi\tau_2/2)$. Однако симметрия относительно дискретной симметрии достаточна для наших целей, поэтому нет необходимости предполагать, что центральный заряд равен нулю. На самом деле окажется, что лагранжианы, построенные таким способом, будут обладать $SU(2)$ R-симметрией, а не только симметрией относительно дискретных преобразовааний (27.9.1).

Рассмотрим сначала перенормируемую теорию калибровочных бозонов произвольной калибровочной группы вместе с суперпартнерами, требуемыми расширенной $N = 2$ суперсимметрией. В разделе 25.4 было показано, что в $N = 2$ глобальных суперсимметричных теориях безмассовый калибровочный бозон может принадлежать только мультиплету, содержащему, кроме этого, два безмассовых фермиона каждой спиральности $\pm 1/2$, преобразующихся как дублет относительно $SU(2)$ R-симметрии, и два $SU(2)$-синглетных беспиновых бозона. Поскольку $N = 2$ суперсимметрия включает $N = 1$ суперсимметрию, перенормируемый лагранжиан в этой теории должен быть частным случаем произвольного перенормируемого лагранжиана (27.4.1). Особенность этого частного случая состоит в том, что, поскольку калибровочный бозон принадлежит присоединенному представлению калибровочной группы, то этому представлению должны также принадлежать скалярное поле и фермионы. Чтобы реализовать $N = 2$ супермультиплеты полей с правильным содержанием частиц, для каждого $N = 1$ калибровочного мультиплета V_A^μ, λ_A и D_A надо иметь одно $N = 1$ киральное суперполе Φ_A с компонентами полей φ_A, ψ_A, $\mathscr{F}_A$ (с майорановским ψ_A и комплексными φ_A и $\mathscr{F}_A$). Налагаем дискретную R-симметрию относительно преобразования

$$\psi_A \to \lambda_A, \quad \lambda_A \to -\psi_A, \tag{27.9.2}$$

(все другие поля должны быть инвариантны), потому что в этом и состоит эффект преобразования (27.9.1). Поскольку нетривиальный суперпотенциал приведет к взаимодействиям ψ_A или к массовым членам, отсутствующим для λ_A, суперпотенциал должен обращаться в нуль. Поэтому лагранжиан (27.4.1) принимает специальный вид

$$\mathscr{L} = -2\sum_A (D_\mu\varphi)_A^*(D^\mu\varphi)_A - \frac{1}{2}\sum_A (\overline{\psi_A}(\not{D}\psi)_A) + \sum_A \mathscr{F}_A^*\mathscr{F}_A$$

$$
\begin{aligned}
&-2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{ABC} C_{ABC}\left(\lambda^{\mathrm{T}}_{AL}\psi_{CL}\right)\varphi^*_B \\
&+i\sum_{ABC} C_{ABC}\varphi^*_B\varphi_C D_A - \sum_A \xi_A D_A + \frac{1}{2}\sum_A D_A D_A \\
&-\frac{1}{4}\sum_A f_{A\mu\nu}f_A^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\sum_A\left(\overline{\lambda_A}(\not{D}\lambda)_A\right) + \frac{g^2\theta}{64\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sum_A f_A^{\mu\nu}f_A^{\rho\sigma},
\end{aligned}
\tag{27.9.3}
$$

где

$$
(D_\mu\psi)_A = \partial_\mu\psi_A + \sum_{BC} C_{ABC}V_{B\mu}\psi_C, \tag{27.9.4}
$$

$$
(D_\mu\lambda)_A = \partial_\mu\lambda_A + \sum_{BC} C_{ABC}V_{B\mu}\lambda_C, \tag{27.9.5}
$$

$$
(D_\mu\varphi)_A = \partial_\mu\varphi_A + \sum_{BC} C_{ABC}V_{B\mu}\varphi_C, \tag{27.9.6}
$$

и

$$
f_{A\mu\nu} = \partial_\mu V_{A\nu} - \partial_\nu V_{A\mu} + \sum_{BC} C_{ABC}V_{B\mu}V_{C\nu}. \tag{27.9.7}
$$

(Напомним, что в присоединенном представлении $(t_A)_{BC} = -iC_{ABC}$, где C_{ABC} — действительная структурная константа, взятая в полностью антисимметричном базисе, и в которую, как и везде в этой книге, включены множители калибровочных констант связи.) Лагранжиан (27.9.3) обладает $N=1$ суперсимметрией с мультиплетами φ_A, ψ_A, $\mathscr{F}_A$ и V_A^μ, λ_A, D_A, потому что это частный случай лагранжиана (27.4.1), а также обладает $SU(2)$ симметрией, связывающей ψ_A и λ_A и включающей инвариантность относительно конечных $SU(2)$ преобразований (27.9.2). Поэтому лагранжиан обладает *второй* независимой $N=1$ суперсимметрией с мультиплетами φ_A, ψ_A, $\mathscr{F}_A$ и V_A^μ, $-\psi_A$, D_A. Следовательно он удовлетворяет условиям, налагаемым $N=2$ суперсимметрией.

Вспомогательные поля можно исключить, положив их равными значениям, при которых лагранжиан (27.9.3) стационарен:

$$
\mathscr{F}_A = 0, \quad D_A = -i\sum_{BC} C_{ABC}\varphi^*_B\varphi_C. \tag{27.9.8}
$$

(Здесь предполагается, что все константы Файе–Иллиопулоса ξ_A равны нулю.) Подставляя эти значения в лагранжиан (27.9.3), получаем эквивалентный лагранжиан

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} = &-\sum_A (D_\mu\varphi)^*_A(D^\mu\varphi)_A - \frac{1}{2}\sum_A\left(\overline{\psi_A}(\not{D}\psi)_A\right) \\
&+\sqrt{2}\sum_{ABC} C_{ABC}\left(\overline{\psi_B}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\lambda_A\right)\varphi_C
\end{aligned}
$$

$$-\sqrt{2}\sum_{ABC}C_{ABC}\left(\overline{\lambda_A}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\varphi_C\right)\varphi_B^* - V(\varphi,\varphi^*)$$
$$-\frac{1}{4}\sum_A f_{A\mu\nu}f_A^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\sum_A\left(\overline{\lambda_A}(\not{D}\lambda)_A\right) + \frac{g^2\theta}{64\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sum_A f_A^{\mu\nu}f_A^{\rho\sigma}, \tag{27.9.9}$$

где потенциал равен

$$V(\varphi,\varphi^*) = -\frac{1}{2}\sum_A\left[\sum_{BC}C_{ABC}\varphi_B^*\varphi_C\right]^2 = 2\sum_A\left[\sum_{BC}C_{ABC}\,\mathrm{Re}\,\varphi_B\,\mathrm{Im}\,\varphi_C\right]^2. \tag{27.9.10}$$

Минимальное значение этого потенциала равно нулю и оно достигается не только при $\varphi_A = 0$, но также для любого множества φ_S, для которого $\sum_{BC}C_{ABC}\varphi_B^*\varphi_C = 0$ при всех A, или другими словами, для которого

$$[t\cdot\mathrm{Re}\,\varphi,\ t\cdot\mathrm{Im}\,\varphi] = 0, \quad \text{где} \quad t\cdot v \equiv \sum_B t_B v_B. \tag{27.9.11}$$

Таким образом, потенциал достигает минимума для тех скалярных полей, все генераторы которых $t\cdot\mathrm{Re}\varphi$ и $t\cdot\mathrm{Im}\varphi$ принадлежат подалгебре Картана полной калибровочной алгебры, все генераторы которой коммутируют между собой. Несмотря на то, что все такие значения φ дают нулевой потенциал и, следовательно, ненарушенную $N = 2$ суперсимметрию, они не эквивалентны физически, как это видно, например, из того, что они придают разные массы калибровочным бозонам, связанным с нарушенными калибровочными симметриями.

Примечательное свойство расширенной суперсимметрии состоит в том, что центральные заряды суперсимметричной алгебры в любом состоянии могут быть вычислены через «заряды» того состояния, с которым связаны бозонные поля [13]. Проще всего проделать это вычисление, если использовать свойства преобразований относительно обычной $N = 1$ суперсимметрии расширенных суперсимметричных токов $S_r^\mu(x)$ с $r = 2,3,\ldots,N$ и вычислить антикоммутаторы $\{Q_{1\alpha}, S_{r\beta}^\mu(x)\}$. Центральные заряды вычисляются после этого из антикоммутаторов

$$\{Q_{1\alpha}, Q_{r\beta}\} = \int d^3x\{Q_{1\alpha}, S_{r\beta}^0(x)\}. \tag{27.9.12}$$

Оказывается, что подынтегральное выражение справа является производной по пространственным координатам. При этом интеграл не обращается в нуль, если состояния содержат поля, не стремящиеся быстро к нулю при $\mathbf{x}\to\infty$.

Чтобы подробнее увидеть, как это все происходит, рассмотрим случай $N = 2$ суперсимметрии с $SU(2)$ калибровочной симметрией и одним $N = 2$ калибровочным супермультиплетом и без дополнительных супермультиплетов полей материи. Тогда лагранжиан дается формулой (27.9.2), где A, B и C принимают значения 1, 2, 3 и

$$C_{ABC} = e\varepsilon_{ABC}, \quad \xi_A = 0. \tag{27.9.13}$$

(Здесь константа связи обозначается e, потому что это заряд, с которым взаимодействует безмассовое калибровочное поле ненарушенной $U(1)$ калибровочной симметрии.) Обычный $N = 1$ суперсимметричный ток (отмеченный индексом 1) получается из (27.4.40) в виде

$$\begin{aligned} S_1^\mu = &-\frac{1}{4}\sum_A f_{A\rho\sigma}[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]\gamma^\mu\lambda_A - e\sum_{ABC}\varepsilon_{ABC}\gamma_5\gamma^\mu\lambda_A\varphi_B^*\varphi_C \\ &+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_A\left[(\not{D}\varphi)_A\gamma^{mu}\psi_{AR} + (\not{D}\varphi^*)_A\gamma^\mu\psi_{AL}\right]. \end{aligned} \tag{27.9.14}$$

Второй суперсимметричный ток можно вычислить, подчинив S_1^μ конечной $SU(2)$ R-симметрии, использованной выше, что сводится просто к замене $\psi_A \to \lambda_A$ и $\lambda_A \to -\psi_A$. В результате получаем

$$\begin{aligned} S_2^\mu = &\frac{1}{4}\sum_A f_{A\rho\sigma}[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]\gamma^\mu\psi_A + e\sum_{ABC}\varepsilon_{ABC}\gamma_5\gamma^\mu\psi_A\varphi_B^*\varphi_C \\ &+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_A\left[(\not{D}\varphi)_A\gamma^\mu\lambda_{AR} + (\not{D}\varphi^*)_A\gamma^\mu\lambda_{AL}\right]. \end{aligned} \tag{27.9.15}$$

Для наших целей будет достаточно (и немного проще) вычислить только изменение правой части этого тока при $N = 1$ суперсимметричном преобразовании. Полагая вспомогательные поля равными их равновесным значениям

$$\mathscr{F}_A = 0, \quad D_A = -ie\sum_{BC}\varepsilon_{ABC}\varphi_B^*\varphi_C,$$

находим

$$\begin{aligned} \delta S_{2R}^\mu = &\frac{\sqrt{2}}{4}\sum_A f_{A\rho\sigma}[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]\gamma^\mu(\not{D}\varphi)_A\alpha_R \\ &-\sqrt{2}e\sum_{ABC}\varepsilon_{ABC}\gamma^\mu(\not{D}\varphi)_A\alpha_R\varphi_B^*\varphi_C - \frac{\sqrt{2}}{4}f_{A\rho\sigma}(\not{D}\varphi)_A\gamma^\mu[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]\alpha_R \\ &-\sqrt{2}e\sum_{ABC}\varepsilon_{ABC}\varphi_B^*\varphi_C(\not{D}\varphi)_A\gamma^\mu\alpha_R + \ldots, \end{aligned}$$

где точки обозначают члены, билинейные по фермионным полям, которые здесь не интересны, потому что ищутся эффекты от дальнодействующих бозонных полей. Соберем члены, используя дираковские антикоммутационные соотношения и тождество:

$$[\gamma^\rho,\gamma^\sigma][\gamma^\mu,\gamma^\nu]+[\gamma^\mu,\gamma^\nu][\gamma^\rho,\gamma^\sigma]=-8\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}+8\eta^{\sigma\mu}\eta^{\rho\nu}+8i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5.$$

В результате получим

$$\begin{aligned}\delta S^\mu_{2R}=&-2\sqrt{2}\sum_A f_A^{\mu\nu}(D_\nu\varphi)_A\alpha_R-i\sqrt{2}\sum_A\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f_{A\rho\sigma}(D_\nu\varphi)_A\alpha_R\\&-2\sqrt{2}e\sum_{ABC}\varepsilon_{ABC}\varphi_B^*\varphi_C(D_\mu\varphi)_A\alpha_R+\ldots\,.\end{aligned}$$

Чтобы записать это выражение в виде производной, воспользуемся уравнениями для полей Янга–Миллса (15.3.6), (15.3.7) и (15.3.9):

$$\begin{aligned}&D_\nu f_A^{\mu\nu}=J_A^\mu=e\sum_{BC}\varepsilon_{ABC}\left((D^\mu\varphi)^*_B\varphi_C-\varphi^*_B(D^\mu\varphi)_C\right),\\&\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(D^\nu f^{\rho\sigma})_A=0.\end{aligned}$$

Это позволяет записать δS^μ_{2R} как полную производную

$$\delta S^\mu_{2R}=D_\nu X^{\mu\nu}\alpha_R, \tag{27.9.16}$$

где

$$X^{\mu\nu}=-2\sqrt{2}\sum_A f_A^{\mu\nu}\varphi_A-i\sqrt{2}\sum_A\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f_{A\rho\sigma}\varphi_A+\ldots, \tag{27.9.17}$$

и точки опять обозначают несущественные члены, содержащие фермионные поля. Формула (26.1.18) позволяет записать выражение (27.9.16) в виде антикоммутатора

$$\left\{Q_{R\alpha},S^\mu_{R\beta}\right\}=i\left[\varepsilon\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right]_{\alpha\beta}D_\nu X^{\mu\nu}. \tag{27.9.18}$$

Поскольку $X^{\mu\nu}$ — калибровочно-инвариантная величина, то ее калибровочно ковариантная производная совпадает с обычной производной. Кроме того, $X^{\mu\nu}$ антисимметрична, поэтому $D_\nu X^{0\nu}=\partial_i X^{0i}$. Из соотношений (27.9.12) и (27.9.18) получаем наконец

$$\left\{Q_{R\alpha},Q_{R\beta}\right\}=i\left[\varepsilon\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right]_{\alpha\beta}\int dS_i X^{0i}. \tag{27.9.19}$$

где интеграл берется по большой замкнутой поверхности, содержащей внутри себя рассматриваемую систему, причем элемент поверхности $d\mathbf{S}$ направлен по нормали к этой поверхности. Сравнив этот антикоммутатор с (25.2.38), получаем центральный заряд

$$Z_{12} = -i \int d S_i X^{0i}. \tag{27.9.20}$$

Если выбрать калибровку, в которой φ_A (почти везде) имеет только одну постоянную ненулевую компоненту $\varphi_3 \equiv v$, тогда

$$\sum_A f_A^{0i} \varphi_A = -vE^i, \qquad \frac{1}{2} \sum_A \varepsilon^{0i\rho\sigma} f_{A\rho\sigma} \varphi_A = vB^i, \tag{27.9.21}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — электрическое и магнитное поля, связанные с ненарушенной $U(1)$ подгруппой калибровочной группы $SU(2)$. Поэтому центральный заряд (27.9.20) равен

$$Z_{12} = 2\sqrt{2} v \left[iq - \mathcal{M} \right], \tag{27.9.22}$$

где q — электрический заряд, а $\mathcal{M}$ — магнитный заряд, определенные формулами

$$q = \int d S_i E^i, \qquad \mathcal{M} = \int d S_i B^i. \tag{27.9.23}$$

Как уже обсуждалось в разделе 23.3, это теория с калибровочной $SU(2)$ симметрией, спонтанно нарушенной средним значением $SU(2)$-триплета скаляров, одна из тех, в которых реально появляются магнитные монополи.

Применение результатов раздела 27.4 к плотности лагранжиана (27.9.3) показывает, что после спонтанного нарушения $SU(2)$ калибровочной симметрии, эта теория будет содержать элементарные частицы заряда $\pm e$, с нулевым магнитным зарядом и полученной в древесном приближении массой $M = \sqrt{2}|ev|$. Другими словами, для каждого знака заряда существует одна такая частица спина 1, две частицы спина $1/2$ и одна со спином 0. Поразительное следствие полученных здесь результатов состоит в том, что *значение массы* $\sqrt{2}|ev|$ *точное, не изменяющееся за счет каких-либо радиационных поправок или непертурбативных эффектов, при условии, что величина* v *определяется формулой (27.9.22) для центрального заряда* [13].

Чтобы это увидеть, заметим, что массивные одночастичные состояния для каждого знака заряда являются «короткими» $N = 2$ супермультиплетами, которые, как показано в конце раздела 25.5, имеют массы, определяемые нижней границей (25.5.24):

$$M = |Z_{12}|/2. \tag{27.9.24}$$

Даже если бы мы не верили, что древесное приближение дает точное значение масс частиц, все равно мы бы не ожидали, что поправки к этому приближению превратят короткие мультиплеты в полные, содержащие гораздо больше состояний с большими массами; поэтому можно с уверенностью сказать, что равенство (27.9.24) действительно справедливо. Для частиц с электрическим зарядом $q = \pm e$ и нулевым магнитным зарядом формула (27.9.20) дает $Z_{12} = \pm 2\sqrt{2} ive$, поэтому из (27.9.24) получаем их массы

$$M = \sqrt{2}|ev|. \tag{27.9.25}$$

Этот результат получен в древесном приближении, но теперь видно, что он является точным.

Описанные в разделе 23.3 полуклассические вычисления показывают, что в этой теории электрически нейтральные магнитные монополи имеют магнитный заряд*

$$\mathcal{M} = \frac{4\pi\nu}{e}, \tag{27.9.26}$$

где ν — топологическое число, принимающее положительные и отрицательные целые значения. Формула (27.9.22) для центрального заряда вместе с неравенством (25.5.24) дают нижнюю границу массы монополя

$$M \geqslant \frac{4\pi\sqrt{2}|\nu v|}{|e|}. \tag{27.9.27}$$

Интересно, что это неравенство совпадает с полученной Богомольным нижней границей [14] на энергию монополя, полученной в разделе 23.3**. По существу монопольное решение для $\nu = 1$, полученное в разделе 23.3, удовлетворяет этому ограничению. Вообще говоря, «дионы» в этой теории [15], обладающие зарядом и магнитным зарядом, имеют массы, определенные формулой [16]

$$M = 2|v|\sqrt{q^2 = \mathcal{M}^2}, \tag{27.9.28}$$

Это опять минимальное значение, допустимое (25.5.24) и (27.9.20). На самом деле, *все* известные частицы в этой теории имеют массы, которые даются полуклассическим пределом (27.9.28) [17].

Возвращаясь к общим $N = 2$ калибровочным теориям, можно включить в лагранжиан дополнительные поля «материи». Для простоты ограничимся «короткими» массивными гипермультиплетами (с центральным зарядом $\mathcal{Z}$, удовлетворяющим неравенству (25.5.24)), состоящими из одного

---

*Заметим, что магнитный заряд $\mathcal{M}$, определенный формулой (27.9.23), связан с магнитным зарядом g, определенным в разделе 23.3, соотношением $\mathcal{M} = 4\pi g$.

**Канонически нормированное поле с ненулевым средним значением по вакууму равно $\sqrt{2}\mathrm{Re}\varphi_3$ (для действительных v), так что среднее $\langle\varphi\rangle$, стоящее в неравенстве Богомольного (23.3.19), равно $\sqrt{2}v$.

фермиона спина 1/2 и $SU(2)$-дублета частиц спина 0 вместе с отличными от них античастицами. В этом случае у нас будет точно такой же спиновый набор, который в $N=1$ суперсимметрии дается двумя левокиральными суперполями Φ'_n, Φ''_n вместе с их правокиральными сопряженными полями, компонентами комплексного скалярного поля φ'_n, φ''_n и им сопряженными, образуя, таким образом, два $SU(2)$-дублета и спинорные поля, которые все являются $SU(2)$-синглетами. (Мы используем штрих или два штриха, чтобы отличать эти суперполя и их компоненты от Φ_A и их компонент.) Если некоторые из этих гипермультиплетов Φ'_n и Φ''_n не нейтральны относительно калибровочной группы, тогда допускается потенциал вида*:

$$f(\Phi,\Phi',\Phi'') = \frac{1}{2}\sum_{Anm}(s_A)_{nm}\Phi'_n\Phi''_m\Phi_A + \frac{1}{2}\sum_{nm}\mu_{nm}\Phi'_n\Phi''_m. \tag{27.9.29}$$

Теперь к лагранжиану (27.9.3) надо добавить лагранжиан для этих гипермультиплетов, определяемый первыми восемью членами в правой части (27.4.1). Тогда полный лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = &-\sum_n (D_\mu\varphi')^*_n(D^\mu\varphi')_n - \sum_n (D_\mu\varphi'')^*_n(D^\mu\varphi'')_n - \sum_A (D_\mu\varphi)^*_A(D^\mu\varphi)_A \\
&-\frac{1}{2}\sum_n\left(\overline{\psi'_n}(\not{D}\psi')_n\right) - \frac{1}{2}\sum_n\left(\overline{\psi''_n}(\not{D}\psi'')_n\right) \\
&-\frac{1}{2}\sum_A\left(\overline{\psi_A}(\not{D}\psi)_A\right) - \frac{1}{2}\sum_A\left(\overline{\lambda_A}(\not{D}\lambda)_A\right) \\
&+\sum_n \mathscr{F}'^*_n\mathscr{F}'_n + \sum_n \mathscr{F}''^*_n\mathscr{F}''_n + \sum_A \mathscr{F}^*_A\mathscr{F}_A \\
&-\mathrm{Re}\sum_{Anm}(s_A)_{nm}\varphi_A\left(\psi'^{\mathrm{T}}_{nL}\epsilon\psi''_{mL}\right) - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{ABC}C_{ABC}\left(\lambda^{\mathrm{T}}_{AL}\epsilon\psi_{CL}\right)\varphi^*_B
\end{aligned}$$

---

*По тем же причинам, что и раньше, в суперпотенциале не может быть членов второго и более высоких порядков по Φ_A — ведь такие члены привели бы к скалярным константам или массам для ψ_A без соответствующих констант или масс для их $SU(2)$-партнеров λ_A. Кроме того, не может быть ни одного трилинейного по Φ'_n и (или) Φ''_n члена, потому что тогда в лагранжиане (27.4.1), содержащем произведение фермионных билинейных комбинаций и вторых производных суперпотенциала, появилось бы взаимодействие $SU(2)$-синглета фермионов с $SU(2)$-дублетом полей φ'_n или φ''_n. Таким образом, появляющиеся в суперпотенциале трилинейные члены должны содержать только один множитель Φ_A и два множителя Φ'_n и (или) Φ''_n. Не может быть трилинейных членов, содержащих один множитель Φ_A и два множителя Φ'_n или два Φ''_n, потому что тогда появилось бы взаимодействие $SU(2)$-синглетных вспомогательных полей $\mathscr{F}_A$ с $SU(2)$-триплетными произведениями $\varphi'_n\varphi'_m$ и $\varphi''_n\varphi''_m$; не может быть также билинейных членов, содержащих два Φ'_n или два Φ''_n, потому что это привело бы к $SU(2)$-триплетным массовым членам $(\psi'^T_n\epsilon\psi'_m)$ или $(\psi''^T_n\epsilon\psi''_m)$. Единственные остающиеся разрешенные билинейные или трилинейные члены имеют вид (27.9.29).

$$
\begin{aligned}
&-\operatorname{Re}\sum_{Anm}(s_A)_{nm}\varphi'_n\left(\psi''^{\mathrm{T}}_{mL}\varepsilon\psi_{AL}\right)-\operatorname{Re}\sum_{Anm}(s_A)_{nm}\varphi''_m\left(\psi'^{\mathrm{T}}_{nL}\varepsilon\lambda_{AL}\right)\\
&+2\sqrt{2}\operatorname{Im}\sum_{Anm}(t'_A)_{mn}\varphi'_n\left(\psi'^{\mathrm{T}}_{nL}\varepsilon\lambda_{AL}\right)\varphi'^*_m+2\sqrt{2}\operatorname{Im}\sum_{Anm}(t''_A)_{mn}\varphi'_n\left(\psi''^{\mathrm{T}}_{nL}\varepsilon\lambda_{AL}\right)\varphi''^*_m\\
&+\operatorname{Re}\sum_{Anm}(s_A)_{nm}\varphi_A\varphi'_n\mathscr{F}''_m+\operatorname{Re}\sum_{Anm}(s_A)_{nm}\varphi_A\varphi''_m\mathscr{F}'_n+\operatorname{Re}\sum_{Anm}(s_A)_{nm}\varphi'_n\varphi''_m\mathscr{F}_A\\
&+\operatorname{Re}\sum_{Anm}\mu_{nm}\varphi'_n\mathscr{F}''_m+\operatorname{Re}\sum_{Anm}\mu_{nm}\varphi''_m\mathscr{F}'_n-\operatorname{Re}\sum_{Anm}\mu_{nm}\left(\psi'^{\mathrm{T}}_{nL}\varepsilon\psi''_{mL}\right)\\
&-\sum_{Anm}(t'_A)_{nm}\varphi'^*_n\varphi'_mD_A-\sum_{Anm}(t''_A)_{nm}\varphi''^*_n\varphi''_mD_A+i\sum_{ABC}C_{ABC}\varphi^*_B\varphi_CD_A\\
&-\sum_A\xi_AD_A+\frac{1}{2}\sum_A D_AD_A-\frac{1}{4}\sum_A f_{A\mu\nu}f_A^{\mu\nu}+\frac{g^2\theta}{64\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sum_A f_A^{\mu\nu}f_A^{\rho\sigma},
\end{aligned}
\tag{27.9.30}
$$

где $(t'_A)_{nm}$ и $(t''_A)_{nm}$ — матрицы (включающие константы связи), представляющие калибровочную группу для левокиральных скалярных суперполей Φ'_n и Φ''_n соответственно. Юкавские взаимодействия между фермионами и скалярами имеют дискретную R-симметрию относительно преобразования

$$
\lambda_{AL}\to-\psi_{AL},\quad \psi_{AL}\to+\lambda_{AL},\quad \varphi''_n\to-\varphi'^*_n,\quad \varphi'_n\to\varphi''_n,
\tag{27.9.31}
$$

при условии, что

$$
s_A=-2\sqrt{2}it'^{\mathrm{T}}_A=+2\sqrt{2}it''_A.
\tag{27.9.32}
$$

(Заметим, в частности, что условие (27.9.32) требует, чтобы представления калибровочной группы, реализованные Φ'_n и Φ''_n были комплексно сопряженными.) Остальные члены плотности лагранжиана (27.9.30), за исключением членов, содержащих вспомогательные поля, обладают той же симметрией.

Невозможно расширить симметрию относительно преобразования (27.9.31) на вспомогательные поля; однако симметрия появляется после исключения вспомогательных полей.* Положив D_A, $\mathscr{F}'_n$ и $\mathscr{F}''_n$ равными тем значениям, при которых лагранжиан стационарен, и комбинируя

*После исключения вспомогательных полей результирующее действие инвариантно относительно исходного $N=2$ суперсимметричного преобразования только на массовой поверхности, т. е. с точностью до членов, которые обращаются в нуль, когда поля удовлетворяют уравнениям взаимодействующих полей. Это не должно нас беспокоить, потому что еще сохраняются два суперсимметричных тока, у которых проинтегрированные временные компоненты удовлетворяют $N=2$ суперсимметричным антикоммутационным соотношениям. При этом требуется, чтобы поля, из которых они построены, удовлетворяли полевым уравнениям в гейзенберговском представлении. Формулировки $N=2$ суперсимметрии вне массовой поверхности существуют, но в них есть различные осложнения [18].

D- и $\mathscr{F}$-члены, получаем лагранжиан в виде (s_A и t''_A даются формулой (27.9.32), а ξ_A берем равными нулю):

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = & -\sum_n (D_\mu\varphi')^*_n (D^\mu\varphi')_n - \sum_n (D_\mu\varphi'')^*_n (D^\mu\varphi'')_n - \sum_A (D_\mu\varphi)^*_A (D^\mu\varphi)_A \\
& -\frac{1}{2}\sum_n \left(\overline{\psi'_n}(\not{D}\psi')_n\right) - \frac{1}{2}\sum_n \left(\overline{\psi''_n}(\not{D}\psi'')_n\right) \\
& -\frac{1}{2}\sum_A \left(\overline{\psi_A}(\not{D}\psi)_A\right) - \frac{1}{2}\sum_A \left(\overline{\lambda_A}(\not{D}\lambda)_A\right) \\
& -2\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\sum_{Anm}(t'_A)_{mn}\varphi_A\left(\psi'^{\mathrm{T}}_{nL}\epsilon\psi''_{mL}\right) - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{ABC} C_{ABC}\left(\lambda^{\mathrm{T}}_{AL}\epsilon\psi_{CL}\right)\varphi^*_B \\
& -2\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\sum_{Anm}(t'_A)_{mn}\varphi'_n\left(\psi''^{\mathrm{T}}_{mL}\epsilon\psi_{AL}\right) - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\sum_{Anm}(t'_A)_{mn}\varphi''_m\left(\psi'^{\mathrm{T}}_{nL}\epsilon\lambda_{AL}\right) \\
& +2\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\sum_{Anm}(t'_A)_{mn}\varphi'_n\left(\psi'^{\mathrm{T}}_{nL}\epsilon\lambda_{AL}\right)\varphi'^*_m - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\sum_{Anm}(t'_A)_{mn}\left(\psi''^{\mathrm{T}}_{nL}\epsilon\lambda_{AL}\right)\varphi''^*_m \\
& -\frac{1}{4}\sum_A f_{A\mu\nu}f^{\mu\nu}_A + \frac{g^2\theta}{64\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sum_A f^{\mu\nu}_A f^{\rho\sigma}_A \\
& -\sum_{ABnm}\{t'_A, t'_B\}_{mn}\varphi_A\varphi^*_B\left(\varphi'_n\varphi'^*_m + \varphi''^*_n\varphi''_m\right) \\
& -\frac{1}{2}\sum_A\left[\sum_{nm}(t'_A)_{nm}\left(\varphi'^*_n\varphi'_m - \varphi''_n\varphi''^*_m\right)\right]^2 \\
& +\frac{1}{2}\sum_{ABCDE} C_{ABC}C_{ADE}\varphi^*_B\varphi_C\varphi^*_D\varphi_E - 2\sum_A\left|\sum_{nm}(t'_A)_{nm}\varphi'_n\varphi''_m\right|^2 \\
& -4\,\mathrm{Re}\sum_{nm}(t'_A\mu)_{nm}\varphi'^*_n\varphi'_m - 4\,\mathrm{Re}\sum_{nm}(\mu t'_A)_{nm}\varphi''_n\varphi''^*_m \\
& -2\sum_{nm}(\mu^\dagger\mu)_{nm}\varphi'^*_n\varphi'_m - 2\sum_{nm}(\mu\mu^\dagger)_{nm}\varphi''_n\varphi''^*_m .
\end{aligned} \tag{27.9.33}$$

Последние пять строк справа получаются из членов в (27.9.30), содержащих вспомогательные поля; теперь они тоже инвариантны относительно дискретного преобразования (27.9.31) при условии, что

$$[t'_A, \mu] = [\mu^\dagger, \mu] = 0. \tag{27.9.34}$$

Теперь можно сделать еще один шаг и рассмотреть случай $N = 4$ расширенной глобальной суперсимметрии. (Как отмечалось в разделе 25.4, $N = 3$ суперсимметрия — такая же, как и $N = 4$ суперсимметрия.) Единственными безмассовыми супермультиплетами $N = 4$ суперсимметрии будут те, которые не содержат гравитонов или гравитино, состоят из одной частицы спиральности 1, $SU(4)$-квартета частиц спиральности $1/2$ и $SU(4)$-секстета частиц спиральности 0 вместе с им CPT-сопряженными частицами противоположной спиральности. Для каждого генератора t_A калибровочной группы существует только один такой супермультиплет. Эти частицы можно сгруппировать в супермультиплеты $N=2$ суперсимметрии: для каждого t_A есть один калибровочный супермультиплет, состоящий из одной частицы спиральности 1, двух частиц спиральности $\pm 1/2$, одной частицы спиральности 0 вместе с их CPT-сопряженными противоположной спиральности; два гипермультиплета, состоящих каждый из одной частицы каждой спиральности $\pm 1/2$ и двух частиц спиральности 0. $N=2$ калибровочное суперполе состоит из $N=1$ калибровочного суперполя V_A, левокирального скалярного суперполя Φ_A и им комплексно сопряженным полям; в то время как два $N=2$ гипермультиплета состоят из двух дополнительных левокиральных скалярных суперполей Φ'_A и Φ''_A и им комплексно сопряженных полей.

Поскольку $N=4$ суперсимметрия включает в себя $N=2$ суперсимметрию, лагранжиан после исключения вспомогательных полей $N=1$ суперсимметрии [18] должен быть частным случаем лагранжиана (27.9.33), но индексы $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m}$ и т. д. пробегают значения индексов A, B, C и т. д. присоединенного представления. Кроме того, коэффициент μ_{nm} в суперпотенциале (27.9.29) должен быть равен нулю, потому что иначе (27.9.33) будет содержать квадратичные по фермионным полям ψ'_A и ψ''_A слагаемые без аналогов для их $N=4$ суперпартнеров λ_A и ψ_A. Далее, положив в присоединенном представлении $(t'_A)_{BC} = -iC_{ABC}$, находим, что лагранжиан должен иметь вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &-\sum_A (D_\mu\varphi')^*_A (D^\mu\varphi')_A - \sum_A (D_\mu\varphi'')^*_A (D^\mu\varphi'')_A - \sum_A (D_\mu\varphi)^*_A (D^\mu\varphi)_A \\
&-\frac{1}{2}\sum_A \left(\overline{\psi'_A}(\not{D}\psi')_A\right) - \frac{1}{2}\sum_A \left(\overline{\psi''_A}(\not{D}\psi'')_A\right) \\
&-\frac{1}{2}\sum_A \left(\overline{\psi_A}(\not{D}\psi)_A\right) - \frac{1}{2}\sum_A \left(\overline{\lambda_A}(\not{D}\lambda)_A\right) \\
&-2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{ABC} C_{ABC}\varphi_A \left(\psi'^{\mathrm{T}}_{CL}\varepsilon\psi''_{AL}\right) - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{ABC} C_{ABC}\left(\psi^{\mathrm{T}}_{AL}\varepsilon\psi_{CL}\right)\varphi^*_B \\
&-2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{ABC} C_{ABC}\varphi'_B \left(\psi''^{\mathrm{T}}_{CL}\varepsilon\psi_{AL}\right) - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{ABC} C_{ABC}\varphi''_C\left(\psi'^{\mathrm{T}}_{BL}\varepsilon\psi_{AL}\right) \\
&+2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{ABC} C_{ABC} \left(\psi'^{\mathrm{T}}_{BL}\varepsilon\lambda_{AL}\right)\varphi'^*_C + 2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{ABC} C_{ABC}\left(\psi''^{\mathrm{T}}_{BL}\varepsilon\lambda_{AL}\right)\varphi''^*_C \\
&-\frac{1}{4}\sum_A f_{A\mu\nu}f^{\mu\nu}_A + \frac{g^2\theta}{64\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sum_A f^{\mu\nu}_A f^{\rho\sigma}_A - V,
\end{aligned} \tag{27.9.35}$$

где потенциал

$$V = \sum_{ABCDE} C_{ADE}C_{BCE}\left(\varphi_A\varphi_B^* + \varphi_B\varphi_A^*\right)\left(\varphi_C'\varphi_D'^* + \varphi_C''^*\varphi_D''\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_A\left|\sum_{BC}C_{ABC}\left(\varphi_B'^*\varphi_C' - \varphi_B''\varphi_C''^*\right)\right|^2$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{ABCDE}C_{ABC}C_{ADE}\varphi_B^*\varphi_C\varphi_D^*\varphi_E + 2\sum_A\left|\sum_{BC}C_{ABC}\varphi_B'\varphi_C''\right|^2. \tag{27.9.36}$$

Не требуется дальнейших ограничений, чтобы увидеть, что этот лагранжиан обладает $SU(4)$ R-симметрией, т. е. он инвариантен относительно $N=4$ суперсимметрии. Чтобы это показать, следует использовать тождество Якоби для записи перекрестного члена во второй строке правой части (27.9.36) в виде

$$\sum_{ABCDE} C_{ABC}C_{ADE}\varphi_B'^*\varphi_C'\varphi_D''^*\varphi_E'' = -\sum_{ABCDE} C_{ABC}C_{ADE}\varphi_B'^*\varphi_D'\varphi_E''\varphi_C''$$
$$-\sum_{ABCDE} C_{ABC}C_{ADE}\varphi_B'^*\varphi_E'\varphi_C''^*\varphi_D''.$$

Это тождество позволяет записать потенциал (27.9.36) в форме, симметричной по скалярам и их сопряженным

$$V = \sum_A\left|\sum_{BC}C_{ABC}\varphi_B^*\varphi_C'\right|^2 + \sum_A\left|\sum_{BC}C_{ABC}\varphi_B^*\varphi_C''^*\right|^2 + \sum_A\left|\sum_{BC}C_{ABC}\varphi_B\varphi_C'\right|^2$$
$$+\sum_A\left|\sum_{BC}C_{ABC}\varphi_B\varphi_C''^*\right|^2 + \sum_A\left|\sum_{BC}C_{ABC}\varphi_B'^*\varphi_C''\right|^2$$
$$+\sum_A\left|\sum_{BC}C_{ABC}\varphi_B'\varphi_C''\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_A\left|\sum_{BC}C_{ABC}\varphi_B'\varphi_C'^*\right|^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_A\left|\sum_{BC}C_{ABC}\varphi_B''\varphi_C''^*\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_A\left|\sum_{BC}C_{ABC}\varphi_B\varphi_C^*\right|^2. \tag{27.9.37}$$

Затем, чтобы сделать $SU(4)$ симметрию очевидной, введем $SU(4)$ обозначения для полей. Соберем левые фермионные поля в $SU(4)$ вектор:

$$\psi_{1AL} \equiv \psi_{AL}, \quad \psi_{2AL} \equiv \lambda_{AL}, \quad \psi_{3AL} \equiv \psi_{AL}', \quad \psi_{4AL} \equiv \psi_{AL}''. \tag{27.9.38}$$

Чтобы фермионные кинематические члены в плотности лагранжиана были $SU(4)$-инвариантными, следует собрать правые фермионные поля в контраградиентный вектор:

$$\psi_{AR}^1 \equiv \psi_{AR}, \quad \psi_{AR}^2 \equiv \lambda_{AR}, \quad \psi_{AR}^3 \equiv \psi_{AR}', \quad \psi_{AR}^4 \equiv \psi_{AR}''. \tag{27.9.39}$$

Тогда условие Майораны на фермионные поля принимает $SU(4)$-инвариантный вид

$$(\psi_{iAL})^* = -\beta\varepsilon\psi^i_{AR}, \tag{27.9.40}$$

с индексами i, j и т. д., принимающими значения 1, 2, 3, 4. Чтобы связи Юкавы между фермионными и скалярными полями были $SU(4)$-инвариантными, скаляры должны преобразовываться как антисимметричный $SU(4)$ тензор

$$\begin{gathered}\varphi^{12}_A \equiv \varphi^*_A, \quad \varphi^{13}_A \equiv \varphi''_A, \quad \varphi^{14}_A \equiv -\varphi'_A, \\ \varphi^{23}_A \equiv -\varphi'^{\,*}_A, \quad \varphi^{24}_A \equiv -\varphi''^{\,*}_A, \quad \varphi^{34}_A \equiv \varphi_A,\end{gathered} \tag{27.9.41}$$

который подчиняется также $SU(4)$-инвариантному условию действительности

$$\left(\varphi^{ij}_A\right)^* = \frac{1}{2}\sum_{kl}\varepsilon_{ijkl}\varphi^{kl}_A. \tag{27.9.42}$$

Тогда лагранжиан (27.9.35) может быть записан в явно $SU(4)$-инвариантной форме

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{2}\sum_{Aij}(D_\mu\varphi^{ij})_A(D^\mu\varphi^{ij})^*_A \\ &-\frac{1}{2}\sum_{Ai}\left(\psi^{\mathrm{T}}_{iAL}\varepsilon(\not{D}\psi^i_R)_A\right) + \frac{1}{2}\sum_{Ai}\left(\psi^{i\mathrm{T}}_{AR}\varepsilon(\not{D}\psi_{iL})_A\right) \\ &-\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{ABCij}C_{ABC}\varphi^{ij}_A\left(\psi^{\mathrm{T}}_{iBL}\varepsilon\psi_{jCL}\right) - V \\ &-\frac{1}{4}\sum_A f_{A\mu\nu}f^{\mu\nu}_A + \frac{g^2\theta}{64\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sum_A f^{\mu\nu}_A f^{\rho\sigma}_A,\end{aligned} \tag{27.9.43}$$

где потенциал имеет вид

$$V = \frac{1}{8}\sum_{Aijkl}\left|\sum_{BC}C_{ABC}\varphi^{ij}_B\varphi^{kl}_C\right|^2. \tag{27.9.44}$$

Минимум потенциала равен нулю, так что в этой теории суперсимметрия не нарушена. Потенциал достигает минимума, когда все генераторы $\sum_A t_A\varphi^{ij}_A$ коммутируют друг с другом.

В случае, когда угол $\theta = 0$, калибровочные теории с простой калибровочной группой и либо $N = 2$, либо $N = 4$ суперсимметрией имеют только одну калибровочную константу связи g. Поскольку эти теории обладают также $N = 1$ суперсимметрией, то для них выполняется свойство, обсуждавшееся в разделе 27.6: единственная бесконечность в высших порядках теории возмущений возникает только в однопетлевой поправке к этой константе*. Тогда функция $\beta(g)$ в уравнении ренормгруппы $\mu dg/d\mu = \beta(g)$ во всех порядках теории возмущений дается однопетлевой формулой (18.7.2) с соответствующей поправкой на присутствие скалярных полей

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{4\pi^2}\left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{6}C_2^f - \frac{1}{12}C_2^s\right), \tag{27.9.45}$$

где

$$\begin{aligned} &\sum_{AB} C_{ABC}C_{ABD} = g^2 C_1 \delta_{CD}, \\ &[\mathrm{Tr}\,(t_C t_D)]_{\text{майорановские фермионы}} = g^2 C_2^f \delta_{CD}, \\ &[\mathrm{Tr}\,(t_C t_D)]_{\text{комплексные скаляры}} = g^2 C_2^s \delta_{CD}. \end{aligned} \tag{27.9.46}$$

В общих теориях с $N=2$ суперсимметрией мы имеем два майорановских фермиона λ_A и ψ_A в присоединенном представлении и H пар майорановских фермионов ψ'_n и ψ''_n, левые и правые части которых берутся в представлениях с генераторами либо t'_A, либо $-t'^{\mathrm{T}}_A$, так что

$$C_2^f = 2C_1 + 2HC_2', \tag{27.9.47}$$

где C_2' определяется формулой

$$\mathrm{Tr}\, t'_C t'_D = g^2 C_2' \delta_{CD}. \tag{27.9.48}$$

Кроме того, мы имеем один комплексный скаляр φ_A в присоединенном представлении и H пар комплексных скаляров φ'_n и φ''_n в представлениях с генераторами t'_A или $-t'^{\mathrm{T}}_A$, так что

$$C_2^s = C_1 + 2HC_2'. \tag{27.9.49}$$

Поэтому бета-функция (27.9.45) принимает вид

$$\beta(g) = -\frac{g^2}{8\pi^2}(C_1 - HC_2'). \tag{27.9.50}$$

$N=4$ суперсимметрия является частным случаем $H=1$ пар $N=2$ супермультиплетов в присоединенном представлении с $C_2' = C_1$, так что в этом

*Трилинейный член в суперпотенциале (27.9.29) пропорционален калибровочной константе, и поэтому перенормируем, несмотря на теорему об отсутствии перенормировок из раздела 27.6. Это является следствием того, что мы перенормируем левокиральные скалярные суперполя Φ_A, Φ'_n, Φ'_n и калибровочное суперполе V_A, чтобы сохранять их канонически нормированными. По этой же причине перенормируется билинейный член в (27.9.29).

случае $\beta(g) = 0$. Следовательно, это конечная теория безо всяких перенормировок [19].

Калибровочные теории с $N = 4$ суперсимметрией обладают еще одним замечательным свойством, называемым *дуальностью*. Оно было этом впервые указано Монтоненом и Оливом [17] в чисто бозонных теориях, в которых простая калибровочная группа нарушена до $U(1)$ электромагнитной калибровочной группы. Они заметили, что полуклассические расчеты (типа тех, что описаны в разделе 23.3) дают массу частиц с зарядом $q = ne$ и магнитным зарядом $\mathcal{M} = 4\pi m/e$ (n и m — целые числа любого знака) в виде

$$M = \sqrt{2}\left|v\left(ne + \frac{4\pi i m}{e}\right)\right|, \qquad (27.9.51)$$

Это выражение инвариантно относительно преобразований

$$m \to n, \quad n \to -m, \quad e \leftrightarrow 4\pi/e. \qquad (27.9.52)$$

Основываясь на этом, Монтонен и Олив предположили, что теория со слабой калибровочной константой связи e полностью эквивалентна теории с сильной калибровочной константой связи $4\pi/e$. Ни чисто бозонная теория, ни простейшие версии теорий с $N = 1$ и $N = 2$ расширенными суперсимметриями не обладают таким свойством [20], прежде всего массивные заряженные элементарные векторные бозоны нарушенных калибровочных симметрий имеют спин 1, а все монополи и дионы имеют спины 1/2 или 0. (В разделе 29.5 будет показано, что $N = 2$ теории обладают более тонкой разновидностью свойства дуальности.) Однако для $N = 4$ суперсимметрии монопольные состояния, так же, как элементарные частицы, образуют мультиплеты, состоящие из одной частицы спина 1, четырех частиц спина 1/2 и двух частиц спина 0 [20]. Уже накоплены доказательства [21], что $N = 4$ суперсимметричные калибровочные теории действительно инвариантны относительно перестановки электрических и магнитных квантовых чисел и перестановки e с $4\pi/e$. Эквивалентность теорий с большими и малыми константами связи стала вызывающей растущий интерес в теории струн, но это уже выходит за рамки данной книги.

Задачи

1. Вычислите компоненты суперполей Ω^A во втором порядке по калибровочным константам связи, необходимые для подстановки калибровочного суперполя V^A в калибровку Весса–Зумино с помощью преобразования (27.1.12).

2. Покажите, что самый общий вид кирального спинорного суперполя W_α, удовлетворяющего условию (27.2.20), имеет компоненты $f_{\mu\nu}$, удовлетворяющие однородным уравнениям Максвелла $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho f_{\mu\nu} = 0$. Какие условия на другие компоненты W_α налагаются соотношением (27.2.20)?

3. Рассмотрите общую перенормируемую $N = 1$ суперсимметричную калибровочную теорию с калибровочной группой $SU(2)$ и одним киральным суперполем, принадлежащим 3-векторному представлению $SU(2)$. Каков наиболее общий вид суперпотенциала в этой теории? Постройте плотность лагранжиана для этой теории в явном виде. Исключите вспомогательные поля. Покажите, что в этой теории суперсимметрия не нарушается. Каковы массы частиц в этой теории?

4. Выразите фермионные поля и поля калибрино в рамках суперсимметричной квантовой электродинамики, описанной в разделе 27.5, через поле голдстино и другие спинорные поля определенной массы.

5. Рассмотрите перенормируемую $N = 2$ суперсимметричную теорию с $SU(3)$ калибровочной симметрией и без гипермультиплетов. Каковы значения скалярных полей, при которых потенциал равен нулю? Каковы безмассовые калибровочные поля для ненулевых значений этих скаляров? Вычислите центральный заряд через величины, с которыми связаны эти безмассовые калибровочные поля.

Список литературы

1. Суперсимметрия была впервые использована в абелевых калибровочных теориях без применения формализма суперполей в работе: J. Wess and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B78**, 1 (1974). Затем она была распространена на неабелевы калибровочные теории в работах: S. Ferrara and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B79**, 413 (1974); A. Salam and J. Strathdee, *Phys. Lett.* **51B**, 353 (1974). Эти работы перепечатаны в сб.: *Supersymmetry*, S. Ferrara, ed. (North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapore, 1987).

2. P. Fayet and J. Iliopoulos, *Phys. Lett.* **51B**, 461 (1974). Перепечатано в сб.: *Supersymmetry* [1].

3. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3702 (1998).

4. S. Ferrara, L. Girardello, and F. Palumbo, *Phys. Rev.* **D20**, 403 (1979). Перепечатано в сб.: *Supersymmetry* [1]. Частные случаи этого правила сумм рассмотрены в работе: P. Fayet, *Phys. Lett.* **84B**, 416 (1979).

5. M. T. Grisaru, W. Siegel, and M. Roček, *Nucl. Phys.* **B159**, 429 (1979).

6. N. Seiberg, *Phys. Lett.* **B318**, 469 (1993).

7. Это впервые было доказано в формализме супердиаграмм в работе: W. Fischler, H. P. Nilles, J. Polchinski, S. Raby, and L. Susskind, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 757 (1981). Представленное здесь доказательство дано в работах: M. Dine, in *Fields, Strings, and Duality: TASI 96*, C. Efthimiou and B. Greene, eds. (World Scientific, Singapore, 1997); S. Weinberg [3].

8. Детальное доказательство утверждения, что суперперенормируемые члены, нарушающие некоторую глобальную симметрию, не приводят к бесконечным, нарушающим симметрию радиационным поправкам к коэффициентам перенормируемых взаимодействий дано в работе: K. Symanzik, in *Cargèse Lectures in Physics*, Vol. 5, D. Bessis, ed. (Gordon and Breach, New York, 1972). Кратко об этом упоминается в т. I в подстрочном примечании в разделе 12.2.

9. L. Girardello and M. T. Grisaru, *Nucl. Phys.* **B194**, 65 (1982), перепечатано в сб.: *Supersymmetry* [1]; K. Harada and N. Sakai, *Prob. Theor. Phys.* **67**, 67 (1982).

10. Обзор см.: S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1-23 (1989).

11. B. de Wit and D. Z. Freedman, *Phys. Rev.* **D12**, 2286 (1975). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersymmetry* [1].

12. Первые примеры калибровочных теорий с $N = 2$ расширенной суперсимметрией были приведены в работе: P. Fayet, *Nucl. Phys.* bf B113, 135 (1976); перепечатано в сб.: *Supersymmetry* [1]. Представленный здесь подход аналогичен подходу Файе. Формализм суперполей был развит затем в работе: R. Grimm, M. F. Sohnius, and J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B113**, 77 (1977). Калибровочные теории с $N = 2$ и $N = 4$ суперсимметрией в четырехмерном пространстве-времени были построены путем размерной редукции многомерных теорий с простой суперсимметрией в работах: L. Brink, J. H. Schwarz, and J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B113**, 77 (1977); M. F. Sohnius, K. S. Stelle, and P. C. West, *Nucl. Phys.* **B113**, 127 (1980). Другие подходы см. в работах: M. F. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B138**, 109 (1979); А. Гальперин, Е. А. Иванов и В. И. Огиевецкий, *Письма в ЖЭТФ* **33**, 176 (1981); P. Breitenlohner and M. F. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B178**, 151 (1981); P. S. Howe, K. S. Stelle, and P. K. Townsend, *Nucl. Phys.* **B214**, 519 (1983).

13. E. Witten and D. Olive, *Phys. Lett.* **78B**, 97 (1978). См. также H. Osborn, *Phys. Lett.* **83B**, 321 (1979).

14. Е. Б. Богомольный, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976).

15. D. Zwanziger, *Phys. Rev.* **176**, 1480, 1489 (1968); J. Schwinger, *Phys. Rev.* **144**, 1087 (1966); **173**, 1536 (1968); B. Julia and A. Zee, *Phys. Rev.* **Dll**, 2227 (1974); F. A. Bais and J. R. Primack, *Phys. Rev.* **D13**, 819 (1975).

16. M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.* **35** 760 (1975); E. B. Bogomol'nyi [14]; S. Coleman, S. Parke, A. Neveu, and C. M. Sommerfield, *Phys. Rev.* **D15**, 544 (1977).

17. Это было замечено в работе: C. Montonen and D. Olive, *Phys. Lett.* **72B**, 117 (1977). Отсутствие однопетлевых поправок к массам было показано в работе: A. D'Adda, R. Horsley, and P. Di Vecchia, *Phys. Lett.* **76B**, 298 (1978).

18. Причины формулировки теорий со вспомогательными полями для $N = 4$ суперсимметрии были проанализированы в работе: W. Siegel and M. Roček, *Phys. Lett.* **105B**, 275 (1981).

19. Конечность $N = 4$ теории была показана в работах: M. F. Sohnius and P. C. West, *Nucl. Phys.* **B100**, 245 (1981); S. Mandelstam, *Nucl. Phys.* **B213**, 149 (1983); L. Brink, 0. Lindgren, and B. E. W. Nilsson, *Nucl. Phys.* **B212**, 401 (1983); *Phys. Lett.* **123B**, 328 (1983). Доказательство конечности было распространено не непертурбативные эффекты в работе: N. Seiberg, *Phys. Lett.* **B206** 75 (1988). См. также: S. Kovacs, hep-th/9902047, будет опубликовано.

20. H. Osborn [13].

21. A. Sen, *Phys. Lett.* **B329**, 217 (1994); C. Vafa and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B431**, 3 (1994); L. Girardello, A. Giveon, M. Porrati, and A. Zaffaroni, *Phys. Lett.* **B334**, 331 (1994).

28

Суперсимметричные версии стандартной модели

Физические явления при энергиях, достижимых на современных ускорителях, хорошо описываются стандартной моделью — перенормируемой теорией кварков, лептонов и калибровочных бозонов, и задаются калибровочной группой $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, описанной в разделах 18.7 и 21.3. В настоящее время стандартная модель обычно [1] понимается как низкоэнергетическое приближение некоторой, пока не известной, фундаментальной теории, в которой гравитация оказывается объединенной с сильными и электрослабыми силами при энергиях приблизительно в интервале между 10^{16} и 10^{18} ГэВ. Это поднимает *проблему иерархии*: что отвечает за огромную разницу между этим фундаментальным масштабом энергии и характерным масштабом энергии стандартной модели ≈ 300 ГэВ?

Наиболее сильная теоретическая мотивация в пользу суперсимметрии — то, что она дает надежду на решение этой проблемы. Калибровочная симметрия $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ требует, чтобы кварки, лептоны и калибровочные бозоны входили в лагранжиан стандартной модели с нулевыми массами, при этом физические массы этих частиц соизмеримы с энергией, при которой нарушается электрослабая симметрия, и эта энергия, в свою очередь, пропорциональна массе скалярных полей, отвечающих за нарушение электрослабой симметрии. Сложность проблемы иерархии [1a] состоит в том, что ни одна из симметрий стандартной модели не защищает скалярные поля от приобретения больших «голых» масс (в отличие от фермионных и калибровочных полей), и поэтому трудно понять, почему массы скаляров, следовательно, и все прочие массы, не имеют значений в области от 10^{16} до 10^{18} ГэВ.

Была надежда, что эта проблема может быть решена вложением стандартной модели в суперсимметричную теорию. Если скалярные поля возникнут в супермультиплетах наряду с фермионами в киральном представлении некоторой калибровочной группы, то суперсимметрия может потребовать исчезновения «голых» масс как для скаляров, так и для фермионов. Тогда все массы в стандартной модели были бы привязаны к масштабу энергии, при которой нарушается суперсимметрия. Надежда на решение проблемы иерархии этим путем была единственной, но очень сильной причиной попыток включить суперсимметрию в реалистическую теорию.

К сожалению, ни одна из новых частиц, необходимых для суперсимметричных теорий, не обнаружена, и до сих пор не было предложено ни одной полностью удовлетворительной версии стандартной модели. В этой главе будут описаны попытки, которые предпринимались в этом направлении.

28.1. Суперполя, аномалии и законы сохранения

В этом разделе мы попытаемся решить, по крайней мере ориентировочно, какие ингредиенты должны входить в суперсимметричную версию стандартной модели.

Ни одно из кварковых или лептонных полей стандартной модели не принадлежит присоединенному представлению калибровочной группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, и потому они не могут быть суперпартнерами известных калибровочных бозонов, а значит, должны быть включены в киральные скалярные суперполя. Мы определим $U_i, D_i, \bar{U}_i, \bar{D}_i, N_i, E_i$ и $\bar{E}_i$ как левокиральные суперполя, чьи компоненты ψ_L — это, соответственно, левые поля кварков зарядами $2e/3$ и $-e/3$, поля антикварков зарядами $-2e/3$ и $+e/3$, поля лептонов зарядами 0 и $-e$ и антилептонов зарядом $+e$. Индекс i нумерует поколения и принимает значения 1,2 и 3. (Например, спинорные компоненты U_1, U_2 и U_3 являются, соответственно, левыми компонентами кварков u, c и t.) Суперполя U_i и D_i образуют $SU(2)$-дублеты, N_i и E_i также образуют $SU(2)$-дублеты, а остальные суперполя являются $SU(2)$-синглетами. Кварковые суперполя образуют $SU(3)$-триплеты, а антикварковые суперполя образуют $SU(3)$-антитриплеты (цветовые индексы при этом не рассматриваются), лептонные и антилептонные поля являются $SU(3)$-синглетами. Как упоминалось ранее, частицы, описываемые скалярными компонентами этих суперполей, известны как скварки, антискварки, слептоны и антислептоны. Существуют также калибрино, суперпартнеры спина 1/2 калибровочных бозонов симметрий $SU(3), SU(2)$ и $U(1)$, называемые, соответственно, глю́ино, ви́но и би́но*.

*Как будет показано в разделе 28.3, ожидается, что характерный масштаб энергии, при которой нарушается суперсимметрия, значительно больше, чем ≈ 300 Гэв, т. е. энергии, при которой нарушается $SU(2)\times U(1)$ симметрия. Таким образом, имеется значительный диапазон энергий, в котором можно рассматривать нарушение суперсимметрии, но не $SU(2)\times U(1)$ симметрии. В этом диапазоне энергий калибрино приобретают массы, которые задаются $SU(2)\times U(1)$ симметрией, и тогда нейтральные электрослабые калибрино определенной массы являются суперпартнерами $SU(2)$-триплета W^0 и $SU(2)$-синглета B и называются ви-

Мы также должны добавить некоторый механизм, который бы привел к спонтанному нарушению $SU(2)\times U(1)$ симметрии и приобретению масс всеми кварками, лептонами , а также $W^{\pm}$ и Z^0. Простейшая возможность — это предположить наличие еще двух $SU(2)$-дублетов левокиральных суперполей:

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}, \tag{28.1.1}$$

которые возникают в лагранжиане в линейных комбинациях $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$-инвариантных $\mathscr{F}$-слагаемых:

$$\left[(D_iH_1^0 - U_iH_1^-)\bar{D}_j\right]_{\mathscr{F}}, \qquad \left[(E_iH_1^0 - N_iH_1^-)\bar{E}_j\right]_{\mathscr{F}} \tag{28.1.2}$$

и

$$\left[(D_iH_2^+ - U_iH_2^0)\bar{U}_j\right]_{\mathscr{F}} \tag{28.1.3}$$

с очевидной сверткой по цветовым индексам. В соответствии с формулой (26.4.24) вакуумные средние скалярной компоненты H_1^0 придают массу заряженным лептонам и кваркам зарядом $-e/3$, а вакуумные средние скалярной компоненты H_2^0 придают массы кваркам зарядом $-2e/3$. Эти вакуумные средние, разумеется, приводят также к появлению масс у векторных бозонов $W^{\pm}$ и Z^0, и, так как H_1 и H_2 являются $SU(2)$-дублетами, мы автоматически получаем те же хорошие результаты для этих масс, как и в разделе 21.3. Заметим, что суперсимметрия не допускает появления комплексно сопряженных левокиральных суперполей H_1 и H_2 в суперпотенциале, поэтому вакуумное среднее скалярной компоненты H_1^0 не может привести к появлению масс у кварков зарядом $+2e/3$, а вакуумное среднее скалярной компоненты H_2^0 не может привести к появлению масс у кварков зарядом $-e/3$ или у заряженных лептонов, и именно в этом — причина того, что для получения масс всех лептонов и кварков необходимы и H_1, и H_2.

Конечно, можно было бы ввести более чем один H_1- и(или) H_2-дублет. Их число частично ограничено условием сокращения аномалий. Мы видели в разделе 22.4, что калибровочные симметрии несуперсимметричной стандартной модели свободны от аномалий, какими они и должны быть для квантово-механической непротиворечивости, однако теперь в лагранжиане имеются дополнительные спинорные поля. Поля калибрино не создают проблем, так как их левые компоненты принадлежат присоединенному представлению калибровочной группы, которое действительно для всех калибровочных групп. Единственная проблема может возникнуть из-за хиггсино-компонент спина $1/2$ суперполей (H_1^0, H_1^-)

но и бино, в отличие от суперпартнеров Z^0 и фотона. При учете нарушения $SU(2)\times U(1)$ нейтральные вино и бино частично перемешиваются.

и (H_2^+, H_2^0). Спинорные компоненты каждого (H_1^0, H_1^-)-дублета суперполей приводят к $SU(2){-}SU(2){-}U(1)$-аномалии, пропорциональной $\sum t_3^2 y = (\frac{1}{2}g)^2(\frac{1}{2}g') + (-\frac{1}{2}g)^2(\frac{1}{2}g') = \frac{1}{2}(g)^2 g'$, а спинорные компоненты каждого (H_2^+, H_2^0)-дублета суперполей приводят к $SU(2){-}SU(2){-}U(1)$-аномалии, пропорциональной $\sum t_3^2 y = (\frac{1}{2}g)^2(-\frac{1}{2}g') + (-\frac{1}{2}g)^2(-\frac{1}{2}g') = -\frac{1}{2}(g)^2 g'$. *Следовательно, сокращение аномалий требует равного числа дублетов* (H_1^0, H_1^-) *и* (H_2^+, H_2^0). В этом случае все аномалии сокращаются, в том числе $U(1)^3$ и $U(1)$–гравитон–гравитонная аномалии. В следующем разделе будут приведены аргументы в пользу того, что на самом деле есть лишь один дублет каждого типа.

В построенной таким образом теории нам приходится отказаться от одного из привлекательных свойств несуперсимметричной стандартной модели, т. е. от того, что она *автоматически* исключает любые перенормируемые взаимодействия, нарушающие сохранение лептонного или барионного числа. Существует несколько перенормируемых суперсимметричных $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ инвариантных $\mathscr{F}$-членов, которые могут быть включены в лагранжиан, и которые нарушают сохранение барионного и(или) лептонного числа без нарушения $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ калибровочной симметрии:

$$\left[(D_i N_j - U_i E_j)\bar{D}_k\right]_{\mathscr{F}}, \qquad \left[(E_i N_j - N_i E_j)\bar{E}_k\right]_{\mathscr{F}}, \tag{28.1.4}$$

а также

$$\left[\bar{D}_i \bar{D}_j \bar{U}_k\right]_{\mathscr{F}}, \tag{28.1.5}$$

с тремя опущенными цветовыми индексами в (28.1.5), которые подразумеваются свернутыми с антисимметричным ε-символом для получения цветового синглета. При наличии всех этих взаимодействий не существует разумного способа определить барионные и лептонные числа для скварков и слептонов таким образом, чтобы избежать неподавленного нарушения сохранения барионного и лептонного чисел. Например, обмен скалярным бозоном из суперполя $\bar{D}$ между вершинами взаимодействий (28.1.4) и (28.1.5) привел бы к катастрофической вероятности процесса $u_R d_R u_r \to \overline{e_R}$, наблюдаемого, например, как $p \to \pi^0 + e^+$, и подавленного лишь отношением констант взаимодействия. Чтобы избежать этого, необходимо сделать независимое предположение, которое запретило бы некоторые или все из взаимодействий (28.1.4)–(28.1.5).

Заметим, что нет необходимости запрещать *все* взаимодействия (28.1.4) и (28.1.5). Например, предположим лишь сохранение барионного числа, приписав полям стандартные значения: U_i и D_i левокиральные суперполя имеют барионное число $+1/3$; $\bar{U}_i$ и $\bar{D}_i$ — барионное число $-1/3$; $L_i, \bar{E}_i, H_1$ и H_2 — барионное число 0. Это допускало бы взаимодействия (28.1.4) и запрещало бы взаимодействия (28.1.5). Несмотря на свой вид, взаимодействия (28.1.4) в одиночку не нарушают сохранения лептонного числа, если считать что, скалярным компонентам суперполей приписаны соответствующие значения лептонных чисел. Это можно сделать, если приписать лептонное число 0 суперполям N_i и E_i, лептонное число -1 — суперполям $U_i, D_i, \bar{U}_i$ и $\bar{D}_i$, лептонное число -2 — суперполям $\bar{E}_i$, лептонное число 0 — суперполям H_1 и H_2 и лептонные числа -1 и $+1$ — суперполям θ_L и θ_R соответственно. (Напомним, что такие симметрии, при которых θ преобразуется нетривиально, называются *R-симметриями*.) Тогда все кварки и лептоны имеют общепринятые лептонные числа: фермионные компоненты ν_{iL} и e_{iL}, являющиеся коэффициентами θ_L в N_i и E_i, имеют лептонные числа $0+1=+1$, фермионные компоненты $\overline{e_{iR}}$ суперполей $\bar{E}_i$ имеют лептонные числа $-2+1=-1$, а кварки и антикварки имеют лептонные числа $-1+1=0$. Хиггсино (фермионные компоненты H_1 и H_2) имеют лептонные числа $0+1=+1$. С другой стороны, скалярные компоненты суперполей имеют те же лептонные числа, что и сами суперполя, а эти лептонные числа не являются общепринятыми. Далее, $\mathscr{F}$-член левого суперполя — это коэффициент при θ_L^2, а потому взаимодействия (28.1.4) имеют лептонные числа $-1+0-1+2=0$ и $0+0-2+2=0$; взаимодействия с участием H_1 в (28.1.2) имеют, соответственно, лептонное число $-1+0-1+2=0$ и $0+0-2+2=0$, а взаимодействие (28.1.3) с участием H_1 имеет лептонное число $-1+0-1+2=0$. Следовательно, ни одно из этих взаимодействий не нарушает сохранение лептонного числа. Скалярные компоненты H_1 и H_2 имеют лептонное число 0, поэтому их вакуумные средние также не нарушают сохранения лептонного числа. С этими значениями лептонных чисел сохранение лептонного числа запрещает любые перенормируемые взаимодействия, которые бы нарушали сохранение барионного числа: взаимодействие (28.1.5) имеет лептонное число $-1-1-1+2=-1$, и, следовательно, запрещено.

Взаимодействия (28.1.4) могли бы допускать альтернативный механизм нарушения $SU(2)\times U(1)$ и придания масс заряженным лептонам и кваркам зарядом $-e/3$: скалярные компоненты суперполей нейтрино N_i могут иметь ненулевые вакуумные средние. (При значениях лептонных чисел, введенных в предыдущем параграфе, это вакуумное среднее не будет нарушать сохранение лептонного числа, т. к. такие скалярные компоненты имеют равное нулю лептонное число суперполей N_i.) Но мы не можем полагаться на этот механизм, позволяющий обходиться вовсе без суперполей H_1,так как нам все еще необходимо взаимодействие с H_2 (28.1.3) для придания массы кваркам заряда $+2e/3$, а, как мы уже видели, сокращение аномалий требует равного числа суперполей H_1 и H_2.

Вместо этого обычно предполагается, что некоторые симметрии запрещают оба взаимодействия (28.1.4) и (28.1.5). Очевидно, эти симметрии могут сохранять лептонное и барионное число при общепринятых значениях этих чисел: U_i, D_i имеют барионное число $B = 1/3$ и лептонное число $L = 0$; $\bar{U}_i$ и $\bar{D}_i$ имеют барионное число $B = -1/3$ и лептонное числа 0, N_i и E_i имеют лептонное число $L = +1$ и барионное число 0; $\bar{E}_i$ имеет лептонное число -1 и барионное число 0, а H_1^0, H_1^- и H_2^+, H_2^0 *и* θ_L и θ_R все имеют барионное и лептонное число 0. Те же самые результаты относятся и к случаю, если мы предположим лишь сохранение некоторых линейных комбинаций лептонных и барионных чисел, таких как свободная от аномалий комбинация $B - L$, рассмотренная в разделе 22.4.

Имеются широко распространенные сомнения относительно того, возможны ли точные непрерывные глобальные симметрии, т. к. в теории струн существование любой точной непрерывной симметрии означало бы наличие безмассовых частиц спина 1, взаимодействующих с током симметрии, так что эта симметрия должна была бы быть локальной, а не глобальной [1б]. Но взаимодействия (28.1.4) и (28.1.5) могут также быть запрещены, если допустить *дискретную* глобальную симметрию, известную как сохранение *R-четности* [2]. Значение R-четности для кварков, лептонов, калибровочных бозонов и хиггсовских скалярных полей определено равным $+1$, а для их суперпартнеров – равным -1. Эта R-четность равна

$$\Pi_R = (-1)^F (-1)^{3(B-L)}, \tag{28.1.6}$$

где $(-1)^F$ — фермионная четность, равная $+1$ для всех бозонов и -1 для всех фермионов. Фермионная четность имеет тот же знак, какой приобретается при повороте на 2π, и поэтому она всегда сохраняется, а следовательно, если $B - L$ сохраняется, то и R-четность также будет сохраняться*. Возможен случай, когда R-четность может сохраняться даже при несохранении $B - L$, но на самом деле взаимодействия (28.1.4) и (28.1.5) запрещены условием сохранения R-четности, а значит, до тех пор, пока рассматриваются перенормируемые взаимодействия, сохранение R-четности влечет сохранение и лептонного, и барионного числа. Это *неверно* для неперенормируемых суперсимметричных взаимодействий, которые, предположительно, происходят в физических процессах при очень высоких энергиях. Вызываемые такими взаимодействиями процессы, не сохраняющие лептонное и барионное числа, рассмотрены в разделе 28.7.

Все новые «счастицы» (скварки, слептоны, калибрино и хиггсино), требуемые суперсимметричными теориями, имеют отрицательную

---

*Значение величины $(-1)^{3(B-L)}$ равно -1 для кварковых и лептонных полей, и $+1$ для всех прочих суперполей, поэтому сохранение R-четности эквивалентно инвариантности относительно преобразования, в котором все кварковые и лептонные суперполя меняют знак, а остальные суперполя неизменны. Этот принцип инвариантности был предложен в [3] для того, чтобы запретить взаимодействия (28.1.4) и (28.1.5).

R-четность, поэтому если R-четность не нарушена и является точной симметрией, то легчайшая из новых, необходимых для суперсимметрии частиц, должна быть абсолютно стабильной. Все прочие новые частицы будут тогда претерпевать последовательность распадов, порождая, в конечном счете, обычные частицы и легчайшие новые частицы. Феноменология различных суперсимметричных моделей в значительной степени определяется выбором самой легкой из новых частиц.

При сохранении суперсимметрии и либо R-четности, либо $B-L$, наиболее общий перенормируемый лагранжиан рассмотренных выше суперполей содержит обычную калибровочно-инвариантную кинетическую часть киральных суперполей, задаваемую суммой членов вида $(\Phi^* \exp(-V)\Phi)_D$ для каждого кваркового, лептонного и хиггсовского кирального суперполя плюс обычное калибровочно-инвариантное кинетическое слагаемое для калибровочных суперполей, задаваемое суммой слагаемых вида $\varepsilon_{\alpha\beta}(W_\alpha W_\beta)_{\mathscr{F}}$ для напряженности поля каждого из $SU(3)$, $SU(2)$ и $U(1)$ суперполей плюс суперсимметричное взаимодействие Юкавы, задаваемое линейной комбинацией взаимодействий (28.1.2), (28.1.3) и новым $\mathscr{F}$-членом взаимодействия H_1 и H_2:

$$\mathscr{L}_Y = \sum_{ij} h^D_{ij}[(D_i H^0_1 - U_i H^-_1)\bar{D}_j]_{\mathscr{F}} + \sum_{ij} h^E_{ij}[(E_i H^0_1 - N_i H^-_1)\bar{E}_j]_{\mathscr{F}}$$
$$+ \sum_{ij} h^U_{ij}[(D_i H^+_2 - U_i H^0_2)\bar{U}_j]_{\mathscr{F}} + \mu[H^+_2 H^-_1 - H^0_2 H^0_1]_{\mathscr{F}} + \text{э. с.} \qquad (28.1.7)$$

Как мы увидим в разделе (28.3), для учета нарушения суперсимметрии в лагранжиан необходимо будет добавить дополнительные слагаемые.

Коэффициент μ в лагранжиане (28.1.7) имеет размерность массы и является единственным размерным параметром, входящим в лагранжиан суперсимметричной версии стандартной модели. Несколько разочаровывает то, что это слагаемое все еще допустимо, т. к. это воскрешает проблему иерархии: почему бы μ не быть равным по порядку величины 10^{16}–10^{18} ГэВ? Можно избежать появления этого μ-члена в (28.1.7), если предположить сохранение лептонного числа при нестандартных значениях лептонных чисел, рассмотренных выше, которые бы допускали взаимодействия (28.1.4) но не взаимодействия (28.1.5). В таком случае μ-член несет лептонное число $+2$ и, следовательно, также запрещен. Это слагаемое может быть также запрещено, если предположить наличие $U(1)$ «симметрии Печчеи–Квинна» [4], при которой суперполя H_1 и H_2 несут равные квантовые числа, например, $+1$, тогда как θ_L и θ_R нейтральны. При этом взаимодействия (28.1.2) и (28.1.3), задающие массу кваркам и лептонам, допустимы лишь, например, если мы зададим квантовые числа Печчеи–Квинна -1 для левых суперполей антискварков и антислептонов, тогда как левые суперполя скварков и слептонов взяты нейтральными. Такой выбор запрещает также опасные взаимодействия (28.1.4) и (28.1.5). К сожалению, как мы увидим в разделе (28.4), μ-член в лагранжиане (28.1.7), по-видимому, необходим по феноменологическим соображениям. Теории с вызываемым гравитацией нарушением суперсимметрии, обсуждаемые в разделе 31.7, предоставляют естественный механизм получения μ-члена приемлемой величины.

Можно получить грубую оценку сверху масс новых частиц, предполагая, что суперсимметрия решает обсуждавшуюся в начале главы проблему иерархии. В соответствии с теоремой из раздела 27.6, если суперсимметрия не была нарушена, то вклад в массу скалярной компоненты H_1 или H_2 от однопетлевых диаграмм с промежуточной кварковой, лептонной, W- или Z-петлей сокращается соответствующей однопетлевой диаграмой с промежуточными скварком, слептоном, вино или бино. Следовательно, при нарушенной суперсимметрии вклад δm_H^2 от таких диаграмм в квадраты масс скаляров H_1 или H_2 является суммой слагаемых порядка $(\mathcal{G}_s^2/8\pi^2)\Delta m_s^2$, где $\mathcal{G}_s$ — константа Юкавы или калибровочная константа взаимодействия хиггсовского скаляра с супермультиплетом s, а Δm_s^2 — квадрат расщепления массы внутри супермультиплета. Чтобы избежать необходимости тонкой настройки этих поправок, необходимо, чтобы величина δm_H^2 была не больше, чем коэффициент порядка (300 ГэВ)^2 при члене в лагранжиане стандартной модели, который задает наблюдаемое нарушение $SU(2)\times U(1)$ симметрии в древесном приближении, поэтому мы будем полагать, что $\delta m_H^2 < 1(\text{ТэВ})^2$. Например, константа взаимодействия топ-кварка и скварка с H_2 по порядку величины равна единице, и потому мы ожидаем, что расщепление Δm^2 должно быть меньше величины порядка $8\pi^2$ ТэВ^2, и, следовательно, массы топ-скварков должны быть меньше, чем 10ТэВ. В разделе 28.4 мы увидим, что можно добиться того, чтобы вероятности процессов с изменением аромата могут не превышали верхнего экспериментального предела, если взять массы скварков почти равными. В этом случае выбранное значение можно рассматривать как грубую верхнюю границу значений масс всех скварков. (Возможно, однако, что вероятности этих процессов могут быть подавлены очень большими массами первых двух поколений скварков, тогда как масса топ-скварка ниже естественного масштаба масс* 10 ТэВ [4a]. Ограничения на массы остальных частиц с $R = -1$, устанавливаемые подобными рассуждениями, несколько слабее, но, по крайней мере в известном классе моделей, рассматриваемых в разделе 28.6, не ожидается, чтобы масса какой-либо из этих частиц была значительно больше масс скварков, так что для всех этих частиц значение 10 ТэВ может быть принято за верхнюю границу. С другой стороны, тот факт, что ни одна из этих частиц не наблюдалась, лишь пока-

*Автор употребляет термин «naturalness bound». — *Прим. пер.*

зывает, что их массы, вероятно, больше 100 ГэВ, так что диапазон масс, где они еще могут быть обнаружены, достаточно велик.

* * *

Если сохранение R-четности или какой-либо другой закон сохранения делает легчайшую из новых предсказанных суперсимметрией частиц стабильной, то некоторые из этих частиц могут остаться со времен ранней Вселенной. Плотность числа этих реликтов может быть оценена с использованием методики, которая первочально была применена для оценки плотности массивных нейтрино в космосе [4б]. Чтобы привести один пример вычислений такого сорта, покажем, что в широком диапазоне возможных масс новая стабильная частица суперсимметричных теорий не может быть заряженной и бесцветной, подобно заряженным слептону, вино или хиггсино [4c].

Как только температура Вселенной T (в энергетических единицах, когда постоянная Больцмана положена равной единице) падает ниже значения массы m любой стабильной заряженной незапертой частицы, их число nR^3 в расширяющемся вместе со Вселенной объеме R^3 уменьшается за счет аннигиляции со скоростью (отнесенной к одной частице) $\overline{v\sigma}n$, где $\overline{v\sigma}$ — среднее значение произведения относительной скорости и поперечного сечения аннигиляции. Таким образом,

$$\frac{d(nR^3)}{dt} = -\overline{v\sigma}n^2R^3,$$

так что

$$\frac{1}{nR^3} = \left(\frac{1}{nR^3}\right)_0 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\overline{v\sigma}}{R^3}dt, \tag{28.1.8}$$

где 0 обозначает момент времени, когда $T \simeq m$. Процесс аннигиляции экзотермичен, так что при $v \ll 1$ $\overline{v\sigma}$ стремится к константе. В радиационно-доминированной фазе расширения Вселенной $R \propto t^{1/2}$ и, следовательно, интеграл сходится и дает

$$\left(\frac{1}{nR^3}\right)_{t\to\infty} = \left(\frac{1}{nR^3}\right)_0 + \overline{v\sigma}\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{R_0^3(t/t_0)^{3/2}}$$

$$= \left(\frac{1}{nR^3}\right)_0 + \frac{2\overline{v\sigma}t_0}{R_0^3}. \tag{28.1.9}$$

Плотность барионого числа n_B (число барионов минус число антибарионов) ведет себя как R^{-3}, так что предыдущее выражение может быть переписано в виде формулы для современного отношения плотности числа новых частиц к плотности барионного числа

$$(n/n_B)_\infty = [(n_B/n)_0 + 2\overline{v\sigma}n_{B0}t_0]^{-1}. \tag{28.1.10}$$

Мы ожидаем, что отношение $(n/n_B)_0$ в момент времени, когда T упадет до значения $\approx m$, по порядку величины равно единице, и так как в любой реалистической теории значение отношения $(n/n_B)_\infty$ в настоящее время должно быть много меньше единицы, мы можем пренебречь первым слагаемым в знаменателе в правой части (28.1.10) и записать вместо этого

$$(n/n_B)_\infty \simeq \frac{1}{\overline{v\sigma}n_{B0}t_0}. \tag{28.1.11}$$

Точное значение $\overline{v\sigma}$ зависит от спина частицы и ее взаимодействий; отслеживая лишь множители 2π, массу частицы m и электрический заряд, можно оценить, что эта величина порядка

$$\overline{v\sigma} \approx \frac{e^4\mathcal{N}}{2\pi m^2} \approx 10^{-3}\frac{\mathcal{N}}{m^2}, \tag{28.1.12}$$

где $\mathcal{N}$ – число спиновых состояний заряженных частиц массой меньше m, в которые эта частица может аннигилировать. Возраст Вселенной при температуре $T_0 \simeq m$ равен $t_0 \approx m^4/m_{\text{Планк}}$, где $m_{\text{Планк}} \approx 10^{18}$ГэВ, а плотность барионного числа составляет примерно 10^{-9} от плотности числа фотонов, которая имеет порядок T^3, так что $n_{B0} \approx 10^{-9}m^3$. Собирая все это вместе, получаем современное отношение плотности числа новых заряженных частиц к плотности числа барионов:

$$(n/n_B)_\infty \approx 10^{12}\frac{m}{m_{\text{Планк}}\mathcal{N}} \approx 10^{-6}\frac{m(\text{ ГэВ})}{\mathcal{N}}. \tag{28.1.13}$$

Эти новые заряженные частицы должны были бы испытать бы те же сгущения в галактики, звезды и планеты, что и обычные барионы, поэтому такое же отношение должно было бы наблюдаться в настоящее время. Но масс-спектроскопические эксперименты [4г] с образцами воды, сильно обогащенной с помощью электролиза тяжелыми водоподобными молекулами, установили предел приблизительно в $10^{-21}n_B$ на плотность числа новых заряженных частиц массами 6 ГэВ$< m <$ 330 ГэВ в земном веществе. Следовательно, даже если $\mathcal{N}$ достигает 1000, эти измерения решающим образом запрещают существование новых незапертых заряженных частиц в этом диапазоне масс в количествах, которые могли бы остаться со времен ранней Вселенной.

С другой стороны, нейтральные незапертые частицы могли бы сохраниться в межгалактическом пространстве. Эти частицы могут с успехом обеспечить «недостающую массу», которую, видимо, необходимо учитывать при оценке гравитационного поля, отвечающего за движение галактик в галактических кластерах. Одной из возможных частиц является гравитúно, чья космологическая распространенность обсуждется в разделе 28.3. Эллис и др. [4в] расширили космологические рассмотрения на все новые требуемые суперсимметрией частицы.

28.2. Суперсимметрия и объединение сильных и электрослабых взаимодействий

Нам придется отложить детальную разработку суперсимметричных моделей в физике частиц до тех пор, пока мы не сможем понять, как происходит нарушение суперсимметрии. В этом разделе мы рассмотрим количественные результаты суперсимметрии в ситуации, когда сам механизм нарушения суперсимметрии сравнительно не важен, и когда суперсимметрия достигла самого большого до сих пор эмпирического успеха.

Если калибровочная группа $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ сильного и электрослабого взаимодействий вложена в простую группу G, в некотором представлении которой содержатся известные кварки и лептоны (а также, возможно, некоторые $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ нейтральные фермионы), тогда, как обсуждалось в разделе 21.5, при энергиях около или выше масштаба M_X, на котором G спонтанно нарушается, константы $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ взаимодействия будут связаны соотношением

$$g_s^2 = g^2 = \frac{5g'^2}{3} \quad \text{при энергиях} \geqslant M_X. \tag{28.2.1}$$

При энергиях значительно ниже M_X эти константы взаимодействия существенно меняются за счет перенормировочных поправок. При измерении на масштабе $\mu < M_X$ константы взаимодействия будут иметь значения $g_s^2(\mu), g^2(\mu), g'^2(\mu)$, подчиняющиеся однопетлевым уравнениям ренормгруппы

$$\mu\frac{d}{d\mu}g'(\mu) = \beta_1\left(g'(\mu)\right), \quad \mu\frac{d}{d\mu}g(\mu) = \beta_2\left(g(\mu)\right), \quad \mu\frac{d}{d\mu}g_s(\mu) = \beta_3\left(g_s(\mu)\right), \tag{28.2.2}$$

с начальными значениями в точке M_X, удовлетворяющими условию (28.2.1). В разделе 21.5 обсуждались первые результаты применения уравнений ренормгруппы для этого случая. Вычисленные в однопетлевом порядке бета-функции оказались равными

$$\beta_1 = \frac{5n_g g'^3}{36\pi^2}, \tag{28.2.3}$$

$$\beta_2 = \frac{g^3}{4\pi^2}\left(-\frac{11}{6}+\frac{n_g}{3}\right), \tag{28.2.4}$$

$$\beta_3 = \frac{g_s^3}{4\pi^2}\left(-\frac{11}{4}+\frac{n_g}{3}\right), \tag{28.2.5}$$

где n_g — число поколений кварков и лептонов, и отброшены относительно малые вклады скалярных полей. Так как величина M_X оказывается на много порядков больше, чем доступные на нынешних ускорителях энергии, разумно считать, что суперсимметрия не нарушена почти во всем диапазоне энергий ниже M_X. В этом случае все новые поля, обсуждавшиеся в предыдущем разделе, должны быть включены в вычисления бета-функций в (28.2.1). Эти новые поля приводят к трем главным изменениям в вычислениях бета-функций.

1. Для каждого калибровочного бозона существует майорановское калибрино с теми же самыми $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ квантовыми числами. Из выражения (17.5.41) следует, что отношение вклада в бета-функцию для любого калибровочного взаимодействия дираковского фермиона, которое вносит вклад в калибровочную группу с генераторами t_A, к вкладу соответствующего калибровочного бозона равно $-4C_2/11C_1$, где, согласно формулам (17.5.33) и (17.5.34), отношение C_1 и C_2 определяется из соотношения

$$\sum_{AB} C_{CAB}C_{DBA} = -(C_1/C_2)\mathrm{Tr}\,(t_C t_D). \tag{28.2.6}$$

Для присоединенного представления $(t_C)_{AB} = iC_{ABC}$, так что $C_1 = C_2$, и поэтому дираковский фермион в присоединенном представлении дает вклад, составляющий $-4/11$ от вклада калибровочных бозонов. Но калибрино являются майорановскими фермионами, так что их вклад составляет $-2/11$ от вклада калибровочных бозонов. Следовательно, слагаемые $11/6$ и $11/4$ в выражениях (28.2.4) и (28.2.5) уменьшаются на множитель $9/11$ до значений $9/6$ и $9/4$ соответственно.

2. Для каждого левого кваркового, лептонного, антикваркового или антилептонного поля существует комплексное скалярное поле с теми же самыми $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ квантовыми числами. Используя тот же метод, что и в разделе 17.5, несложно вычислить, что вклад комплексного скалярного поля, принадлежащего представлению калибровочной группы с генераторами t_A, в бета-функцию калибровочной константы взаимодействия g_i равен

$$[\beta_i(g_i)]_{\text{скаляр}} = \frac{g_i^3 C_{2i}}{48\pi^2}, \tag{28.2.7}$$

где $\mathrm{Tr}\,(t_A t_B) = g_i^2 C_{2i}\delta_{AB}$. Это составляет $1/4$ от вклада дираковского спинорного поля в том же представлении, задаваемого формулой (18.7.2), и, следовательно, $1/2$ от вклада каждого левого спинорного поля (включая комплексно сопряженные правых компонент дираковских полей). Следовательно, коэффициенты для n_g в (28.2.3)–(28.2.5) должны быть увеличины в $3/2$ раза.

3. Уменьшение в $9/11$ раз отвечающих калибровочным бозонам отрицательных слагаемых в бета-функциях и увеличение в $3/2$ раза отвечающих скваркам и слептонам положительных слагаемых вместе ведут к общему уменьшению скорости, с которой эти три калибровочные константы взаимодействия расходятся в области ниже M_X от отношений (28.2.1). Это приводит к увеличению ожидаемого значения M_X, однако, как мы увидим, само по себе не влияет на предсказание электрослабого параметра смешивания $\sin^2\theta$. Но эти изменения на самом деле увеличивают относительный вклад хиггсовских скаляров, которым мы пренебрегли в формулах (28.2.3)–(28.2.5) и который теперь, кроме того, сопровождается бо́льшим вкладом сопутствующих хиггсино. Если n_s — число обсуждавшихся в предыдущем разделе дублетов суперполей (H_1^0, H_1^-) или (H_2^+, H_2^0), то константа C_{2i} в формуле (28.2.7) равна $[(1/2)^2 + (1/2)^2]n_s = n_s/2$ для $SU(2)$ и $2n_s(\pm 1/2)^2 = n_s/2$ для $U(1)$. В соответствии с формулой (28.2.7), скалярные компоненты этих суперполей дают в β_1 вклад, равный $n_s g'^3/96\pi^2$, а в β_2 — вклад, равный $n_s g^3/96\pi^2$. Как мы видели, майорановские хиггсино дают вдвое больший вклад в бета-функции, чем комплексные скаляры с теми же квантовыми числами, так что все вместе суперполя (H_1^0, H_1^-) или (H_2^+, H_2^0) дают в β_1 и β_2 вклад, составляющий $3/2$ от вклада хиггсовских скаляров, т. е. равный $n_s g'^3/32\pi^2$ и $n_s g^3/32\pi^2$ соответственно.

Совершая все эти изменения в бета-функциях, получим

$$\beta_1 = \frac{g'^3}{4\pi^2}\left(\frac{5n_g}{6} + \frac{n_s}{8}\right), \tag{28.2.8}$$

$$\beta_2 = \frac{g^3}{4\pi^2}\left(-\frac{9}{6} + \frac{n_g}{2} + \frac{n_s}{8}\right), \tag{28.2.9}$$

$$\beta_3 = \frac{g_s^3}{4\pi^2}\left(-\frac{9}{4} + \frac{n_g}{2}\right). \tag{28.2.10}$$

Тогда решения уравнений ренормгруппы (28.2.2) имеют вид

$$\frac{1}{g'^2(\mu)} = \frac{1}{g'^2(M_X)} + \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{5n_g}{6} + \frac{n_s}{8}\right)\ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right), \tag{28.2.11}$$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(M_X)} + \frac{1}{2\pi^2}\left(-\frac{3}{2} + \frac{n_g}{2} + \frac{n_s}{8}\right)\ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right), \tag{28.2.12}$$

$$\frac{1}{g_s^2(\mu)} = \frac{1}{g_s^2(M_X)} + \frac{1}{2\pi^2}\left(-\frac{9}{4} + \frac{n_g}{2}\right)\ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right). \tag{28.2.13}$$

Удобно положить $\mu = m_Z$, так что $SU(2)\times U(1)$ симметрия может рассматриваться как ненарушенная почти во всем диапазоне энергий, в котором мы пользуемся формулами (28.2.11)–(28.2.13). С учетом (28.2.1) разность выражений (28.2.13) и (28.2.12) дает

$$\frac{1}{g^2(m_Z)} - \frac{1}{g_s^2(m_Z)} = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{3}{4} + \frac{n_s}{8}\right)\ln\left(\frac{M_X}{m_Z}\right), \tag{28.2.14}$$

а разность между выражением (28.2.11) и умноженным на 3/5 выражением (28.2.12) равна

$$\frac{1}{g^2(m_Z)} - \frac{3}{5g'^2(m_Z)} = \frac{1}{2\pi^2}\left(-\frac{3}{2} + \frac{n_s}{20}\right)\ln\left(\frac{M_X}{m_Z}\right). \tag{28.2.15}$$

Соотношения (21.3.19) позволяют выразить электрослабые константы через угол электрослабого смешивания θ и заряд позитрона e:

$$g(m_Z) = -e(m_Z)/\sin\theta, \quad g'(m_Z) = -e(m_Z)/\cos\theta. \tag{28.2.16}$$

Теперь можно выразить неизвестные $\ln(M_X/m_Z)$ и $\sin^2\theta$ через входные параметры $e(m_Z)$ и $g_s(m_Z)$:

$$\sin^2\theta = \frac{18 + 3n_s + (e^2(m_Z)/g_s^2(m_Z))(60 - 2n_s)}{108 + 6n_s}, \tag{28.2.17}$$

$$\ln\left(\frac{M_X}{m_Z}\right) = \left(\frac{8\pi^2}{e^2(m_Z)}\right)\left(\frac{1 - (8e^2(m_Z)/3g_s^2(m_Z))}{18 + n_s}\right). \tag{28.2.18}$$

Для $n_s = 0$ формула (28.2.17) дает тот же результат (21.5.15) для $\sin^2\theta$, что и вычисленный первоначально (без учета малого вклада хиггсовских скаляров) в несуперсимметричных теориях, однако значение (28.2.18) для $\ln(M_X/m_Z)$ больше, чем первоначальный результат (21.5.16) на множитель $11/9$, который, как мы видели, возникает от вклада гейджино в бета-функции.

n_s	$\sin^2\theta$	M_X(ГэВ)
0	0,203	$8{,}7\times10^{17}$
2	0,231	$2{,}2\times10^{16}$
4	0,253	$1{,}1\times10^{15}$

Таблица 1. Значения параметра $\sin^2\theta$ электрослабого смешивания и масса объединения M_X, определяемые соотношениями (28.2.17) и (28.2.18), как функция числа n_s дублетов левых суперполей (H_1^0, H_1^-) или (H_2^+, H_2^0).

Использование тех же входных параметров $e^2(m_Z)/4\pi = (128)^{-1}$, $g_s^2(m_Z)/4\pi = 0{,}118$, $m_Z = 91{,}19$ГэВ, что и в разделе 21.5, приводит теперь к численным результатам, показанным в таблице 28.1. Как обсуждалось в предыдущем разделе, необходимость сокращения аномалий в электрослабых токах требует равного числа дублетов (H_1^0, H_1^-) и (H_2^+, H_2^0), и потому мы рассматриваем только четные значения числа n_s этих суперполей.

Отметим, что значение $n_s = 2$ для простейшей правдоподобной теории приводит [6] к значению $\sin^2\theta = 0.231$, которое великолепно согласуется с экспериментально наблюдаемым значением $\sin^2\theta = 0.23$. Величина M_X в 20 раз [7] больше, чем при вычисленнии ее тем же способом в несуперсимметричных теориях, что приводит к уменьшению в 20^{-4} вероятности процессов распада протона, типа $p \to \pi^0 + e^+$, устраняя тем самым противоречие с тем, что этот процесс экспериментально не наблюдается. (Распад протона будет более детально рассмотрен в разделе 28.7.) Это увеличение значения M_X подводит его ближе к масштабу энергии $\approx 10^{18}$ ГэВ, на котором гравитация так же сильна, как и другие взаимодействия. Возможно, что остающийся промежуток может быть заполнен за счет изменения гравитационных взаимодействий при очень высоких энергиях [7a].

Значение $n_s = 4$ привело бы к значению $\sin^2\theta$, значительно расходящемуся с экспериментом, и к низкому значению M_X, достаточному для возрождения противоречия с экспериментальными данными о распаде протона. Это является серьезным доводом в пользу того, чтобы иметь лишь по одному суперполю (H_1^0, H_1^-) и (H_2^+, H_2^0).

В отличие от вычисленных значений $\sin^2\theta$ и M_X, вычисленная при значении M_X величина общей калибровочной константы взаимодействия (28.2.1) зависит от числа поколений, равно как и от числа скалярных дублетов. При $n_g = 3$ и $n_s = 2$ и приведенных выше входных параметрах соотношение (28.2.13) дает

$$\frac{g^2(M_X)}{4\pi} = \frac{g_s^2(M_X)}{4\pi} = \frac{1}{17.5}. \tag{28.2.19}$$

28.3. Где нарушается суперсимметрия?

Если даже считать, что суперсимметрия верна, она определенно не проявляется в меню известных частиц, так что всякое рассмотрение применений суперсимметрии при обычных энергиях заставляет сделать некоторое предположение о механизме ее нарушения. Проще всего было бы считать, что суперсимметрия нарушена так же, как и $SU(2)\times U(1)$, за счет эффектов, возникающих в древесном приближении суперсимметричной стандартной модели. Эта возможность определенно должна быть исключена.

Один довод против нарушения суперсимметрии в древесном приближении основан на правиле сумм для масс (27.5.11), которое выполняется по-отдельности для каждого значения ненарушенных сохраняющихся величин цвета и электрического заряда. В секторе цветового триплета с электрическим зарядом $-e/3$ единственные известные фермионы — это d-, s- и b-кварки, для которых

$$m_d^2+m_s^2+m_b^2 \simeq (5\ \text{ГэВ})^2. \tag{28.3.1}$$

Согласно правилу сумм, если нет других фермионов с теми же зарядом и цветом, то сумма квадратов всех масс для бозонов (учитывая по отдельности каждое спиновое состояние) с теми же цветом и зарядом должна быть примерно равна $2(5\text{ГэВ})^2$. В частности, каждый из скварков с такими цветом и зарядом должен иметь массу не более 7 ГэВ. Существование таких легких скварков исключено экспериментальными данными — они проявились бы, например, как вклад в вероятность электрон-позитронной аннигиляции в адроны при энергиях, где этот процесс очень хорошо изучен.

Этот аргумент может стать неправомерным, если существует четвертое поколение тяжелых кварков. Димопулосу и Джорджи [3] принадлежит другой аргумент, применимый независимо от числа тяжелых кварков и дающий даже более сильное ограничение сверху на массу легчайшего скварка. Из ненарушенного сохранения заряда и цвета следует, что единственные ненулевые D_{A0}-члены в суперсимметричной стандартной модели соответствуют генераторам y группы $U(1)$ и t_3 группы $SU(2)$, которые мы будем называть, соответственно, D_1 и D_2. Собственные значения этих генераторов равны $y=-g'/6$ и $t_3=+g/2$ для левых кварков зарядом $2e/3$, $y=-g'/6$ и $t_3=-g/2$ для левых кварков зарядом $-e/3$, $y=2g'/3$ и $t_3=0$ для правых кварков зарядом $2e/3$ и $y=-g'/3$ и $t_3=0$ для правых кварков зарядом $-e/3$. Поля скварков являются цветовыми триплетами и поэтому не могут обладать вакуумными средними. В соответствии с уравнением (27.5.4) матрица квадратов масс скварков зарядом $2e/3$, образующих цветовой триплет (но не антитриплет), есть

$$M_{0U}^2 = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_U^* \mathcal{M}_U - g' D_1/6 + g D_2/2 & \mathcal{F}_U^* \\ \mathcal{F}_U & \mathcal{M}_U \mathcal{M}_U^* + 2g' D_1/3 \end{bmatrix}, \qquad (28.3.2)$$

тогда как матрица квадратов масс образующих цветовой триплет скварков зарядом $-e/3$ есть

$$M_{0D}^2 = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_D^* \mathcal{M}_D - g' D_1/6 - g D_2/2 & \mathcal{F}_D^* \\ \mathcal{F}_D & \mathcal{M}_D \mathcal{M}_D^* - g' D_1/3 \end{bmatrix}. \qquad (28.3.3)$$

Уравнение (27.5.6) также дает матрицы квадратов масс для кварков зарядом $2e/3$ и $-e/3$ лишь в виде $\mathcal{M}_U^* \mathcal{M}_U$ и $\mathcal{M}_D^* \mathcal{M}_D$ соответственно, без смешивания с калибрино.

Пусть теперь v_u и v_d – нормированные собственные векторы матриц квадратов масс $\mathcal{M}_U^* \mathcal{M}_U$ и $\mathcal{M}_D^* \mathcal{M}_D$, отвечающие кваркам u и d наименьшей массы. Рассмотрим вакуумное среднее соответствующих матриц квадратов масс

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_u^* \end{bmatrix}^\dagger M_{0U}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ v_u^* \end{bmatrix} = m_u^2 + \frac{2g' D_1}{3}, \qquad (28.3.4)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_d^* \end{bmatrix}^\dagger M_{0D}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ v_d^* \end{bmatrix} = m_d^2 - \frac{g' D_1}{3}. \qquad (28.3.5)$$

Эти вакуумные средние — средневзвешенные значения квадратов масс скварков зарядом $2e/3$ и $-e/3$ соответственно, так что по крайней мере один скварк зарядом $2e/3$ должен обладать массой меньшей, чем $m_u^2 + 2g' D_1/3$, и по крайней мере один скварк зарядом $-e/3$ должен обладать массой меньшей, чем $m_d^2 - g' D_1/3$. Тогда, в зависимости от знака D_1, *должен существовать более легкий, чем u-кварк, скварк зарядом $2e/3$, либо более легкий, чем d-кварк, скварк зарядом $-e/3$.*

Излишне говорить, что существование заряженного цветового триплета скаляров такой малой массы радикально изменило бы феноменологию сильного взаимодействия. Подобно u- и d-кваркам, этот обладающий цветом скаляр проявился бы как составляющая адронов с «конституентной» массой в несколько сотен МэВ, что заведомо не наблюдается. Так как этот скаляр электрически заряжен, то он может также образовываться парами при аннигиляции $e^+ - e^-$ при энергиях выше нескольких сотен МэВ, давая такой вклад в сечение аннигиляции, который бы разрушил превосходное согласие между теорией и экспериментом для данного сечения. Хуже того, так как u- и d-кварки столь легки, и ожидается, что D_1 — порядка масштаба нарушения суперсимметрии, то уравнения (28.3.4) и (28.2.5) указывают на то, что одно из скварковых полей должно иметь отрицательный квадрат массы, что означало бы, что это поле должно было бы получить ненулевое вакуумное среднее, нарушающее сохранение как цвета, так и заряда. Мы вынуждены отвергнуть простую схему спонтанного нарушения симметрии в древесном приближении в суперсимметричной версии стандартной модели.

Одним из выходов из этой ситуации могло бы быть добавление в теорию еще одного $U(1)$ калибровочного поля. Если все кварковые суперполя обладают одним и тем же значением $\tilde{g}$ нового $U(1)$-генератора, то соответствующий D-член $\tilde{D}$ дал бы дополнительное слагаемое $\tilde{g}\tilde{D}$ в правые части обоих выражений (28.3.4) и (28.3.5). Если это слагаемое достаточно велико, то оно может дать большой положительный вклад во все квадраты масс скварков, что позволяет избежать всех указанных выше проблем. Но нет никаких свидетельств наличия такого нового нейтрального калибровочного бозона при доступных энергиях, и в любом случае мы бы все еще имели верхнюю границу в 7 ГэВ масс всех скварков зарядом $-e/3$.

Не обязательно так уж плохо то, что мы вынуждены искать причины нарушения суперсимметрии где-то за пределами древесного приближения суперсимметричной стандартной модели. Если бы суперсимметрия была нарушена в этом приближении, то характерная масса, которая устанавливает масштаб нарушения, была бы некоторым массовым параметром в лагранжиане, что, в свою очередь, установило бы масштаб всех прочих масс в стандартной модели. И тогда мы снова столкнулись бы с проблемой иерархии: почему масштаб этой массы настолько меньше 10^{16}—10^{18} ГэВ?

Известен только один способ объяснения столь больших отношений масс. Если суперсимметрия спонтанно не нарушена в древесном приближении теории, объединяющей все взаимодействия при некотором большом масштабе масс M_X, тогда, как было показано в разделе 27.6, она не будет нарушена ни в каком порядке теории возмущений. Но суперсимметрия может быть нарушена непертурбативными эффектами. В частности, если есть некоторое калибровочное поле с асимптотически свободной константой связи как обсуждалось в разделе 18.3, это калибровочное взаимодействие станет сильным при энергиях порядка $M_S = M_X \exp(-8\pi^2 b/\mathcal{G}\,(M_X))$, где b – число порядка единицы. Для того, чтобы величина M_S была на много порядков меньше, чем M_X, не обязательно, чтобы $\mathcal{G}\,^2(M_X)/8\pi^2$ было очень малым. Мы увидим в разделе 29.4, что суперсимметрия и в самом деле может быть нарушена таким образом за счет калибровочного взаимодействия, становящегося сильным при некоторой энергии $M_S \ll M_X$. Действительно, именно это происходит с киральной симметрией в квантовой хромодинамике; нет никакой загадки в том, почему масса протона (или, по крайней мере, ее значительная часть, обязанная динамическому нарушению киральной симметрии, а не крошечным массам u- и d-кварков) настолько меньше масштаба объединения M_X. И наоборот, силы, которые велики при энергии M_S, могут породить потенциал скалярных полей, и тогда вакуумное среднее этих полей нарушит суперсимметрию.

Нет никаких признаков какого-либо нового сильного взаимодействия известных кварков и лептонов, так что мы должны предположить, что наблюдаемые частицы стандартной модели нейтральны по отношению к нарушающему суперсимметрию сильному взаимодействию. Тем самым нарушение суперсимметрии происходит в «скрытом секторе» частиц, которые чувствуют это новое сильное воздействие. Остается вопрос: каков механизм связи между нарушением суперсимметрии в скрытом секторе и частицами из стандартной модели? Как мы увидим, большинство из ожидаемых нами феноменологических приложений суперсимметрии зависит от ответа на этот вопрос даже больше, чем от деталей нарушения самой суперсимметрии.

Конечно, механизм, связывающий нарушение суперсимметрии с наблюдаемыми частицами, должен быть неким взаимодействием, которое чувствуют эти частицы. Есть два главных кандидата на такой механизм. Один механизм обеспечивается самими $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ калибровочными взаимодействиями, и будет обсужден в разделе 28.6. Другой — гравитация, или даже скорее вспомогательные поля, являющиеся суперпартнерами гравитационного поля, — будет рассмотрен в разделах 31.4 и 31.7.

Не вдаваясь сейчас в детали, можно сделать грубую оценку масштаба нарушения суперсимметрии M_S для этих двух возможностей. Для вызванного калибровочными полями нарушения суперсимметрии мы ожидаем, что расщепление масс между наблюдаемыми кварками, лептонами и калибровочными бозонами и их суперпартнерами должно быть порядка либо $g_s^2/16\pi^2$, либо $g'^2/16\pi^2$, либо $g^2/16\pi^2$ (где g_s, g и g' – это $SU(3)$, $SU(2)$ и $U(1)$ калибровочные константы связи), в зависимости от того, какими квантовые числами обладает рассматриваемый супермультиплет. (Это предположение подтверждается в разделе 28.6.) Следовательно, если скварки, слептоны и калибрино обладают массами в диапазоне от 100 ГэВ до 10 ТэВ, в пользу чего были приведены доводы в конце раздела 28.1, тогда масштаб нарушения суперсимметрии M_S был бы на два или три порядка выше — скажем, порядка 100 ТэВ. С другой стороны, если именно гравитация является посредником при нарушении суперсимметрии, то по размерным соображениям можно ожидать, что расщепление масс Δm между наблюдаемыми частицами и их суперпартнерами должно быть порядка $\sqrt{G}M_s^2$, или, возможно, порядка GM_S^3. (Результаты обоих вариантов будут сопоставлены в моделях, описанных в разделе 31.7.) Если скварки, слептоны и калибрино имеют массы в диапазоне от 100 ГэВ до 10 ТэВ, то M_S должно быть порядка 10^{11} ГэВ для $\Delta m \approx \sqrt{G}M_s^2$ или 10^{13} ГэВ для $\Delta m \approx GM_S^3$.

Эта большая разница в оценках масштаба нарушения суперсимметрии M_S для двух случаев нарушения, вызываемых калибровочными полями или гравитацией, приводит к важным отличиям в феноменологии частиц и космологии. Как уже неоднократно отмечалось, суперсимметрия требует, чтобы гравитон имел суперпартнера — гравитино. Когда суперсимметрия спонтанно нарушена на масштабе M_S, гравитино приобретает массу m_g порядка $\sqrt{G}M_S^2$. (Точная формула будет приведена в разделе 31.3.) Для вызванного калибровочными полями нарушения суперсимметрии она очень мала; если $M_S \approx 100$ ТэВ, то $m_g \approx 1$ эВ, так что гравитино было бы заведомо самой легкой новой частицей, требуемой суперсимметрией, т. е. самой легкой частицей с отрицательной R-четностью (28.1.6). С другой стороны, для вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии масса гравитино — того же порядка, что и величина $\sqrt{G}M_S^2$, являющаяся величиной расщепления масс между известными частицами и их суперпартнерами, так что гравитино будет обладать, грубо, той же массой, что скварки, слептоны и калибрино. Тогда хотя гравитино может быть, а может и не быть самой легкой частицей отрицательной R-четности, его взаимодействия с известными частицами и их суперпартнерами в данном случае происходят с той же интенсивностью, что и гравитационные взаимодействия, так что в экспериментах с элементарными частицами гравитино не играют непосредственной роли.

* * *

Существуют пределы на число гравитино, которые могут выжить с момента Большого взрыва, устанавливающие полезные ограничения на масштаб нарушения суперсимметрии M_S. Считается, что в некоторый момент в далеком прошлом температура T была достаточно высока для того, чтобы даже чисто гравитационные взаимодействия поддерживали гравитино в тепловом равновесии с прочими частицами, и в этом случае плотность числа гравитино была бы порядка T^3, т. е. примерно равна плотности числа фотонов. (Мы используем единицы, в которых постоянная Больцмана k_B, а также $\hbar$ и c, равны единице.) Если гравитино не аннигилируют и не распадаются, то расширение Вселенной приведет к уменьшению плотности их числа аналогично плотности числа фотонов, так что даже после того, как гравитино выйдут из равновесия, они будут присутствовать в количествах, сравнимых с числом фотонов. Более точно, так как не гравитино, а фотоны нагреваются за счет аннигиляции других частиц, плотность числа гравитино n_{g0} в настоящее время была бы на один или два порядка меньше, чем плотность числа фотонов $n_{\gamma 0}$ космического микроволнового фона излучения. Для того, чтобы плотность массы $m_g n_{g0}$ гравитино не превышала верхней границы космологической плотности массы, определяемой измерением значения постоянной Хаббла, масса гравитино m_g должна быть меньше [8] примерно 1 кэВ. Как мы видели, этому ограничению хорошо удовлетворяют теории с вызванным калибровочными полями нарушением суперсимметрии, в которых гравитино слишком легкие для того, чтобы космические гравитино давали заметный вклад в массу Вселенной. Так как некоторые из полей, нарушающих суперсимметрию в этих теориях, должны взаимодействовать, по крайний мере, косвенно, с известными кварковыми, лептонными и калибровочными полями для того, чтобы для известных частиц проявились эффекты спонтанного нарушения суперсимметрии, взаимодействия гравитино с известными частицами и их суперпартнерами подавлены только степенями калибровочных и юкавских констант взаимодействия. Поэтому все суперпартнеры кварков, лептонов и калибровочных бозонов быстро распадались бы на эти известные частицы и гравитино. Следовательно, такие частицы также не являются кандидатами на «недостающую массу», которую ищут космологи. (Возможно, что законы сохранения могут сохранить стабильными некоторые частицы из нарушающего суперсимметрию сектора, и в этом случае они могут, предположительно, служить недостающей массой.)

С другой стороны, для вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии гравитино достаточно тяжелы для того, чтобы быть нестабильными (хотя аннигиляция гравитино все еще пренебрежимо мала), так что приведенное выше ограничение неприменимо [9]. Мы увидим в разделе 31.3, что взаимодействие гравитино с другими полями пропорционально $\sqrt{G}$, так что по размерным соображениям вероятность распада Γ_g покоящегося гравитино порядка Gm_g^3. Это следует сравнить со скоростью расширения Вселенной, которая при температуре T составляет величину порядка $\sqrt{GT^4}$. (Здесь мы пренебрегаем множителями порядка 10–100, в том числе, включающими негравитационные константы взаимодействия и учитывающие число типов частиц.) Когда космическая температура падает до значения $T \approx m_g$, при котором гравитино становятся нерелятивистскими, тогда отношение скорости их распада к скорости расширения Вселенной становится по порядку величины равным $\sqrt{G}m_g = m_g/m_{\text{Планк}} \ll 1$, так что распад гравитино становится существенным только после этого времени, когда гравитино уже полностью нерелятивистские. Как мы видели, плотность их числа будет порядка T^3, а следовательно плотность их энергии — порядка $m_g T^3$, что больше, чем плотность энергии фотонов (порядка T^4) и других частиц, находящихся в тепловом равновесии при температуре T. Поэтому гравитино дают главный вклад в космическое гравитационное поле, которое обуславливает скорость расширения Вселенной. Скорость расширения при этих условиях порядка $\sqrt{Gm_g T^3}$, и распад гравитино становится существенным, когда эта величина равна скорости распада гравитино порядка Gm_g, т. е. при температуре

$$T_g \approx G^{1/3} m_g^{5/3}.$$

Как мы видели, если эти гравитино не распались до настоящего времени, то их масса не должна превышать 1 кэВ, но космологические трудности возникают и в случае, когда гравитино к настоящему времени распались. После распада их энергия должна перейти в энергию фотонов и других релятивистских частиц, так что температура T_g' после распада связана с температурой T_g, вычисленной выше с помощью условия сохранения энергии $m_g T_g^3 \approx T'^4_g$, откуда

$$T_g' \approx G^{1/4} m_g^{3/2}.$$

В частности, так как $T_g \ll m_g$, имеем $T_g' \gg T_g$. Если бы T_g было меньше, чем температура $T_n \simeq 0{,}1$ МэВ, при которой может происходить космологический нуклеосинтез, то гравитино бы еще существовали в изобилии до нуклеосинтеза, давая более высокую плотность энергии и, следовательно, более быстрое расширение, так что у свободных нейтронов было бы меньше времени для распада перед включением в сложные ядра, и тогда при нуклеосинтезе образовалось бы больше гелия. Следовательно, отношение плотностей фотонов и барионов также возросло бы при распаде гравитино, так что это отношение в эпоху нуклеосинтеза было бы гораздо меньше, чем обычно оцениваемое, исходя из температуры микроволнового фона в настоящее время. Следовательно, ядерные реакции объединяли бы большую часть нейтронов в гелий, и сегодня осталось бы меньше дейтерия. Отсюда современное согласие между теорией и наблюдаемым изобилием космических гелия и дейтерия было бы разрушено. Этой проблемы можно избежать, если $T_g > 0{,}1$ МэВ, но ее можно избежать и при значительно более слабом условии $T_g' > 0{,}4$ МэВ, так как в этом случае после распада гравитино температура была бы достаточно высокой, чтобы разрушить избыточный гелий и дать новый старт космическому нуклеосинтезу, когда Вселенная вновь охлаждается. Это условие требует, чтобы $m_g > 10$ ТэВ, что едва согласуется с выведенной в разделе 29.1 верхней границей масс суперпартнеров известных кварков, лептонов и калибровочных бозонов, которые в случае вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии имеют порядок m_g. Этот предел на m_g соответствует масштабу нарушения суперсимметрии $M_S > 10^{11}$ ГэВ для $m_g \approx \sqrt{G} M_S^2$ или $M_S > 10^{13}$ ГэВ для $m_g \approx G M_S^3$.

28.4. Минимальная суперсимметричная стандартная модель

В предыдущем разделе мы установили два различных способа, которыми нарушение суперсимметрии на большом масштабе энергий M_S может быть связано с известными лептонами и кварками — посредством калибровочных или гравитационных суперполей. Члены, нарушающие суперсимметрию в результирующем низкоэнергетическом эффективном лагранжиане, будут тогда подавлены степенями калибровочных констант связи или степенями гравитационной постоянной. Большинство этих слагаемых будут, следовательно, весьма малы, с тем исключением, что наряду с множителями в виде калибровочных констант связи либо гравитационной постоянной, по размерным соображениям массовые члены и прочие суперперенормируемые слагаемые в эффективном лагранжиане будут пропорциональны одной или более степеням масштаба нарушения суперсимметрии M_S, который значительно превышает массы известных частиц. Следовательно, можно заключить, что в достаточно хорошем приближении в случае вызванного калибровочными полями нарушения суперсимметрии и в очень хорошем приближении в случае вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии, главный эффект нарушения суперсимметрии будет содержаться в суперперенормируемых слагаемых эффективного лагранжиана суперсимметричной стандартной модели. Эту версию стандартной модели [10], которая суперсимметрична за исключением суперперенормируемых членов, принято называть *минимальной суперсимметричной стандартной моделью.*

Если R-четность или $B-L$ сохраняются, наиболее общий суперперенормируемый лагранжиан, допускаемый $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ калибровочной симметрией, принимает вид

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{sR} = &-\sum_{ij} M_{ij}^{2\,Q}(\mathscr{Q}_i^\dagger \mathscr{Q}_j) - \sum_{ij} M_{ij}^{2\,\bar{U}}(\bar{\mathscr{U}}_i^\dagger \bar{\mathscr{U}}_j) - \sum_{ij} M_{ij}^{2\,\bar{D}}(\bar{\mathscr{D}}_i^\dagger \bar{\mathscr{D}}_j) \\
&-\sum_{ij} M_{ij}^{2\,L}(\mathscr{L}_i^\dagger \mathscr{L}_j) - \sum_{ij} M_{ij}^{2\,\bar{E}}(\bar{\mathscr{E}}_i^\dagger \bar{\mathscr{E}}_j) \\
&-(\bar{\lambda}_3 m_{\text{глюино}} \lambda_3) - (\bar{\lambda}_2 m_{\text{вино}} \lambda_2) - (\bar{\lambda}_1 m_{\text{бино}} \lambda_1) \\
&-\sum_{ij} A_{ij}^D h_{ij}^D (\mathscr{Q}_i^{\mathrm{T}} e \mathscr{H}_1) \bar{\mathscr{D}}_j - \sum_{ij} A_{ij}^E h_{ij}^E (\mathscr{L}_i^{\mathrm{T}} e \mathscr{H}_1) \bar{\mathscr{E}}_j \\
&-\sum_{ij} A_{ij}^U h_{ij}^U (\mathscr{Q}_i^{\mathrm{T}} e \mathscr{H}_2) \bar{\mathscr{U}}_j - \sum_{ij} C_{ij}^D h_{ij}^D (\mathscr{Q}_i^{\mathrm{T}} \mathscr{H}_2^*) \bar{\mathscr{D}}_j \\
&-\sum_{ij} C_{ij}^E h_{ij}^E (\mathscr{L}_i^{\mathrm{T}} \mathscr{H}_2^*) \bar{\mathscr{E}}_j - \sum_{ij} C_{ij}^U h_{ij}^U (\mathscr{Q}_i^{\mathrm{T}} \mathscr{H}_1^*) \bar{\mathscr{U}}_j \\
&-B\mu(\mathscr{H}_2^{\mathrm{T}} e \mathscr{H}_1) + \text{э. с.}
\end{aligned} \tag{28.4.1}$$

Прописные буквы здесь используются для обозначения скалярных компонент левокиральных суперполей. Подразумеваются суммы по $SU(2)$ и цветовым индексам, так как они необходимы для $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ инвариантности, а e — обычная антисимметричная 2×2 матрица $i\sigma_2$. Все коэффициенты могут быть комплексными, и массы калибрино могут включать члены, пропорциональные как γ_5, так и единичной матрице.

Здесь мы следуем обычаю и записываем коэффициенты при слагаемых, включающих скалярные поля, но не им сопряженные, равными коэффициентам при соответствующих суперсимметричных $\mathscr{F}$-слагаемых в лагранжиане (28.1.7), умноженным на A^D_{ij}, A^E_{ij}, A^U_{ij} и B. Это обусловлено тем соображением, что малость юкавских взаимодействий легких кварков в выражении (28.1.7) отражает число приближенных киральных симметрий, которые при расширении на полный супермультиплет также сделали бы соответствующие трилинейные члены в (28.4.1) малыми. В то же время появление μ-члена в (28.1.7) нарушает возможную симметрию Печчеи–Квинна [4], и если бы эта симметрия приблизительно выполнялась, это сделало бы μ и $B\mu$ малыми. Аналогичные рассуждения позволяют определить форму записи коэффициентов при слагаемых, включающих как скалярные поля, так и им комплексно сопряженные. В разделе 31.4 мы опишем также вклады в Ah и $B\mu$, которые на самом деле пропорциональны соответственно h и μ. Здесь мы, однако, оставим открытым вопрос о том, обязательно ли малы коэффициенты Ah, Ch и $B\mu$ в выражéнии (28.4.1), если малы соответствующие коэффициенты h и μ в выражении (28.1.7).

При обсуждении минимальной суперсимметричной стандартной модели Ch-члены в (28.4.1) обычно опускались. Это происходило отчасти из-за того, что, как обсуждалось в разделе 27.7, слагаемые, подобные тем, которые включают φ-компоненты левокиральных скалярных суперполей, а также им комплексно сопряженные, могут потенциально породить квадратичные расходимости и, тем самым, создать проблему тонкой настройки. Но мы видели в разделе 27.7, что квадратичные расходимости встречаются лишь в диаграммах-«головастиках», в которых линия скалярного поля переходит в вакуум, а в минимальной суперсимметричной стандартной модели не существует скаляров, нейтральных по отношению ко всем калибровочным симметриям, и следовательно нет скалярных «головастиков». В теориях с вызванным гравитацией нарушением суперсимметрии, рассмотренным в разделе 31.6, Ch-члены отсутствуют. В теориях с рассмотренным в разделе 28.6 нарушением суперсимметрии, вызванным калибровочными полями, они малы. Однако нет оснований полагать, что так будет всегда.

Несмотря на то, что суперперенормируемые взаимодействия, подобные приведенным в (28.4.1), не являются суперсимметричными, они не создают, как это показано в разделе 27.7, нарушающих суперсимметрию ультрафиолетово расходящихся поправок к коэффициентам суперсимметричных $d = 4$ взаимодействий. Следовательно, условие суперсимметрии, которое накладывается на безразмерные константы связи минимальной суперсимметричной стандартной модели, не получается в результате сокращения ультрафиолетовых расходимостей путем перенормировки констант связи. Это свойство стало в работе [10] основанием для введения минимальной суперсимметричной стандартной модели, а не любой теории с нарушением суперсимметрии при высокой энергии в скрытом секторе.

Наилучшим аргументом сегодня в пользу изучения применений суперсимметричной стандартной модели является то, что, как уже упоминалось, теории, в которых суперсимметрия спонтанно нарушена при высоких энергиях, естественным образом описываются при гораздо меньших энергиях минимальной суперсимметричной стандартной моделью. Мы можем исследовать феноменологические приложения суперсимметричной стандартной модели, и быть достаточно уверенными в разумности результатов, какая бы конкретная модель нарушения суперсимметрии и способ ее реализации не оказалась верной.

Даже без Ch-членов, если все прочие коэффициенты в лагранжиане ограничены лишь сохранением калибровочных симметрий и R-четности, минимальная суперсимметричная стандартная модель будет содержать более ста свободных параметров [11]. В данном случае «минимальная» означает только то, что теория содержит минимальный набор суперполей. Иногда термин «минимальная суперсимметричная стандартная модель» используется для моделей, удовлетворяющих также ограничениям на коэффициенты в суперперенормируемых членах, вызванными либо какой-нибудь лежащей в основе теорией, либо эмпирическими ограниченями. Например, иногда оптимистично предполагается, что минимальная суперсимметричная стандартная модель удовлетворяет условиям универсальности

$$\begin{aligned}
&M_{ij}^{2\,Q} = M_{ij}^{2\,\bar{D}} = M_{ij}^{2\,\bar{U}} = M_{ij}^{2\,L} = M_{ij}^{2\,\bar{E}} = M^2\delta_{ij},\\
&m_{\text{глюино}} = m_{\text{вино}} = m_{\text{бино}},\\
&A_{ij}^{D} = A_{ij}^{E} = A_{ij}^{U} = A, \quad C_{ij}^{D} = C_{ij}^{E} = C_{ij}^{U} = 0.
\end{aligned} \tag{28.4.2}$$

Часто эти условия накладываются на масштабе $M_X \approx 10^{16}$ ГэВ, при котором происходит объединение констант взаимодействия, с поправками, порождаемыми ренормгрупповым потоком к более низким энергиям. Здесь мы не будем делать таких допущений.

Анализируя феноменологические приложения минимальной суперсимметричной стандартной модели, мы должны иметь дело не только с поиском новых частиц, но также и с двумя классами жестких эмпирических ограничений на процессы с уже известными нам частицами: экспериментальными верхними границами на различные процессы с несохранением аромата, и на различные моды CP-несохранения.

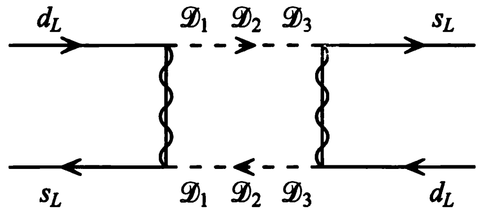

Рис. 28.1. Однопетлевая диаграмма, которая может давать вклад в $\Delta S = 2$ эффективное взаимодействие $(\bar{s}_L\gamma^\mu d_L)(\bar{d}_L\gamma_\mu s_L)$ в суперсимметричной стандартной модели. Злесь сплошные линии — кварки, пунктирные — скварки, объединенные волнистые и сплошные линии — глюино.

Процессы с изменением аромата

В разделе 21.3 мы видели, что в несуперсимметричной стандартной модели существует автоматическое подавление процессов с изменением аромата, подобных осцилляциям $K^0 - \bar{K}^0$ и распаду $K^0 \to \mu^+\mu^-$. Это происходит из-за особенности данной теории, состоящей в том, что только расщепление масс кварков позволяет определить их таким образом, чтобы каждый аромат сохранялся по-отдельности. Поэтому амплитуда таких процессов с изменением аромата должна быть пропорциональна произведению нескольких малых масс кварков. Кроме того, в этой теории аромат лептона сохраняется автоматически, поэтому процессы типа $\mu \to e\gamma$ абсолютно запрещены. Эти удовлетворительные результаты подвергаются риску из-за существования скварков и слептонов в суперсимметричных расширениях стандартной модели, потому что в общем случае нет оснований ожидать, что массовые матрицы слептонов и скварков будут диагональными в том же базисе, что и матрицы лептонов и кварков. Это не приводит к изменению аромата во взаимодействии этих частиц с калибровочными бозонами, которое не зависит от аромата, но может породить переходы с изменением аромата, при которых скварки и слептоны превратятся в кварки и лептоны с испусканием или поглощением калибрино. Конечно, если скварки и слептоны вырождены, проблем не возникает, т. к. в этом случае их массовые матрицы диагональны в любом базисе.

Самые строгие ограничения на расщепления масс скварков и(или) углы смешивания получаются из измерений $K^0 - \bar{K}^0$ переходов [12]. Эти переходы порождаются операторами в эффективном низкоэнергетическом лагранжиане типа $(\bar{s}_L\gamma^\mu d_L)(\bar{d}_L\gamma_\mu s_L)$, которые могут порождаться диаграммами, подобными изображенной на рис. 28.1. Суперпартнеры кварков d_L и s_L, вообще говоря, являются линейными комбинациями $\sum_i V_{di}\mathscr{D}_i$ и $\sum_i V_{si}\mathscr{D}_i$ скварк-

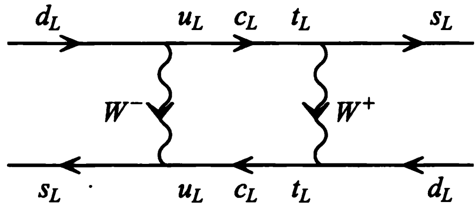

Рис. 28.2. Однопетлевая диаграмма, которая может давать вклад в $\Delta S = 2$ эффективное взаимодействие $(\bar{s}_L\gamma^\mu d_L)(\bar{d}_L\gamma_\mu s_L)$ как в суперсимметричной, так и в несуперсимметричной стандартных моделях. Здесь сплошные линии — кварки, а волнистые линии — $W^\pm$-бозоны.

ков $\mathscr{D}_i$ определенной массы, где V_{ji} — 3×3 унитарная матрица, так что два пропагатора скварков в данной диаграмме вносят множитель

$$\sum_i \frac{V_{di}V^*_{si}}{k^2+M_i^2-i\varepsilon}\times\sum_j \frac{V_{dj}V^*_{sj}}{k^2+M_j^2-i\varepsilon},$$

где k — 4-импульс в петле. Так как матрица V_{ij} унитарна, этот вклад исчезает, если массы всех трех скварков M_i равны. Если же квадраты масс скварков отличаются от некоего общего значения $M^2_{\text{скварк}}$ на относительно малую величину ΔM_i^2, то этот вклад становится равным

$$\left(\frac{1}{k^2+M^2_{\text{скварк}}-i\varepsilon}\right)^4\left(\sum_i V_{dj}V^*_{sj}\Delta M_i^2\right)^2.$$

Амплитуда перехода $d_L\bar{s}_L\to s_L\bar{d}_L$ имеет размерность масса $^{-2}$, так что после умножения на пропагаторы глюино, четырехкратного умножения на константу сильного взаимодействия g_s и интегрирования по k мы должны получить амплитуду, пропорциональную

$$\frac{g_s^4}{\tilde{M}^6}\left(\sum_i V_{dj}V^*_{sj}\Delta M_i^2\right)^2, \tag{28.4.3}$$

где $\tilde{M}$ – наибольшая из масс $M_{\text{скварк}}$ и $m_{\text{глюино}}$. Это следует сравнить с выражением для данной амплитуды в несуперсимметричной стандартной модели, которое получается в результате W-обмена (рис. 28.2). Пренебрегая третьим поколением кварков, амплитуды перехода которых в первые два поколения малы, получим, что амплитуды переходов $d\to u$, $d\to c$, $s\to u$ и $s\to c$ с испусканием W^- равны соответственно, $\cos\theta_c$, $-\sin\theta_c$, $\sin\theta_c$ и $\cos\theta_c$, где θ_c — угол

Кабиббо, определенный в разделе 21.3. Следовательно, вместо пропагаторов скварков имеем кварковые пропагаторы

$$\sin\theta_c\cos\theta_c\left(\frac{i\not{k}+m_u}{k^2+m_u^2-i\varepsilon}-\frac{i\not{k}+m_c}{k^2+m_c^2-i\varepsilon}\right),$$

а вместо константы сильного взаимодействия g_s — константу $SU(2)$ взаимодействия g. Следовательно, в несуперсимметричной стандартной модели амплитуда перехода $d_L\bar{s}_L \to s_L\bar{d}_L$ пропорциональна

$$\frac{g^4\sin^2\theta_c\cos^2\theta_c}{m_W^4}(m_c-m_u)^2, \tag{28.4.4}$$

с коэффициентом пропорциональности того же порядка, что и в выражении (28.4.3). Хорошо известно, что при разумных предположениях о том, как вычислять амплитуду $K^0-\bar{K}^0$ перехода, исходя из амплитуды $d_L\bar{s}_L \to s_L\bar{d}_L$, амплитуда, отвечающая рис. 28.2, дает результат, находящийся в хорошем согласии с экспериментом. (На самом деле, еще до открытия c-кварка Гайар и Ли [13] использовали этот расчет для предсказания того, что $m_c \approx 1,5$ ГэВ.) Следовательно, кажется разумным требование, чтобы результат обмена скварком (28.4.3) был бы меньше, чем результат обмена кварком (28.4.4). Это приводит к условию

$$\left|\sum_i V_{di}V_{si}^*\frac{\Delta M_i^2}{\tilde{M}^2}\right| < \frac{g^2\sin\theta_c\cos\theta_c}{g_s^2}\frac{(m_c-m_u)\tilde{M}}{m_W^2}. \tag{28.4.5}$$

Беря значения $g^2/4\pi = 0{,}036$, $g_s^2/4\pi = 0{,}118$, $\sin\theta_c = 0,22$, $m_W = 80{,}4$ ГэВ, $m_c = 1{,}5$ ГэВ и $m_u \ll m_c$, получим

$$\left|\sum_i V_{di}V_{si}^*\frac{\Delta M_i^2}{\tilde{M}^2}\right| < 1{,}5\times 10^{-3}\times(\tilde{M}/100\ \text{ГэВ}). \tag{28.4.6}$$

Не похоже, чтобы массы скварков были много меньше, чем $m_{\text{глюино}}$, так что можно заключить, что либо массы скварков расщеплены не более чем в отношении один к 10^3, либо недиагональные копоненты матрицы смешивания V_{ji} меньше, чем 10^{-3}, либо скварки тяжелее, чем 10 ТэВ, или мы имеем некоторую комбинацию почти вырожденных скварков, почти нулевых углов смешивания и тяжелых скварков. Сам по себе, этот результат лишь накладывает ограничения на суперпартнеров $\mathcal{D}_i$ левых кварков зарядом $-e/3$, но аналогичные ограничения на массы и углы смешивания $\bar{\mathcal{D}}_i$-скварков могут быть получены при рассмотрении амплитуды перехода $d_R\bar{s}_R \to s_R\bar{d}_R$. Мы можем также получить несколько более слабые ограничения на массы и углы

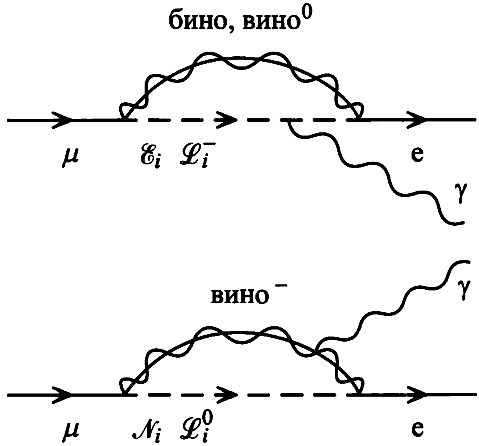

Рис. 28.3. Однопетлевые диаграммы распада $\mu \to e + \gamma$. Здесь сплошные линии отвечают лептонам, пунктирные линии — слептонам, объединенные волнистые и сплошные линии — калибрино, а волнистые линии — фотонам.

смешивания для скварков $\mathscr{U}_i$, рассматривая амплитуды, порожденные обменом вино, а не глюино. Следует, однако, заметить, что эти аргументы не налагают ограничений на разность масс скварков различных зарядов, или на разность масс суперпартнеров $\mathscr{Q}_i$ и $\bar{\mathscr{Q}}_i$ левых кварков и антикварков.

Ожидается, что так же, как и для скварков, слептоны определенной массы будут недиагональными линейными комбинациями суперпартнеров лептонов. Это приводит к распаду $\mu \to e + \gamma$ за счет диаграмм, подобных изображенной на рис. 28.3. Экспериментальный верхний предел $4{,}9 \times 10^{-11}$ на относительную вероятность этого распада устанавливает предел порядка 10^{-3} на частичное расщепление масс слептонов одинакового заряда, но разных поколений, для общих углов смешивания, либо на углы смешивания невырожденных слептонов [14].

Были предприняты попытки объяснить вырождение слептонов и скварков с помощью калибровочной симметрии, связывающей различные поколения [14a]. В разделе 28.6 мы опишем подход к нарушению суперсимметрии, в котором это вырождение появляется без необходимости налагать такие симметрии.

СР-нарушение

Второй важный класс ограничений, накладываемых благодаря экспериментальной информации об известных частицах, связан с эффектами СР-нарушения, такими, как электрические дипольные моменты нейтрона и электрона [15].

В разделе 21.3 мы видели, что в несуперсимметричной стандартной модели с одним скалярным дублетом эти эффекты довольно малы, если не учитывать потенциально существующую проблему с параметром θ в квантовой хромодинамике, рассмотренную в разделе 23.6. Это происходит из-за того, что, если бы было лишь два поколения кварков и лептонов, то все СР-нарушающие фазы массовой матрицы кварков и лептонов и их взаимодействие с калибровочными бозонами можно было бы включить в определение кварковых и лептонных полей, и хотя есть и третье поколение, его перемешивание с первыми двумя поколениями (по загадочным причинам) весьма мало. (Этот аргумент неприменим к процессам, непосредственно включающим кварки третьего поколения, таким, как $B^0 - \bar{B}^0$ смешивание, которые должны быть измерены на планируемых «B-фабриках».) Следовательно, ожидается [16], что электрический дипольный момент нейтрона в этой простой несуперсимметричной версии стандартной модели должен быть меньше примерно $10^{-30}e$ см, т. е. значительно меньше экспериментального верхнего ограничения $6.3 \times 10^{-26}e$ [16a].

Напротив, в минимальной суперсимметричной стандартной модели в ее наиболее общей форме более чем сотня ее свободных параметров включает в том числе десятки нарушающих СР-симметрию относительных фаз. После выполнения интегрирования по тяжелым суперпартнерам известных частиц, эти относительные фазы порождают некоторое число нарушающих СР-инвариантность эффективных взаимодействий, которые следует добавить к лагранжиану стандартной модели. Те из них, которые обладают минимальной размерностью, и которые по размерным соображениям должны быть, по-видимому, наиболее важными, включают электрические дипольные моменты кварков и лептонов [17], аналогичные нарушающие СР-инвариантность «хромоэлектрические» дипольные моменты, дающие вклад во взаимодействие глюонов с кварками [18], нарушающие СР-симметрию чисто глюонные взаимодействия [19] и нарушающее СР-симметрию взаимодействие самого легкого хиггсовского скаляра с лептонами [20].

В качестве примера рассмотрим хромоэлектрические дипольные моменты кварка, которые в некоторых моделях дают наибольший вклад в электрический дипольный момент нейтрона. Нарушающий СР оператор хромо-

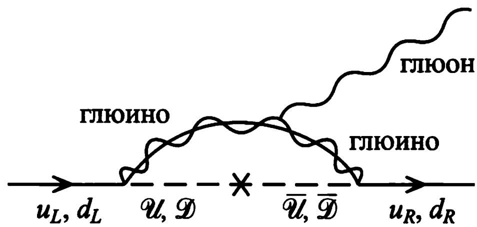

Рис. 28.4. Однопетлевая диаграмма для хромоэлектрического дипольного момента u- или d-кварков. Здесь сплошные линии отвечают кваркам, пунктирные линии — скваркам, объединенные волнистые и сплошные линии — глюино, а волнистая линия — глюону. Косой крестик обозначает вставку билинейного взаимодействия, возникающего из трилинейного взаимодействия скалярного поля в сочетании со спонтанным нарушением $SU(2) \times U(1)$ симметрии. Существуют также диаграммы, в которых глюонная линия прикреплена не к линии глюона, а к одной из внутренних скварковых линий.

электрического дипольного момента равен $(\bar{q}\gamma_5[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\lambda_a q)f_a^{\mu\nu}$ (где q — образующее цветовой триплет поле u- или d-кварков, $f_a^{\mu\nu}$ — тензор напряженности $SU(3)$ поля, а λ_a — 3×3 генераторы $SU(3)$.) Так как $\gamma_5[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ имеет матричные элементы только между $\bar{q}_L$ и q_R или между $\bar{q}_R$ и q_L, то для того, чтобы однопетлевые диаграммы давали вклад в хромоэлектрический дипольный момент, необходимо, чтобы внешняя линия левого u- или d-кварка испускала внутреннюю линию глюино, и превращалась бы в линию, отвечающую $\mathscr{U}$- или $\mathscr{D}$-скварку, которая затем превращалась бы в линию $\bar{\mathscr{U}}^*$ или $\bar{\mathscr{D}}^*$ скварка, и наконец — в линию правого u- или d-кварка поглощением внутренней линии глюино при внешней глюонной линии, присоединенной либо к внутренней глюинной линии, либо к одной из внутренних скварковых линий (рис. 28.4)

Чтобы вычислить это, нужно знать порожденное спонтанным нарушением $SU(2)\times U(1)$ и представленное крестиком на рис. 28.4 смешивание скалярных компонент $\mathscr{U}_i$ (или $\mathscr{D}_i$) левокиральных кварковых суперполей Q_i с комплексно сопряженными полями $\bar{\mathscr{U}}_i^*$ (или $\bar{\mathscr{D}}_i^*$) скалярных компонент левокиральных антикварковых суперполей $\bar{U}_j$ (или $\bar{D}_j$). Часть этого смешивания возникает из вклада суперсимметричного $\mathscr{F}$-члена взаимодействия (28.1.7) в последнее слагаемое в выражении (26.4.7):

$$\mathscr{L}_{\mathscr{Q}\bar{\mathscr{Q}}\mathscr{H}} = -\left|\sum_{ij} h_{ij}^U \mathscr{U}_i \bar{\mathscr{U}}_j + \mu\mathscr{H}_1^0\right|^2 - \left|\sum_{ij} h_{ij}^D \mathscr{D}_i \bar{\mathscr{D}}_j + \mu\mathscr{H}_2^0\right|^2. \quad (28.4.7)$$

Кроме того, дают вклад A- и C-члены в выражении (28.4.1):

$$\mathcal{L}'_{\mathcal{Q}\bar{\mathcal{Q}}\mathcal{H}} = -\sum_{ij} h^D_{ij}\mathcal{D}_i\bar{\mathcal{D}}_j\left[-A^D_{ij}\mathcal{H}^0_1 + C^D_{ij}\mathcal{H}^{0*}_2\right]$$
$$-\sum_{ij} h^U_{ij}\mathcal{U}_i\bar{\mathcal{U}}_j\left[-A^U_{ij}\mathcal{H}^0_2 + C^U_{ij}\mathcal{H}^{0*}_1\right] - \text{э. с.} \tag{28.4.8}$$

Замена нейтральных хиггсовских скалярных полей их вакуумными средними дает квадратичные члены

$$\mathcal{L}'_{\mathcal{Q}\bar{\mathcal{Q}}} = -2\mathrm{Re}\sum_{ij} m^U_{ij}\mathcal{U}_i\bar{\mathcal{U}}^*_j\left(\mu^*\operatorname{ctg}\beta + A^U_{ij} + C^U_{ij}\operatorname{ctg}\beta\right)$$
$$-2\mathrm{Re}\sum_{ij} m^D_{ij}\mathcal{D}_i\bar{\mathcal{D}}_j\left(\mu^*(\operatorname{tg}\beta)^* + A^D_{ij} - C^D_{ij}(\operatorname{tg}\beta)^*\right), \tag{28.4.9}$$

где $m^U_{ij} = \langle\mathcal{H}^0_2\rangle h^U_{ij}$ и $m^D_{ij} = -\langle\mathcal{H}^0_1\rangle h^D_{ij}$ — массовые матрицы кварков зарядом $2e/3$ и $-e/3$, а

$$\operatorname{tg}\beta \equiv \langle\mathcal{H}^0_2\rangle/\langle\mathcal{H}^0_1\rangle^*. \tag{28.4.10}$$

Пренебрегая смешиванием Кабиббо, и полагая для определенности A и C диагональными, получаем, что диаграмма на рис. 28.4 дает вклады в хромоэлектрические дипольные моменты u- и d-кварков вида

$$d^{ce}_u = \frac{g_s^3}{16\pi^2}\mathrm{Im}\left[m_u A'_u I(m_{\mathcal{U}}, m_{\bar{\mathcal{U}}}, m_{\text{глюино}})\right], \tag{28.4.11}$$

$$d^{ce}_d = \frac{g_s^3}{16\pi^2}\mathrm{Im}\left[m_d A'_d I(m_{\mathcal{D}}, m_{\bar{\mathcal{D}}}, m_{\text{глюино}})\right], \tag{28.4.12}$$

где

$$A'_u \equiv (\mu^* + C_u)\operatorname{ctg}\beta + A_u, \quad A'_d \equiv (\mu^* - C_d)(\operatorname{tg}\beta)^* + A_d, \tag{28.4.13}$$

а I — сложная безразмерная функция своих аргументов, возникающая из интегрирования по виртуальному 4-импульсу. При $m_{\mathcal{Q}} \approx m_{\bar{\mathcal{Q}}}$ и при определении поля глюино так, чтобы сделать $m_{\text{глюино}}$ и $m_{\bar{\mathcal{Q}}}$ действительными, функция I принимает вид

$$I(m_{\mathcal{D}}, m_{\bar{\mathcal{D}}}, m_{\text{глюино}}) = m^{-3}_{\text{глюино}} J\left(\frac{m^2_{\text{глюино}}}{m^2_{\mathcal{Q}} - m^2_{\text{глюино}}}\right), \tag{28.4.14}$$

где [21]

$$J(z) = 2(-z^4 + \frac{4}{3}z^3 + z^2)\ln\left(\frac{1+z}{z}\right) + 2z^3 - \frac{11}{3}z^2. \tag{28.4.15}$$

Трудная часть вычислений такого рода всегда заключается в оценке вклада от оператора, подобного взаимодействию хромоэлектрического диполя с адронными матричными элементами, такими, как электрический дипольный момент нейтрона. Можно предвидеть, что потребуются ренормгрупповые поправки, так как этот оператор должен использоваться при энергиях порядка массы нейтрона, а не порядка масс скварков и глюино. Более важно просто правильно собрать размерные множители и множители 4π. Для этой цели обычно используют правило подсчета [22], известное как «наивный размерный анализ». Связная диаграмма с числом вершин V_i типа i и числом внутренних линий I будет иметь некоторое число петель L, задаваемое соотношением $L = I - \sum_i V_i + 1$. Если N_i линий прикреплены к вершине типа i и диаграмма в целом имеет N внешних линий, то $2I + N = \sum_i V_i N_i$, так что

$$L = 1 - \frac{N}{2} + \sum_i V_i \left(\frac{N_i}{2} - 1\right).$$

Мы ожидаем возникновения множителя порядка $1/16\pi^2$ для каждой петли, так что коэффициент при операторе $\mathscr{O}$ в низкоэнергетическом эффективном лагранжиане с N множителями полей будет содержать общий множитель

$$(4\pi)^{N-2} \prod_i (4\pi)^{(2-N_i)V_i}.$$

Если оператор $\mathscr{O}$ обладает размерностью d, а взаимодействия $\mathscr{O}_i$ типа i имеют размерности d_i, то коэффициент при $\mathscr{O}$ будет иметь размерность $4 - d - \sum_i (4 - d_i)$, поэтому этот коэффициент будет также содержать множитель $M^{4-d} \prod_i M^{d_i - 4}$, где M — некоторый типичный для адронной физики масштаб, например, масса нуклона или энергия $2\pi F_\pi \simeq 1200$ МэВ, при которой начинают нарушаться низкоэнергетические разложения, обсуждавшиеся в разделе 19.5. Окончательно, вклад в коэффициент $\mathscr{O}$ от некоторой диаграммы будет, конечно, пропорционален взаимодействиям всех операторов $\mathscr{O}_i$, ассоциированных с вершинами в графе. Удобно суммировать все эти замечания, введя «приведенную константу взаимодействия». По определению, приведенная константа взаимодействия, связанная с любым оператором $\mathscr{O}_i$, в который входят N_i полей, имеющим размерность d_i и константу взаимодействия g_i, равна

$$g_i^{\text{приведенная}} \equiv g_i (4\pi)^{2-N_i} M^{\mathscr{D}_i - 4}. \tag{28.4.16}$$

Сделанные выше оценки позволяют сформулировать правило наивного размерного анализа: приведенная константа взаимодействия любого оператора $\mathscr{O}$ в эффективном адронном лагранжиане грубо равна произведению приведенных констант тех взаимодействий, которые дают вклад в эту эффективную константу.

Электрический дипольный момент нейтрона является коэффициентом оператора с одним фотонным и двумя нейтронными полями и имеет размерность пять, так что его приведенная константа взаимодействия равна $Md_n^e/4\pi$. Подобно этому, хромоэлектрический магнитный момент кварка имеет приведенную константу взаимодействия $Md_q^{ce}/4\pi$. В дополнение к одной степени этой приведенной константы взаимодействия, приведенная константа взаимодействия оператора электрического дипольного момента нейтрона должна также вносить одну степень приведенной константы взаимодействия $e/4\pi$ электромагнитного взаимодействия и неопределенное число степеней приведенной константы взаимодействия $g_s/4\pi$, которые *при низкоэнергетическом масштабе M* не слишком отличаются от единицы и, следовательно, могут не приниматься во внимание. Взяв вклад d-кварка в качестве образца для вкладов обоих u- и d-кварков, получим

$$d_n^e \approx \frac{ed_d^{ce}}{4\pi} \approx e\left(\frac{g_s}{4\pi}\right)^3 \mathrm{Im}\left[m_d A_d'\right] I(m_{\mathscr{D}}, m_{\tilde{\mathscr{D}}}, m_{\text{глюино}}). \tag{28.4.17}$$

Дальнейшее упрощение связано с наложением условия $m_{\text{глюино}} \simeq m_{\mathscr{D}} \simeq m_{\tilde{\mathscr{D}}}$, так что $J = 7/18$. Взяв величину $g_s/4\pi$, при масштабе масс глюино и скварков тому же значению 0,12, что и при m_Z, а $|m_d| \approx 7$ МэВ, имеем тогда

$$|d_n^e| \approx 0.5 \times 10^{-23} e \text{ см } \frac{|A_d'||\sin\varphi| \times (100 \text{ ГэВ})^2}{m^3_{\text{глюино}}}, \tag{28.4.18}$$

где φ — фаза A_d' при условии, что массы глюино, кварка и скварка взяты действительными. Вклад электрического дипольного момента кварка несколько больше, а вклад чисто глюонного CP-нечетного оператора значительно меньше [23].

Чтобы избежать противоречия с экспериментальной верхней границей $0,97 \times 10^{-25} e$ см, следует считать, что либо часть, связанная с CP-нарушением в суперсимметричной стандартной модели, должна быть меньше 10^{-2}, либо некоторые из новых частиц модели должны быть тяжелее примерно 1 ТэВ. Аналогичные заключения были получены из вычислений электрических дипольных моментов атомов и молекул [23]. Еще более жесткие ограничения на нарушающие CP фазы были получены [24] из рассмотрения вклада диаграммы, изображенной на рис. 28.1, в один точно измеренный эффект нарушения CP-инвариантности — мнимую часть амплитуды $K^0 - \bar{K}^0$ осцилляций.

28.5. Сектор с нулевыми барионным и лептонным числами

Несмотря на большое число параметров суперсимметричной стандартной модели, в некоторых случаях она обладает удивительно большой предсказательной силой. Это верно, в частности, когда мы рассматриваем скалярные поля, вакуумные средние которых спонтанно нарушают $SU(2)\times U(1)$ калибровочную симметрию. В этом разделе мы рассмотрим эти скаляры, наряду с другими полями, имеющими нулевые лептонное и барионное числа: нечетные относительно зарядового сопряжения нейтральные скаляры, заряженные скаляры, и фермионные суперпартнеры этих скаляров и $W^{\pm}$ и Z.

Критическим требованием для суперсимметричных версий стандартной модели является то, что они должны содержать скалярный дублет «хиггсовских» суперполей с правильными массой и параметрами взаимодействия, учитывающими нарушение $SU(2)\times U(1)$ калибровочной группы электромагнитных и слабых взаимодействий. Мы видели в разделе 28.1 что для придания масс кваркам зарядом $2e/3$ и $-e/3$ и заряженным лептонам необходимы по крайней мере два левых скалярных дублета, тогда как в разделе 28.2 мы обнаружили, что два дублета — именно то, что необходимо для слияния констант $SU(3)$, $SU(2)$ и $U(1)$ калибровочных взаимодействий при некоторой очень высокой энергии. Следовательно, предположим, что имеются два левых скалярных $SU(2)$-дублета

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}. \tag{28.5.1}$$

Они имеют $SU(2)$ и $U(1)$ D-члены (27.4.7), задаваемые (если считать константу Файе-Илиопулоса $\xi_{U(1)}$ равной нулю) в виде

$$\vec{D} = \frac{g}{2}(\mathscr{H}_1^\dagger \vec{\tau} \mathscr{H}_1) + \frac{g}{2}(\mathscr{H}_2^\dagger \vec{\tau} \mathscr{H}_2), \tag{28.5.2}$$

$$D_y = \frac{g'}{2}(\mathscr{H}_1^\dagger \mathscr{H}_1) + \frac{g'}{2}(\mathscr{H}_2^\dagger \mathscr{H}_2), \tag{28.5.3}$$

где $\mathscr{H}_{1,2}$ — скалярные компоненты дублетов суперполей $H_{1,2}$, а τ_r — матрицы Паули, причем $\tau_r^2 = 1$. Как видно из выражения (27.4.9), в перенормируемой теории это дает вклад D-члена в потенциал скалярного поля

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{1}{2}\vec{D}^2 + \frac{1}{2}D_y^2 \\ &= \frac{g^2}{8}\left[(\mathscr{H}_1^\dagger \vec{\tau} \mathscr{H}_1) + (\mathscr{H}_2^\dagger \vec{\tau} \mathscr{H}_2)\right]^2 + \frac{g'^2}{8}\left[(\mathscr{H}_1^\dagger \mathscr{H}_1) + (\mathscr{H}_2^\dagger \mathscr{H}_2)\right]^2. \end{aligned} \tag{28.5.4}$$

Можно выразить это в более удобной форме при помощи соотношения

$$(\vec{\tau})_{i\ell}\cdot(\vec{\tau})_{kj}=2\delta_{ij}\delta_{k\ell}-\delta_{i\ell}\delta_{kj} \tag{28.5.5}$$

(Для доказательства используем инвариантность относительно вращений, чтобы показать, что $\delta_{ij}\delta_{k\ell}$ может быть выражена как линейная комбинация $(\vec{\tau})_{i\ell}\cdot(\vec{\tau})_{kj}$ и $\delta_{i\ell}\delta_{kj}$, и вычислим коэффициенты путем взятия следов по индексам i,j и i,ℓ.) Таким образом, можно переписать часть D-члена в потенциале скалярного поля как

$$V_D=\frac{g^2}{2}\left|(\mathscr{H}_1^\dagger\mathscr{H}_2)\right|^2+\frac{g^2+g'^2}{8}\left[(\mathscr{H}_1^\dagger\mathscr{H}_1)-(\mathscr{H}_2^\dagger\mathscr{H}_2)\right]^2. \tag{28.5.6}$$

Как упоминалось в разделе 28.1, для этих двух дублетов существует только один возможный перенормируемый член в суперпотенциале вида

$$f(H_1,H_2)=\mu(H_1^{\mathrm{T}}eH_2), \tag{28.5.7}$$

где μ — константа размерностью массы, а e — антисимметричная матрица $i\tau_2$. Согласно выражению (27.4.9), это дает дополнительный вклад в потенциал скалярного поля

$$\begin{aligned}V_\mu&=\sum_r\left|\frac{\partial f(\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2)}{\partial\mathscr{H}_{1r}}\right|^2+\sum_r\left|\frac{\partial f(\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2)}{\partial\mathscr{H}_{2r}}\right|^2\\&=|\mu|^2\left[(\mathscr{H}_1^\dagger\mathscr{H}_1)+(\mathscr{H}_2^\dagger\mathscr{H}_2)\right].\end{aligned} \tag{28.5.8}$$

При $\mu\neq 0$ потенциал V_D+V_μ, очевидно, имеет минимальное значение нуль, достигаемое в единственной точке $\mathscr{H}_1=\mathscr{H}_2=0$. Только за счет этих членов в потенциале $SU(2)\times U(1)$, а также суперсимметрия, спонтанно не нарушаются. (Случай $\mu=0$ не намного лучше; существует бесконечное множество вакуумных состояний с ненарушенной суперсимметрией и с $SU(2)\times U(1)$ симметрией, нарушенной до электромагнитной калибровочной инвариантности со всеми возможными константами, включая нуль.) Это еще один пример общей трудности, с которой мы уже сталкивались в разделе 28.3, — формулировки реалистических теорий, в которых суперсимметрия спонтанно нарушается в рамках стандартной модели.

При сделанных в предыдущем разделе предположениях о том, что суперсимметрия нарушается в эффективном лагранжиане только суперперенормируемыми членами, наиболее общий из таких нарушающих суперсимметрию членов, включающих скалярные дублеты, имеет вид

$$V_m=m_1^2(\mathscr{H}_1^\dagger,\mathscr{H}_1)+m_2^2(\mathscr{H}_2^\dagger,\mathscr{H}_2)+\mathrm{Re}\{B\mu(\mathscr{H}_1^{\mathrm{T}}e\mathscr{H}_2)\}.$$

где m_1^2 и m_2^2 — действительные параметры (не обязательно положительные), а $B\mu$ — параметр произвольной фазы. Подберем *общую* фазу суперполей H_1 и H_2 так, чтобы $B\mu$ было действительным и положительным, тогда

$$V_m = m_1^2(\mathcal{H}_1^\dagger, \mathcal{H}_1) + m_2^2(\mathcal{H}_2^\dagger, \mathcal{H}_2) + B\mu \mathrm{Re}(\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}} e \mathcal{H}_2). \tag{28.5.9}$$

Полный скалярный потенциал в древесном приближения тогда равен

$$\begin{aligned} V &= V_D + V_\mu + V_m \\ &= \frac{g^2}{2}\left|(\mathcal{H}_1^\dagger \mathcal{H}_2)\right|^2 + \frac{g^2+g'^2}{8}\left[(\mathcal{H}_1^\dagger \mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_2^\dagger \mathcal{H}_2)\right]^2 \\ &\quad + (m_1^2 + |\mu|^2)(\mathcal{H}_1^\dagger \mathcal{H}_1) + (m_2^2 + |\mu|^2)(\mathcal{H}_2^\dagger \mathcal{H}_2) \\ &\quad + B\mu \mathrm{Re}(\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}} e \mathcal{H}_2). \end{aligned} \tag{28.5.10}$$

Заметим, в частности, что μ^2, m_1^2, m_2^2 входят только в комбинациях $m_1^2 + |\mu|^2$ и $m_2^2 + |\mu|^2$.

Существует одно условие на нарушающие суперсимметрию параметры m_i^2, вытекающие из требования, чтобы потенциал был ограничен снизу. Для скалярных полей бесконечно растущих в произвольных направлениях, в потенциале доминируют положительные четвертичные члены V_D. Есть специальные направления, вдоль которых V_D исчезают: такие, для которых (с точностью до $SU(2)\times U(1)$ калибровочных преобразований)

$$H_1 = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix},$$

с произвольной комплексной величиной φ.. Для таких направлений $V = (2|\mu|^2 + m_1^2 + m_2^2)|\varphi|^2 - B\mu\varphi^2$, поэтому (так как $B\mu$ было определено положительным) для того, чтобы это V не стремилось к $-\infty$ при $\varphi \to +\infty$, необходимо, чтобы

$$2|\mu|^2 + m_1^2 + m_2^2 \geqslant B\mu. \tag{28.5.11}$$

Мы хотим найти минимум потенциала, в котором электромагнитная калибровочная инвариантность не нарушена, так что рассмотрим поведение потенциала как функцию нейтральных скалярных полей, а заряженные скалярные поля положим равными нулю. В таком случае выражение (28.5.10) дает потенциал нейтральных скаляров в виде

$$\begin{aligned} V^{\mathrm{N}} = &\frac{g^2+g'^2}{8}\left[|\mathcal{H}_1^0|^2 - |\mathcal{H}_2^0|^2\right] + (m_1^2 + |\mu|^2)|\mathcal{H}_1^0|^2 \\ &+ (m_2^2 + |\mu|^2)|\mathcal{H}_2^0|^2 - B\mu \mathrm{Re}(\mathcal{H}_1^0 \mathcal{H}_2^0). \end{aligned} \tag{28.5.12}$$

Чтобы найти стационарную точку, разложим $V^{\rm N}$ в окрестности постоянных значений $\mathcal{H}_i^0 = v_i$, записав

$$\mathcal{H}_i^0 = v_i + \phi_i. \tag{28.5.13}$$

С точностью до второго порядка по ϕ_i, формула (28.5.12) дает

$$\begin{aligned}
V^{\rm N}_{\text{квадр}} =& \frac{g^2+g'^2}{4}(|v_1|^2-|v_2|^2)\Big[2\,\mathrm{Re}(v_1^*\phi_1 - v_2^*\phi_2) + |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2\Big] \\
&+ \frac{g^2+g'^2}{2}\Big[2\,\mathrm{Re}(v_1^*\phi_1 - v_2^*\phi_2)\Big]^2 + (m_1^2+|\mu|^2)\Big(2\,\mathrm{Re}\, v_1^*\phi_1 + |\phi_1|^2\Big) \\
&+ (m_2^2+|\mu|^2)\Big(2\,\mathrm{Re}\, v_2^*\phi_2 + |\phi_2|^2\Big) - B\mu\,\mathrm{Re}\Big(v_1\phi_2 + v_2\phi_1 + \phi_1\phi_2\Big) \\
&+ \text{константа}.
\end{aligned} \tag{28.5.14}$$

Чтобы v_i были точками равновесия полей, члены первого порядка по ϕ_i должны обратиться в нуль

$$(m_1^2+|\mu|^2)v_1^* + \frac{g^2+g'^2}{4}(|v_1|^2+|v_2|^2)v_1^* - \frac{1}{2}B\mu v_2 = 0, \tag{28.5.15}$$

$$(m_2^2+|\mu|^2)v_2^* + \frac{g^2+g'^2}{4}(|v_1|^2+|v_2|^2)v_2^* - \frac{1}{2}B\mu v_1 = 0. \tag{28.5.16}$$

Не меняя общую фазу полей ϕ_i, можно подобрать их относительные фазы так, что v_1 станет действительным. Тогда соотношения (28.5.15) и (28.5.16) показывают, что v_2 также действительно, так что эти уравнения принимают вид

$$(m_1^2+|\mu|^2)v_1 + \frac{g^2+g'^2}{4}(v_1^2 - v_2^2)v_1 - \frac{1}{2}B\mu v_2 = 0, \tag{28.5.17}$$

$$(m_2^2+|\mu|^2)v_2 + \frac{g^2+g'^2}{4}(v_1^2 - v_2^2)v_2 - \frac{1}{2}B\mu v_1 = 0. \tag{28.5.18}$$

Эти условия могут быть использованы, чтобы выразить массовые параметры в потенциале через удобные величины

$$\mathrm{tg}\,\beta \equiv v_2/v_1, \tag{28.5.19}$$

$$m_Z^2 = \frac{1}{2}(g^2+g'^2)(v_1^2+v_2^2), \tag{28.5.20}$$

и

$$m_A^2 \equiv 2|\mu|^2 + m_1^2 + m_2^2. \tag{28.5.21}$$

(Параметр m_Z — масса векторного бозона Z*. Мы скоро увидим, что m_A — масса одного из физических скаляров.) Домножая формулы (28.5.17) и (28.5.18), соответственно на v_2 и v_1, и беря разность и сумму, получаем

$$B\mu = m_A^2 \sin 2\beta, \tag{28.5.22}$$

и

$$m_1^2 - m_2^2 = -(m_A^2 + m_Z^2)\cos 2\beta, \tag{28.5.23}$$

что вместе с уравнением (28.5.21) дает

$$m_1^2 + |\mu|^2 = \frac{1}{2}m_A^2 - \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\cos 2\beta, \quad m_2^2 + |\mu|^2 = \frac{1}{2}m_A^2 + \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\cos 2\beta. \tag{28.5.24}$$

После сокращения линейных членов, квадратичная часть (28.5.14) нейтрального скалярного потенциала может быть записана в виде

$$\begin{aligned} V^{\rm N}_{\text{квадр}} &= \frac{g^2+g'^2}{4}(v_1^2 - v_2^2)\Big[|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2\Big] + \frac{g^2+g'^2}{2}\Big[\mathrm{Re}(v_1\phi_1 - v_2\phi_2)\Big]^2 \\ &\quad + (m_1^2 + |\mu|^2)|\phi_1|^2 + (m_2^2 + |\mu|^2)|\phi_2|^2 - B\mu\,\mathrm{Re}(\phi_1\phi_2) + \text{константа} \\ &= \frac{1}{2}m_Z^2\cos 2\beta\Big[|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2\Big] + m_Z^2\Big[\mathrm{Re}(\cos\beta\phi_1 - \sin\beta\phi_2)\Big]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m_A^2\Big(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2\Big) - \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\cos 2\beta\Big[|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2\Big] \\ &\quad - m_A^2\sin 2\beta\,\mathrm{Re}(\phi_1\phi_2) + \text{константа}. \end{aligned} \tag{28.5.25}$$

Мы видим из формулы (28.5.25), что действительная и мнимая части ϕ_i расцеплены. (Это произошло из-за того, что потенциал (28.5.12) инвариантен относительно зарядового сопряжения или CP-преобразования $\phi_i \to \phi_i^*$.) Матрица квадратов масс мнимых частей ϕ_i есть

$$M^2_{\mathrm{Im}\phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m_A^2(1-\cos 2\beta) & \frac{1}{2}m_A^2\sin 2\beta \\ \frac{1}{2}m_A^2\sin 2\beta & \frac{1}{2}m_A^2(1+\cos 2\beta) \end{pmatrix}. \tag{28.5.26}$$

Детерминант обращается в нуль, поэтому одно собственное значение равно нулю, а остальные равны следу, который равен m_A^2. Скаляр нулевой массы — это, конечно, нейтральный голдстоуновский бозон, связанный со спонтанным нарушением $SU(2)\times U(1)$ до электромагнитной калибровочной инвариантности, и, как обсуждалось в главе 21, он устраняется механизмом

---

*Поскольку скалярные поля нормированы здесь и в разделе 21.3 по-разному, между формулами для m_Z^2, приведенными в выражениях (28.5.20) и (21.3.30) есть различие на множитель 2.

Хиггса. Как и было обещано, m_A — масса одного из физических скаляров, неголдстоуновского бозона с отрицательным C. Это показывает, что для того, чтобы значения поля $\phi_i = v_i$ было по крайней мере локальным минимумом потенциала, определенный в (28.5.21) параметр m_A^2 должен быть положительным. Условие хорошего поведения при больших напряженностях поля (28.5.11) демонстрирует, что уравнение (28.5.22) имеет решение при β в диапазоне $0 \leqslant \beta \leqslant \pi/2$.

В частности, если $B\mu = 0$ и $0 < \beta < \pi/2$, тогда выражение (28.5.22) показывает, что $m_A = 0$. В этом случае частица A — голдстоуновский бозон $U(1)$ симметрии Печчеи–Квинна [4] потенциала (28.5.12) относительно одинакового изменения фазы $\mathcal{H}_1^0$ и $\mathcal{H}_2^0$, которая при $v_1 \neq 0$ и $v_2 \neq 0$ спонтанно нарушается, не сохраняя ненарушенной ни одной комбинации этой и электрослабой $U(1)$ симметрии. Это — первоначальная версия аксиона [25], который, как мы видели в разделе 23.6, приобретает только малую массу за счет юкавских взаимодействий скаляров с кварками, и эта версия экспериментально исключена. Следовательно, мы заключаем, что величина $B\mu$ определенно не равна нулю.

Элементы матрицы квадратов масс для действительных скаляров даются выражением (28.5.25) в виде

$$\begin{aligned}
\left(M^2_{\mathrm{Re}\phi}\right)_{11} &= \frac{1}{2}m_A^2(1-\cos 2\beta)+\frac{1}{2}m_Z^2(1+\cos 2\beta),\\
\left(M^2_{\mathrm{Re}\phi}\right)_{12} &= \left(M^2_{\mathrm{Re}\phi}\right)_{21} = -\frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2)\sin 2\beta, \qquad (28.5.27)\\
\left(M^2_{\mathrm{Re}\phi}\right)_{22} &= \frac{1}{2}m_A^2(1+\cos 2\beta)+\frac{1}{2}m_Z^2(1-\cos 2\beta).
\end{aligned}$$

Решение секулярного уравнения дает собственные значения

$$m_H^2 = \frac{1}{2}\left[m_A^2+m_Z^2+\sqrt{(m_A^2+m_Z^2)^2-4m_A^2m_Z^2\cos^2 2\beta}\right], \qquad (28.5.28)$$

$$m_h^2 = \frac{1}{2}\left[m_A^2+m_Z^2-\sqrt{(m_A^2+m_Z^2)^2-4m_A^2m_Z^2\cos^2 2\beta}\right]. \qquad (28.5.29)$$

Чтобы вычислить массы заряженных скаляров, получим потенциал

$$\mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \mathcal{H}_1^- \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_2^+ \\ v_2 \end{pmatrix}. \qquad (28.5.30)$$

Подставляя это в формулу (28.5.10), получаем квадратичную часть потенциала заряженного скаляра

$$V^C_{\text{квадр}} = \frac{g^2}{2}\left|v_2(\mathscr{H}_1^-)^* + v_1\mathscr{H}_2^+\right|^2 + \frac{g^2+g'^2}{4}(v_1^2 - v_2^2)\left(|\mathscr{H}_1^-|^2 - |\mathscr{H}_2^+|^2\right) + (m_1^2 + |\mu|^2)|\mathscr{H}_1^-|^2 + (m_2^2 + |\mu|^2)|\mathscr{H}_2^+|^2 + B\mu\mathscr{H}_1^-\mathscr{H}_2^+. \qquad (28.5.31)$$

Используя формулы (28.5.22) и (28.5.24), можно переписать это как

$$V^C_{\text{квадр}} = \frac{1}{2}(m_W^2 + m_A^2)\left[|\mathscr{H}_1^-|^2(1-\cos 2\beta) + |\mathscr{H}_2^+|^2(1+\cos 2\beta) + 2\sin 2\beta\,\mathscr{H}_1^-\mathscr{H}_2^+\right], \qquad (28.5.32)$$

где m_W — масса заряженного калибровочного бозона

$$m_W^2 = \frac{1}{2}g^2\left(|v_1|^2 + |v_2|^2\right). \qquad (28.5.33)$$

Тогда матрица квадратов масс заряженных скаляров равна:

$$M_C^2 = \frac{1}{2}(m_W^2 + m_A^2)\begin{pmatrix} 1-\cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & 1+\cos 2\beta \end{pmatrix}. \qquad (28.5.34)$$

Она имеет нулевой детерминант, так что одно собственное значение равно нулю, а другое — следу

$$m_C^2 = m_W^2 + m_A^2. \qquad (28.5.35)$$

Заряженный скаляр нулевой массы — это, конечно, еще один голдстоуновский бозон, связанный со спонтанным нарушением $SU(2)\times U(1)$, и, как и нейтральный голдстоуновский бозон, найденный раньше, он исключается механизмом Хиггса.

Даже при неизвестных параметрах m_A и β, эти результаты многое говорят об относительных величинах масс скалярных бозонов. Можно переписать (28.5.28) и (25.5.29) в форме

$$m_H^2 = \frac{1}{2}\left[m_A^2 + m_Z^2 + \sqrt{(m_A^2 - m_Z^2)^2 + 4m_A^2 m_Z^2 \sin^2 2\beta}\right], \qquad (28.5.36)$$

$$m_h^2 = \frac{1}{2}\left[m_A^2 + m_Z^2 - \sqrt{(m_A^2 - m_Z^2)^2 + 4m_A^2 m_Z^2 \sin^2 2\beta}\right], \qquad (28.5.37)$$

Мы видим, что *более тяжелая масса нейтрального скаляра m_H больше, чем бо́льшая из масс m_Z и m_A, в то время как самая легкая масса нейтрального скаляра m_h меньше, чем меньшая из масс m_Z и m_A*. Если большое отношение масс t-кварка и b-кварка вызвано скорее большим отношением $v_2/v_1 = \operatorname{tg}\beta$ вакуумных средних скалярных полей, а не большим отношением юкавских констант взаимодействия, то можно ожидать, что β близко к $\pi/2$, и в таком случае эти неравенства становятся приближенными равенствами. Далее, (28.5.35) показывает, что *масса заряженного скаляра больше, чем массы m_A и m_W.*

Эти результаты количественно модифицируются различными радиационными поправками *в рамках* стандартной модели (в отличие от эффектов радиационных поправок, которые порождают входные параметры m_i^2 в теориях с вызванным калибровочными полями спонтанным нарушением суперсимметрии.) Наиболее важные поправки возникают из-за наличия в скалярном потенциале V слагаемых, определяемых диаграммами, включающими одну петлю с t- или b-кварками, взаимодействующими произвольное число раз с линиями внешних скалярных полей. Это происходит потому, что t- и b-кварки гораздо сильнее взаимодействуют с $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_1$ соответственно. (Здесь разумно включить кварковые петли с t- и b-кварками потому, что, как упоминалось выше, бóльшая масса t-кварка может скорее определяться большим отношением v_2/v_1, чем большим отношением юкавских констант взаимодействия, но даже в этом случае мы увидим, что доминирующие поправки происходят от петель t-кварка.)

Для начала рассмотрим нейтральные скаляры, по крайней мере, один из которых в отсутствие радиационных поправок легче, чем Z-бозон. Эффект этих t- и b-петель сводится к возникновению в V^n вклада вида $U_t(|\mathcal{H}_2^0|^2) + U_b(|\mathcal{H}_1^0|^2)$. Мы включим все члены из U_t и U_b, линейные по $|\mathcal{H}_1^0|^2 - v_1^2$ или $|\mathcal{H}_2^0|^2 - v_2^2$, во входные параметры m_1^2 и m_2^2, так что

$$U_b'(v_1^2) = U_t'(v_2^2) = 0. \tag{28.5.38}$$

Наши предыдущие результаты (28.5.24) и(28.5.22) для $m_1^2 + |\mu|^2$, $m_2^2 + |\mu|^2$ и $B\mu$ останутся тогда неизменными. Кроме того, массовая матрица для C-нечетных нейтральных скаляров опять задается уравнением (28.5.26). С другой стороны, элементы матрицы квадратов масс для C-четных нейтральных скаляров теперь имеют вид

$$\begin{aligned}
\left(M^2_{\mathrm{Re}\phi}\right)_{11} &= \frac{1}{2}m_A^2(1-\cos 2\beta) + \frac{1}{2}m_Z^2(1+\cos 2\beta) + \Delta_b,\\
\left(M^2_{\mathrm{Re}\phi}\right)_{12} &= \left(M^2_{\mathrm{Re}\phi}\right)_{21} = -\frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\sin 2\beta,\\
\left(M^2_{\mathrm{Re}\phi}\right)_{22} &= \frac{1}{2}m_A^2(1+\cos 2\beta) + \frac{1}{2}m_Z^2(1-\cos 2\beta) + \Delta_t,
\end{aligned} \tag{28.5.39}$$

где

$$\Delta_b = 2v_1^2 U_b''(v_1^2), \qquad \Delta_t = 2v_2^2 U_t''(v_2^2). \tag{28.5.40}$$

Тогда решения секулярного уравнения имеют вид

$$
\begin{aligned}
m_H^2 =& \frac{1}{2}\Big[m_A^2 + m_Z^2 + \Delta_t + \Delta_b + \\
&+ \sqrt{\left((m_A^2 - m_Z^2)\cos 2\beta + \Delta_t - \Delta_b\right)^2 + (m_A^2 + m_Z^2)^2 \sin^2 2\beta}\Big],
\end{aligned} \tag{28.5.41}
$$

$$
\begin{aligned}
m_h^2 =& \frac{1}{2}\Big[m_A^2 + m_Z^2 + \Delta_t + \Delta_b + \\
&+ \sqrt{\left((m_A^2 - m_Z^2)\cos 2\beta + \Delta_t - \Delta_b\right)^2 + (m_A^2 + m_Z^2)^2 \sin^2 2\beta}\Big],
\end{aligned} \tag{28.5.42}
$$

Обсуждая вопрос о поиске этих частиц, важно заметить, что масса легкого хиггсовского бозона m_h возрастает с ростом неизвестной массы m_A, достигая конечного верхнего предела при $m_A \to \infty$:

$$
m_h \leqslant m_h(m_A \to \infty) = m_Z^2 \cos^2 2\beta + \Delta_t \sin^2\beta + \Delta_b \cos^2\beta. \tag{28.5.43}
$$

Чтобы вычислить Δ_b и Δ_t, напомним результат из раздела 16.2, что потенциалы U_b и U_t задаются как

$$
U_b(|\mathscr{H}_1^0|^2) = -\frac{3}{16\pi^2}|\lambda_b \mathscr{H}_1^0|^4 \left[\ln\frac{|\lambda_b \mathscr{H}_1^0|^2}{M_{sb}^2} - \frac{3}{2}\right] + \text{линейные члены}, \tag{28.5.44}
$$

$$
U_t(|\mathscr{H}_2^0|^2) = -\frac{3}{16\pi^2}|\lambda_t \mathscr{H}_2^0|^4 \left[\ln\frac{|\lambda_t \mathscr{H}_2^0|^2}{M_{st}^2} - \frac{3}{2}\right] + \text{линейные члены}, \tag{28.5.45}
$$

где $\lambda_t = m_t/v_2$ и $\lambda_b = m_b/v_1$ — константы юкавского взаимодействия для t- и b-кварков; M_{st} и M_{sb} — массы скалярных суперпартнеров t- и b-кварков; эти массы и слагаемые $(-3/2)$ внутри квадратных скобок выбраны, чтобы удовлетворить условию, что нарушающие суперсимметрию поправки, соответствующие st- и sb-петлям, сокращали бы поправки, соответствующие t- и b-петлям, если бы массы были равны, «линейные члены» линейны по $|\mathscr{H}_2^0|^2$ или $|\mathscr{H}_1^0|^2$ с коэффициентами, подобранными так, чтобы удовлетворить соотношению (28.5.38). (Множитель 3 учитывает три цвета кварков.) Тогда соотношения (28.5.40) дают

$$
\Delta_b = -\frac{3}{4\pi^2}|\lambda_b|^4 v_1^2 \ln\left(\frac{\lambda_b v_1^2}{M_{sb}^2}\right) = \frac{3\sqrt{2} m_b^4 G_F}{2\pi^2 \cos^2\beta} \ln\left(\frac{M_{sb}^2}{m_b^2}\right), \tag{28.5.46}
$$

$$
\Delta_t = -\frac{3}{4\pi^2}|\lambda_t|^4 v_2^2 \ln\left(\frac{\lambda_t v_2^2}{M_{st}^2}\right) = \frac{3\sqrt{2} m_t^4 G_F}{2\pi^2 \sin^2\beta} \ln\left(\frac{M_{st}^2}{m_t^2}\right), \tag{28.5.47}
$$

где $G_F = 1{,}17 \times 10^{-5}$ ГэВ$^{-2}$ — константа взаимодействия Ферми, определенная формулой (21.3.34) как $G_F = g^2/4\sqrt{2} m_W^2$. Взяв $m_b = 4{,}3$ ГэВ,

$m_t = 180$ ГэВ, $M_{st} \sim M_{sb} \sim 1$ ТэВ и $m_Z = 91{,}2$ ГэВ, получаем $\Delta_b \sim 1{,}1 \times 10^{-6} m_Z^2/\cos^2\beta$ и $\Delta_t \sim 1{,}1 m_Z^2/\sin^2\beta$. Мы видим, что даже если $\operatorname{tg}\beta$ так же велик, как m_t/m_b, поправка за счет t-кварка Δ_t будет все равно много больше, чем Δ_b.

Эффект Δ_t – *увеличение* и m_H и m_h. Принимая во внимание эту и другие радиационные поправки [26], для $\operatorname{tg}\beta > 10$ верхняя граница (28.5.43) на наименьшую массу нейтрального скаляра повышается радиационными поправками от значений, чуть меньше, чем m_Z, до значения между 100 ГэВ и 110 ГэВ при массах st-кварка между 300 ГэВ и 1 ТэВ. Для сравнения, экспериментальная *нижняя* граница [27] m_h, m_H и m_A, равная 6,25 ГэВ устанавливается, отсутствием hA- или HA- конечного состояния в e^+e^--столкновениях в диапазоне от 130 до 172 ГэВ. Вычисления радиационных поправок, включающих хиггсовские скаляры, согласуются с точными измерениями электрослабых явлений для m_h в промежутке [27a] от 27 до 140 ГэВ.

Для заряженных скаляров радиационные поправки менее важны. Так как прикрепление линий заряженных скаляров разрешает переходы между t- и b-кварками, поправка к потенциалу скалярного поля принимает здесь более общую форму, которая при ограничении $SU(2) \times U(1)$ симметрией должна иметь вид

$$\Delta V = U(\mathcal{H}_2^\dagger \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1^\dagger \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2^\dagger \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1^\dagger \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1^{\mathrm{T}} e \mathcal{H}_2). \tag{28.5.48}$$

(Кварковые петли фактически не порождают какой-либо зависимости от $\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}} e \mathcal{H}_2$.) Каждое появление $\mathcal{H}_1$- или $\mathcal{H}_2$-дублета сопровождается множителем λ_b или λ_t соответственно, так что слагаемые, включающие $\mathcal{H}_1$, будут подавлены, как мы это уже видели при расчете масс нейтральных скаляров. В хорошем приближении поправки к эффективному потенциалу будут иметь вид

$$\Delta V \simeq U(\mathcal{H}_2^\dagger \mathcal{H}_2, 0,0,0) = U(|v^2 + \phi^2| + |\mathcal{H}_2^-|^2, 0,0,0). \tag{28.5.49}$$

Возвращаясь к случаю, когда заряженные поля равны нулю, видим, что функция U должна быть точно такой же, как та, которую раньше называли U_t. Любые слагаемые в U первого порядка в разложении по степеням $|v_2 + \phi_2|^2 + |\mathcal{H}_2^-|^2 - v_2^2$ будут просто служить для переопределения константы m_2^2 и устраняются при применении соглашения (28.5.38). Слагаемые в U второго порядка по $|v_2 + \phi_2|^2 + |\mathcal{H}_2^-|^2 - v_2^2$ — настоящие радиационные поправки, но, хотя они содержат слагаемые второго порядка по $|\phi_2|^2$, которые оказывают влияние на массы нейтральных скаляров, они не содержат членов второго порядка по $\mathcal{H}_2^-|^2$, которые могли бы сдвинуть массу неголдстоуновского заряженного скаляра. К счастью, и не требуется, чтобы радиационные поправки не вступали в противоречие с экспериментом, так как при отсутствии верхнего ограничения на m_A нет теоретической верхней границы на массу заряженного скаляра. Экспериментальная нижняя граница [28] $m_C \geqslant 59$ ГэВ возникает из фактао отсутствия процесса $e^+e^- \to \mathcal{H}^+\mathcal{H}^-$ в диапазоне от 181 до 184 ГэВ. Существует значительно более точная нижняя граница для m_C, задаваемая вероятностью процесса $b \to s\gamma$ (измеряемая в распадах типа $B \to K^*\gamma$), который может происходить при переходе к промежуточному $\mathcal{H}^- u$ или $\mathcal{H}^- c$ состоянию с испусканием фотона виртуальным кварком или $\mathcal{H}^-$. В настоящее время согласие между теорией и экспериментом для этого процесса устанавливает нижнюю границу на m_C примерно в 150 ГэВ (и выше при $\operatorname{tg}\beta < 1$). С помощью соотношения (28.5.35) это приводит к важной нижней границе $m_A > 125$ ГэВ.

Есть два условия на массы m_i^2, которые должны удовлетворяться в любой модели нарушения суперсимметрии для того, чтобы приводить к успешному учету нарушения электрослабой симметрии. Одно из них задается условием, чтобы потенциал был ограничен снизу, которое требует, как мы видели, чтобы

$$2|\mu| + m_1^2 + m_2^2 > B\mu.$$

Поскольку, по определению, $B\mu$ положительно, это гарантирует, что квадрат массы C-нечетного нейтрального скаляра (28.5.21) положителен. Второе условие задается выражениями (28.5.22) и (28.5.24), которые для произвольных значений β требуют, чтобы

$$4(m_1^2 + |\mu|^2)(m_2^2 + |\mu|^2) \leqslant (B\mu)^2. \tag{28.5.50}$$

Из выражения (28.5.10) легко видеть, что это условие гарантирует, что матрица вторых производных потенциала имеет отрицательное собственное значение при $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = 0$, так что эта $SU(2)\times U(1)$ инвариантная точка — одна из точек неустойчивого равновесия, и поэтому симметрия $SU(2)\times U(1)$ должна быть спонтанно нарушена. Если β близко к $\pi/2$, то соотношение (28.5.24) говорит нам, что это условие удовлетворяется при положительном значении $m_1^2 + |\mu|^2$ и *отрицательном* значении $m_2^2 + |\mu|^2$. Как мы увидим в следующем разделе, ренормгрупповой поток параметров в лагранжиане скалярного поля обеспечивает механизм, делающий $m_2^2 + |\mu|^2$ отрицательным.

Даже при минимальным наборе суперполей в суперсимметричных теориях существуют несколько пар частиц с различными свойствами относительно $SU(2)\times U(1)$ преобразований, но с одинаковым зарядом, цветом, барионным и лептонным числами, которые смешиваются, когда $SU(2)\times U(1)$ спонтанно нарушена. Мы уже видели пример этого в предыдущем разделе, когда нам пришлось иметь дело со смешиванием скалярных суперпартнеров левых кварков с комплексно сопряженными скалярными суперпартнерами левых антикварков. Аналогичное смешивание происходит между хиггсино и калибрино, как заряженными, так и нейтральными; частицы определенной массы являются не хиггсино или калибрино, а смешанными состояниями, известными как чарджино и нейтралино. Рассмотрим чарджино, которые приводят к полезному ограничению на μ. Согласно формуле (27.4.8), в лагранжиане есть недиагональные суперсимметричные массовые слагаемые:

$$-\mathrm{Re}\left[\mu\left(h_{1L}^{-T}\varepsilon h_{2L}^{+}\right)+i\sqrt{2}m_W\cos\beta\left(w_L^{-T}\varepsilon h_{2L}^{+}\right)+i\sqrt{2}\sin\beta\left(w_L^{+T}\varepsilon h_{1L}^{-}\right)\right].$$

К этому следует прибавить слагаемое для массы вино $-m_{\text{вино}}\mathrm{Re}\left(w_L^{+T}\varepsilon w_L^{-}\right)$, которое порождается калибровочными взаимодействиями с сектором нарушения суперсимметрии. Квадраты масс чарджино, следовательно, являются собственными значениями матрицы

$$M_C=\begin{pmatrix} m_{\text{вино}} & i\sqrt{2}m_W\sin\beta \\ i\sqrt{2}m_W\cos\beta & \mu \end{pmatrix}. \tag{28.5.51}$$

Эти два собственных значения равны

$$m^2_{\text{чарджино}}=\frac{1}{2}\Bigg[m^2_{\text{вино}}+2m_W^2+|\mu|^2\pm\Big((m^2_{\text{вино}}-|\mu|^2)^2+4m_W^4\cos^2 2\beta$$
$$+4m_W^2(m^2_{\text{вино}}+|\mu|^2-2m_{\text{вино}}\mathrm{Re}\,\mu\sin 2\beta)\Big)^{1/2}\Bigg]. \tag{28.5.52}$$

Мы ожидаем, что масса вино $m_{\text{вино}}$ много больше, чем m_W. Если она также много больше $|\mu|$, тогда более тяжелое чарджино — это в основном вино с массой $m_{\text{вино}}$, а наиболее легкое чарджино — в основном хиггсино с массой $|\mu|$. В любом случае, $|\mu|$ больше, чем масса самого легкого чарджино, чья масса больше, чем $\sim$60 ГэВ и, возможно, больше, чем m_W, о чем говорит отсутствие рождения калибрино в e^+-e^- аннигиляции. Поиск нейтралино в e^+-e^--аннигиляции установил нижний предел 27 ГэВ на массу легчайшего нейтралино [29a].

28.6. Нарушение суперсимметрии, вызванное калибровочными полями

В этом разделе мы рассмотрим возможность того, что нарушение суперсимметрии передается известным частицам через взаимодействия обычных $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ калибровочных бозонов и их суперпартнеров [30]. Здесь предполагается, что суперсимметрия динамически нарушается в секторе суперполей, *не* включающем суперполя наблюдаемых кварков и лептонов, и что некоторые из киральных суперполей в секторе нарушения суперсимметрии, известные как *суперполя-пере-*

*носчики**, имеют ненулевые $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ квантовые числа. Чтобы частицы-переносчики могли приобретать большую массу (порядка 1 ТэВ), необходимо, чтобы они реализовали действительное (или псевдодействительное) представление $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, что автоматически означает также, что они не вносят каких-либо новых аномалий. Хотя в большинстве имеющихся в литературе исследований вызванных калибровочными полями нарушений суперсимметрии делаются также предположения об отвечающих за нарушение суперсимметрии взаимодействиях суперполей-переносчиков с другими суперполями, наиболее важные предсказания в этом классе теорий в действительности не зависят от этих предположений. Поэтому мы не будем делать никаких предположений о взаимодействии суперполей-переносчиков с другими суперполями из нарушающего суперсимметрию сектора. Мы сделаем, однако, другое предположение о $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ свойствах суперполей-переносчиков, имеющее сильную феноменологическую мотивацию.

Для того, чтобы частицы-переносчики не влияли на рассмотренное в разделе 28.2 объединение констант связи, будем предполагать, что отношения полных следов возведенных в квадрат $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ калибровочных генераторов для них такие же, как и для обычных кварков и лептонов. Это условие будет автоматически удовлетворяться, если суперполя-переносчики (возможно, с некоторыми $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ нейтральными киральными суперполями) реализуют полное представление некоторой простой группы G, содержащей $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, в которой кварки и лептоны (опять же, возможно вместе с некоторыми $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ нейтральными киральными суперполями) также образуют полное представление. (Например, эти левокиральные суперполя могут образовывать N $SU(2)$-синглетов $SU(3)$-триплетов с зарядом $e/3$ и N $SU(2)$-дублетов $SU(3)$-синглетов с зарядами 0 и $-e$, которые вместе образуют N представлений **5** группы $SU(5)$, вместе с равным числом левокиральных суперполей в комплексно-сопряженных представлениях $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, которые образуют N представлений $\overline{\mathbf{5}}$.) Сейчас, однако, нет необходимости ни предполагать, что G — реальная группа калибровочной симметрии данной теории, ни принимать любой конкретный выбор G или представление, реализуемое частицами-переносчиками.

Ожидается, что это взаимодействие суперполей-переносчиков с другими киральными и(или) калибровочными суперполями из сектора нарушения суперсимметрии и с $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ калибровочными суперполями может производить нарушение суперсимметрии в пропагаторах компонентных полей $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ калибровочных суперполей. С точностью до

*Автор использует термин «messenger superfields».— *Прим. пер.*

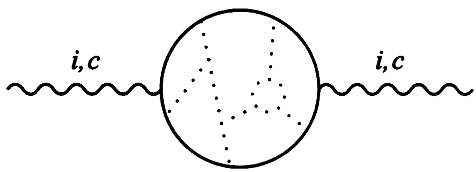

Рис. 28.5. Диаграмма того типа, который вносит нарушение суперсимметрии в пропагатор калибровочных суперполей. Волнистые линии — произвольные компонентные поля калибровочных суперполей, сплошные линии — компонентные поля суперполей-переносчиков, пунктирные линии — компонентные поля $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ нейтральных суперполей в секторе нарушения суперсимметрии.

низшего порядка по константам $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ взаимодействий, главный вклад в пропагаторы дают диаграммы типа показанной на рис. 28.5, на которой пара калибровочных линий, пара линий калибрино или пара линий вспомогательных D-полей прикреплена к петле полей-переносчиков, которые, кроме того, также могут иметь любое количество взаимодействий с $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ нейтральными полями из сектора нарушения суперсимметрии. Поэтому нарушающие суперсимметрию поправки Δ_{ic} пропагаторов калибровочных суперполей (с $i=1,2,3$ для $SU(3)$, $SU(2)$ и $U(1)$ и $c=V,\lambda,D$, отмечающими различные компоненты каждого калибровочного поля) имеют вид

$$\begin{aligned}
\Delta_{3c}(q) &= (g_s^2/16\pi^2)\sum_n T_{3n}\Pi_{cn}(q),\\
\Delta_{2c}(q) &= (g^2/16\pi^2)\sum_n T_{2n}\Pi_{cn}(q),\\
\Delta_{1c}(q) &= (g'^2/16\pi^2)\sum_n T_{1n}\Pi_{cn}(q),
\end{aligned}\tag{28.6.1}$$

где n обозначает различные суперполя-переносчики, $\Pi_{cn}(q)$ — более или менее сложные функции 4-импульса q, T_{3n} и T_{2n} — следы квадратов любого генератора $SU(3)$ и $SU(2)$ соответственно в представлениях, реализуемых n-м суперполем-переносчиком (нормированным так, что в фундаментальных представлениях $T_3=T_2=1/2$), T_{1n} — сумма квадратов электрослабых гиперзарядов n-го суперполя-переносчика. Одним немедленным следствием является то, что калибрино приобретают массы того же вида*:

*Вспомним, что бино — суперпартнер $U(1)$-калибровочного поля B_μ, которое появляется в лагранжиане стандартной модели. Мы еще не учитывали $SU(2)\times U(1)$ нарушение, так

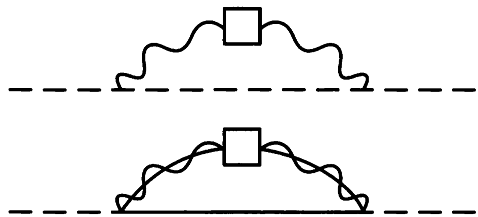

Рис. 28.6. Диаграммы, которые передают нарушение суперсимметрии скваркам и слептонам. Пунктирные линии обозначают скварки или слептоны, волнистые линии — $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ калибровочные бозоны или вспомогательные D-поля, сплошные линии — кварки или лептоны, комбинированные сплошные и волнистые линии — $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ калибрино, квадраты показывают вставки нарушающей суперсимметрию поправки к пропагатору, изображенной на рис. 28.5.

$$\begin{aligned} m_{\text{глюино}} &= (g_s^2/16\pi^2)\sum_n T_{3n}M_{gn}, \\ m_{\text{вино}} &= (g^2/16\pi^2)\sum_n T_{2n}M_{gn}, \\ m_{\text{бино}} &= (g'^2/16\pi/2)\sum_n T_{1n}M_{gn}, \end{aligned} \tag{28.6.2}$$

где M_{gn} — массы, характеризующие различные суперполя-переносчики. Как уже упоминалось, для того, чтобы сохранить объединение констант взаимодействия при очень высокой энергии, мы предполагаем, что суммы T_n имеют те же отношения, что и для наблюдаемых кварков и лептонов:

$$\sum_n T_{3n} = \sum_n T_{2n} = \sum 3T_{1n}/5 \equiv T. \tag{28.6.3}$$

Нарушение суперсимметрии в этих пропагаторах, следовательно, передается скваркам и слептонам суперсимметричной стандартной модели через диаграммы, изображенные на рис. 28.6, где $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ калибровочный бозон или калибрино, или вспомогательное D-поле испускается и снова поглощается скварком или слептоном. Мы рассматриваем эффективную низкоэнергетическую теорию, в которой $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ нарушение пока не учитывается, так что здесь нет перемешивания между $SU(3)$, $SU(2)$ и $U(1)$ пропагаторами, и каждый пропагатор действует на

что массы калибрино, скварка и слептона, рассчитываемые здесь, должны пониматься как параметры, появляющиеся в $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ инвариантном эффективном лагранжиане стандартного вида.

калибровочные индексы как единичная матрица. Таким образом, квадрат массы, сообщаемой любому скварку или слептону, будет пропорционален сумме квадратов всех $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$-генераторов (включая константы взаимодействий) в представлении, реализуемом этим скварком или слептоном. Суммы квадратов $SU(2)$- и $SU(3)$-генераторов в фундаментальных представлениях равны

$$\sum_{a=1}^{3}(g\sigma_a/2)^2=\frac{3g^2}{4}\cdot 1,\qquad \sum_{\alpha=1}^{8}(g_s\lambda_\alpha/2)^2=\frac{4g_s^2}{3}\cdot 1,$$

где σ_a – изоспиновые матрицы Паули (5.4.18), а λ_α – матрицы Гелл-Манна (19.7.2). Для $U(1)$ генератором является просто слабый гиперзаряд (21.3.7), включающий фактор g'. Квадраты масс скварков и слептонов имеют вид:

$$\begin{aligned}
M_Q^2&=2\sum_n M_{sn}^2\left[\frac{4}{3}\left(\frac{g_s^2}{16\pi^2}\right)^2T_{3n}+\frac{3}{4}\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^2T_{2n}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{g'^2}{16\pi^2}\right)^2T_{1n}\right],\\
M_{\bar U}&=2\sum_n M_{sn}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{g_s^2}{16\pi^2}\right)^2T_{3n}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{g'^2}{16\pi^2}\right)T_{1n}\right],\\
M_{\bar D}&=2\sum_n M_{sn}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{g_s^2}{16\pi^2}\right)^2T_{3n}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{g'^2}{16\pi^2}\right)T_{1n}\right],\qquad (28.6.4)\\
M_L^2&=2\sum_n M_{sn}^2\left[\frac{3}{4}\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^2T_{2n}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{g'^2}{16\pi^2}\right)^2T_{1n}\right],\\
M_{\bar E}&=2\sum_n M_{sn}^2\left(\frac{g'^2}{16\pi^2}\right)T_{1n},
\end{aligned}$$

где Q, $\bar U$, $\bar D$, L и $\bar E$ — скалярные суперпартнеры левых кварковых дублетов, левых антикварков зарядом $-2e/3$ и $+2e/3$, левых лептонных дублетов и левых заряженных антилептонов; M_{sn} — некоторые новые массы, которые характеризуют n-е суперполя-переносчики. (Множитель 2 извлечен из M_{sn}^2 для дальнейшего удобства.) Получающиеся этим путем скварковые и слептонные массы автоматически одинаковы во всех трех поколениях. Таким образом, разрешается проблема с процессами с изменением аромата, обсуждавшаяся в разделе 28.4.

Мы ожидаем, что все M_{gn} и M_{sn} — приблизительно одного порядка, так что глюино и скварки имеют сравнимые массы, тогда как вино, бино и слептоны много легче, их массы подавлены квадратами электрослабых констант связи.

При некоторых разумных динамических предположениях можно продвинуться значительно дальше. Допустим, что эффекты нарушения суперсимметрии в суперполях-переносчиках могут быть смоделированы включением этих суперполей вместе с набором $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ нейтральных киральных суперполей S_n (которые необязательно все различны) в суперпотенциал

$$f(\Phi,\bar{\Phi},S)=\sum_n m\lambda_n S_n\Phi_n\bar{\Phi}_n, \tag{28.6.5}$$

где $\bar{\Phi}_n$ и Φ_n — левые суперполя-переносчики в комплексно сопряженных представлениях $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, а λ_n — набор коэффициентов констант взаимодействий. (Здесь и ниже мы отбрасываем $SU(3)\times SU(2)$ индексы, по которым выполняется суммирование при расчетах скалярных произведений, типа $\Phi_n\bar{\Phi}_n$.) Предполагается, что суперполя S_n имеют неисчезающие вакуумные средние $\mathscr{S}_n$ и $\mathscr{F}_n$ для их скалярных и вспомогательных компонент соответственно. Ненулевые значения $\mathscr{F}_n$ в этих моделях вносят нарушение суперсимметрии в массы частиц Φ_n и $\bar{\Phi}_n$. В разделе 26.4 показано, что при пренебрежении калибровочными константами, квадраты масс спинорных компонент Φ_n (и $\bar{\Phi}_n$) являются собственными значениями матрицы $\mathscr{M}_n^\dagger\mathscr{M}_n$ с $\mathscr{M}_n$, определенной в формуле (26.4.11), что дает

$$\mathscr{M}_n=\begin{pmatrix} 0 & \lambda_n\mathscr{S}_n \\ \lambda_n\mathscr{S}_n & 0 \end{pmatrix},$$

так что фермионы-переносчики имеют массы $|\lambda_n\mathscr{S}_n|$. Чтобы найти массовые члены для скалярных компонент φ_n и $\bar{\varphi}_n$ суперполей Φ_n и $\bar{\Phi}_n$, заметим, что интегрирование по вспомогательным полям Φ_n и $\bar{\Phi}_n$ приводит к потенциалу

$$\sum_n\left|\frac{\partial f(\varphi,\bar{\varphi},\mathscr{S})}{\partial\varphi_n}\right|^2+\sum_n\left|\frac{\partial f(\varphi,\bar{\varphi},\mathscr{S})}{\partial\bar{\varphi}_n}\right|^2=\sum_n|\lambda_n\mathscr{S}_n|^2\left[|\varphi_n|^2+|\bar{\varphi}_n|^2\right],$$

к которому мы должны теперь добавить вклад вспомогательной компоненты S_n, определяемой вторым членом уравнения (26.4.4) как

$$2\,\mathrm{Re}\sum\left[\lambda_n\mathscr{F}_n\frac{\partial f(\varphi,\bar{\varphi},\mathscr{S})}{\partial\mathscr{S}_n}\right]=2\,\mathrm{Re}\sum_n[\mathscr{F}_n\lambda_n\varphi_n\bar{\varphi}_n].$$

Таким образом, комплексные скалярные поля определенной массы есть $\left(\varphi_n\pm e^{-i\alpha_n}\bar{\varphi}_n\right)/\sqrt{2}$, где α_n — фаза $\lambda_n\mathscr{F}_n$, с квадратами масс $|\lambda_n\mathscr{S}_n|^2$ $\pm$ $|\lambda_n\mathscr{F}_n|$. (Отметим, что такая картина пары комплексных скаляров с квадратами масс, находящимися на равном удалении над и под возведенной в квадрат майорановской массой фермиона — именно то, что мы ожидали из правила сумм (27.5.11).) Так как квадраты масс положительны, то

$$|\mathscr{F}_n| \leqslant |\lambda_n||\mathscr{S}_n|^2. \tag{28.6.6}$$

В моделях, основанных на (28.6.5), массы калибрино задаются диаграммой вида, показанного на рис. 28.5, но теперь лишь с одной петлей, не включая вставки, обозначенной пунктирными линиями на рис. 28.5. Подробное вычисление дает коэффициенты M_{gn} в (28.6.2) [31]:

$$M_{gn} = \frac{|\mathscr{F}_n|}{|\mathscr{S}_n|} g\left(\frac{|\mathscr{F}_n|}{|\lambda_n||\mathscr{S}_n|^2}\right), \tag{28.6.7}$$

где

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2x^2}[(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)] \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{15} + \frac{x^6}{28} + \cdots . \end{aligned} \tag{28.6.8}$$

Массы скварков и слептонов даются диаграммами рис. 28.6, которые теперь содержат две петли. Еще одно подробное вычисление дает массовые параметры M_{sn}^2 в уравнении (28.6.4) в виде [31]

$$M_{sn}^2 = \frac{|\mathscr{F}_n|^2}{|\mathscr{S}_n|^2} f\left(\frac{|\mathscr{F}_n|}{|\lambda_n||\mathscr{S}_n|^2}\right), \tag{28.6.9}$$

где

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+x}{x^2}\left[\ln(1+x) - 2\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2\left(\frac{2x}{1+x}\right)\right] + x \to -x \\ &= 1 + \frac{1}{36}x^2 - \frac{11}{450}x^4 - \frac{319}{11760}x^6 + \cdots , \end{aligned} \tag{28.6.10}$$

где Li_2 — дилогарифм

$$\mathrm{Li}_2(x) \equiv -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt. \tag{28.6.11}$$

В частности, если (как это часто предполагается) различные S_n все одинаковы, и если $|\mathscr{F}| \ll |\lambda_n||\mathscr{S}|^2$ для всех n, тогда f и g в формулах (28.6.9) и (28.6.7) могут быть приравнены к 1, так что

$$M_{gn} = M_{sn} = |\mathscr{F}|/|\mathscr{S}| \equiv M. \tag{28.6.12}$$

Используя соотношение (28.6.3), можно выразить массы калибрино (28.6.2) в виде

$$\begin{aligned} m_{\text{вино}} &= (g^2/16\pi^2)TM, \\ m_{\text{бино}} &= (5/3)(g'^2/16\pi^2)TM, \\ m_{\text{глюино}} &= (g_s^2/16\pi^2)TM, \end{aligned} \tag{28.6.13}$$

тогда как скварковые и слептонные массы (28.6.4) становятся равными

$$\begin{aligned} M_{\tilde{Q}}^2 &= 2TM^2\left[\frac{4}{3}\left(\frac{g_s^2}{16\pi^2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^2 + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{g'^2}{16\pi^2}\right)^2\right], \\ M_{\tilde{U}}^2 &= 2TM^2\left[\frac{4}{3}\left(\frac{g_s^2}{16\pi^2}\right)^2 + \frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{g'^2}{16\pi^2}\right)^2\right], \\ M_{\tilde{D}}^2 &= 2TM^2\left[\frac{4}{3}\left(\frac{g_s^2}{16\pi^2}\right)^2 + \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{g'^2}{16\pi^2}\right)^2\right], \\ M_{\tilde{L}}^2 &= 2TM^2\left[\frac{3}{4}\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^2 + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{g'^2}{16\pi^2}\right)^2\right], \\ M_{\tilde{E}}^2 &= 2TM^2\frac{5}{3}\left(\frac{g'^2}{16\pi^2}\right)^2. \end{aligned} \tag{28.6.14}$$

Нет особых оснований полагать, что $|\mathscr{F}| \ll |\lambda_n\mathscr{S}|^2$, но это предположение, на самом деле, не очень ограничивающее, так как уравнение (28.6.6) уже требует $|\mathscr{F}| \leqslant |\lambda_n||\mathscr{S}|^2$ и оказывается, что функции $f(x)$ и $g(x)$ не слишком отличаются единицы при $x < 1$, если только x не очень близок к 1.

Предельная простота результатов (28.6.13) и (28.6.14) была объяснена Гвидиче и Ратацци [32] с помощью описанных в разделе 27.6 рассуждений Зайберга [33] об аналитичности. Предположим, мы вводим суперпотенциал для суперполей-переносчиков так, как в (28.6.5), но с единственным внешним синглетным суперполем S:

$$f(S,\Phi) = S\sum_n \lambda_n \Phi_n \bar{\Phi}_n. \tag{28.6.15}$$

Кроме прочих следствий, кинематический член для калибровочного суперполя V_i (с $i = 3,2,1$ для $SU(3)$, $SU(2)$ и $U(1)$) в вильсоновском эффективном лагранжиане при перенормировочном масштабе μ примет теперь вид

$$\mathcal{L}_{\text{калибр.},\mu} = \mathrm{Re}\left[\sum_i N_i(S,\mu)\sum_{\alpha\beta}(W_{iL\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{iL\beta})\right]_{\mathcal{F}}, \tag{28.6.16}$$

с некоторыми функциями $N_i(S,\mu)$, заменяющими множители $1/2g_i^2(\mu)$ в формуле (27.3.22). (θ-член здесь опущен, потому что он не дает вклада в рамках теории возмущений. Предполагается суммирование по индексам в $W_{iL\alpha}$, которые нумеруют не выписанные явно различные члены присоединенных представлений $SU(3)$ и $SU(2)$.) Калибровочная константа связи задается теперь приравниванием суперполя S вакуумному среднему $\mathcal{S}$ его скалярной компоненты:

$$\frac{1}{2g_i^2(\mu)} = N_i(\mathcal{S},\mu). \tag{28.6.17}$$

Кроме того, вспоминая, что $W_{iL\alpha} = \lambda_{iL\alpha} + O(\theta)$ и используя формулу (27.2.11), находим, что члены в лагранжиане (28.6.16) второго порядка по полям калибрино равны, с точностью до полных производных,

$$-2\sum_i \mathrm{Re}\left[N_i(\mathcal{S},\mu)\left(\bar{\lambda}_{iR}\,\partial\!\!\!/\lambda_{iR}\right) + [N_i(S,\mu)]_{\mathcal{F}}\left(\lambda_{iL}^T\varepsilon\lambda_{iL}\right)\right].$$

Это дает массы калибрино

$$m_{gi}(\mu) = \left|\frac{[N_i(S,\mu)]_{\mathcal{F}}}{2N_i(\mathcal{S},\mu)}\right| = g_i^2(\mu)\left|[N_i(S,\mu)]_{\mathcal{F}}\right|. \tag{28.6.18}$$

Теперь рассмотрим поведение $N_i(\mathcal{S},\mu)$ как функции действительного положительного $\mathcal{S}$ с так подобранными фазами суперполей-переносчиков, что все λ_n действительны и положительны. Предположим, что мы фиксируем значения констант калибровочных взаимодействий $g_i(\mu)$ при некотором масштабе $\mu = K$, большем масс всех частиц-переносчиков. Учитывая изменения в константах b_i в ренормгрупповых уравнениях $\mu dg_i(\mu)/d\mu = b_i g_i^3$, когда μ принимает значения масс различных частиц-переносчиков, получаем, что решение этого уравнения для μ *ниже* масс всех частиц-переносчиков принимает вид

$$\frac{1}{g_i^2(\mu)} = \frac{1}{g_i^2(K)} - 2b_i^{(0)}\ln\left(\frac{M_1}{K}\right) - 2b_i^{(1)}\ln\left(\frac{M_2}{M_1}\right) - \cdots - 2b_i^{(N)}\ln\left(\frac{\mu}{M_N}\right),$$

где мы обозначаем частицы-переносчики так, чтобы их массы $M_n = \lambda_n\mathcal{S}$ удовлетворяли неравенству

$$M_1 > M_2 > \cdots > M_N,$$

и $b_i^{(n)}$ вычисляется с учетом только частиц массами ниже M_n. Так как все M_n пропорциональны $\mathscr{S}$, видим, что $N_i(\mathscr{S},\mu)$ зависит от $\mathscr{S}$ как

$$N_i(\mathscr{S},\mu) = -b_i^{\text{переносчик}} \ln\mathscr{S} + \mathscr{S}\text{-независимые слагаемые,} \tag{28.6.19}$$

где $b_i^{\text{переносчик}} = b_i^{(0)} - b_i^{(N)}$ — вклад в b_i от всех суперполей-переносчиков. Из (27.9.45) (при $C_{i1} = 0$ и $C_{i2}^f = C_{i2}^s = \sum_n T_{in}$), получаем

$$b_i^{\text{переносчик}} = \frac{1}{16\pi^2}\sum_n T_{in}. \tag{28.6.20}$$

Поскольку суперсимметрия требует, чтобы $N_i(S,\mu)$ была аналитической функцией от S, мы видим, что

$$N_i(S,\mu) = -\frac{1}{16\pi^2}\sum_n T_{im} \ln S + S\text{-независимые слагаемые.} \tag{28.6.21}$$

Разлагая в окрестности $S = \mathscr{S}$, в первом порядке по $\mathscr{F}$ имеем $[\ln\mathscr{S}]_{\mathscr{F}} = \mathscr{F}/\mathscr{S}$, и тогда формула (28.6.18) дает массы калибрино

$$m_{gi}(\mu) = \frac{g_i^2(\mu)}{16\pi^2}\sum_n T_{in}\left|\frac{\mathscr{F}}{\mathscr{S}}\right|. \tag{28.6.22}$$

Используя (28.6.3), видим, что это совпадает с нашим прежним результатом (28.6.13). Формула (28.6.14) для масс скварков и слептонов была получена Гвидиче и Ратацци аналогично, путем изучения вместо калибровочных суперполей кинематических членов для кварковых и лептонных суперполей.

Кстати, выражения (28.6.13) и (28.6.14) могут быть получены (в общем случае с различными значениями M в (28.6.13) и (28.6.14)) без специального динамического предположения, подобного (28.6.5), если мы предположим, что сектор нарушения суперсимметрии сохраняет инвариантность относительно некоторой группы G великого объединения, которая имеет известные кварки, лептоны и суперполя-переносчики в качестве полных представлений. В этом случае коэффициенты M_{gn} и M_{sn} в уравнениях (28.6.2) и (28.6.3) будут иметь значения $M_g(d)$ и $M_s(d)$ соответственно, которые зависят только от неприводимого представления d группы G, которому принадлежат n-ые поля-переносчики. Отношения сумм T_{in} по n, принадлежащих любому неприводимому представлению d группы G, совпадают с отношениями сумм в (28.6.3), так что $\sum_{n\in d} T_{in} = k_i T(d)$, где $k_3 = k_2 = 1$, $k_1 = 5/3$, и поэтому

$$\sum_n T_{in}M_{gn} = \sum_d M_g(d)\sum_{n\in d} T_{in} = k_i M_g,$$

где $M_g = \sum_d M_g(d)T(d)$. Аналогично,

$$\sum_n T_{in} M_{sn}^2 = \sum_d M_s^2(d) \sum_{n \in d} T_{in} = k_i M_s^2,$$

где $M_s^2 = \sum_d M_s^2(d)T(d)$. Выражения (28.6.2) и (28.6.4) должны перейти в выражения (28.6.13) и (28.6.14), с заменой M_g на TM и M_s^2 на $2TM^2$. Но предположение, что M_{gn} и M_{sn} сохраняют инвариантность относительно G, неправдоподобно, если масштаб масс переносчиков много меньше масштаба великого объединения, поэтому, что бы мы не предполагали о калибровочной группе великого объединения, $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, калибровочные взаимодействия будут заставлять константы взаимодействия, такие как λ_n, по-разному изменяться для Φ_n с различными $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ квантовыми числами в одном и том же представлении группы великого объединения.

Эти результаты подвержены различным радиационным поправкам, главное в которых — то, что мы должны использовать значения g_s, g и g', перенормированные при масштабе, сравнимом с вычисляемыми массами. В самом деле, отношения масс калибрино, данные в (28.6.13), могут быть также выведены при совершенно других предположениях, что все массы калибрино равны на масштабе великого объединения, где константы взаимодействия связаны соотношением $g_s^2 = g^2 = 5g'^2/3$, и становятся различными при низких энергиях, как это описывается уравнениями ренормгруппы.

Для иллюстрации численных результатов, предположим, что суперполя-переносчики образуют $SU(2)$-синглет и $SU(3)$-триплет с зарядом $e/3$ и $SU(2)$-дублет и $SU(3)$-синглет с зарядами 0 и $-e$, вместе с левыми суперполями в комплексно-сопряженных представлениях $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Тогда, как уже упоминалось, соотношение (28.6.3) удовлетворяется при $T = 2 \times 1/2 = 1$, так что, используя правильные значения калибровочных констант взаимодействия можно найти, что массы скварков, глюино, L-слептонов, вино, E-слептонов и бино относятся друг к другу как [34] 11,6 : 7,0 : 2,0 : 1,1 : 1,0. В бóльших представлениях G может быть $T \gg 1$, и в этом случае глюино будет самой тяжелой частицей, а слептоны — самыми легкими.

Помимо изменения калибровочных констант существуют другие радиационные поправки. Согласно одному вычислению [34], в модели с $SU(2)$-синглетом $SU(3)$-триплетом зарядом $e/3$ и $SU(2)$-дублетом $SU(3)$-синглетом зарядами 0 и $-e$, вместе с левокиральными суперполями в комплексно-сопряженных представлениях $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, радиационные поправки приводят к следующим отношениям масс скварков, глюино, L слептонов, вино, E слептонов и бино: 9,3 : 6,4 : 2,6 : 1,9 : 1,35 : 1,0.

Как мы видели в предыдущем разделе, вино и бино могут смешиваться с заряженными и нейтральными хиггсино, так что вычисленные массы вино и бино должны использоваться не как их собственные физические массы, а как входные данные для вычисления физических масс, известных как *чарджино* и *нейтралино*.

Рассмотрим теперь массы хиггсовских скаляров в этих моделях. Если бы мы учли только двухпетлевые диаграммы, благодаря которым эти скаляры приобретают массы за счет калибровочных взаимодействий с нарушающим суперсимметрию сектором, тогда с точностью до знаков, эти скаляры имели бы те же $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ квантовые числа, что и дублеты левых лептонов, и их массы были бы заданы формулой, подобной четвертой формуле в (28.6.4)

$$\begin{aligned}[m_1^2]_{2\text{петл}} &= [m_2^2]_{2\text{петл}} - M_L^2 \\ &= \sum_n M_{sn}^2\left[\frac{3}{4}\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^2 T_{2n} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{g'^2}{16\pi^2}\right)^2 T_{1n}\right]^2 . \end{aligned} \tag{28.6.23}$$

Если бы этим дело и ограничивалось, то было бы невозможно удовлетворить найденному в предыдущем разделе условию для $SU(2)\times U(1)$ нарушения, что (пока $\operatorname{tg}\beta$ не очень близок к единице) одна из величин $m_1^2+|\mu|^2$ и $m_2^2+|\mu|^2$ должна быть отрицательной. К счастью, большие массы t-кварка и скварка порождают отрицательный вклад в m_2^2, который естественным образом ведет к спонтанному нарушению симметрии. Взаимодействия хиггсовских дублетов с суперполями кварков третьего поколения описываются суперпотенциалом

$$f_{3\text{-е поколение}} = \lambda_b(H_1^T eQ)\bar{B} + \lambda_t(H_2^T eQ)\bar{T}, \tag{28.6.24}$$

где Q — кварковый $SU(2)$-дублет левых полей (T,B), $\bar{T}$ и $\bar{B}$ — левокиральные суперполя левых t- и b-антикварков, λ_t и λ_b — константы юкавского взаимодействия, связанные с массами t- и b-кварков как $m_t=\lambda_t v_2$ и $m_b=\lambda_b v_1$. Тогда последний член в (26.4.7) дает слагаемые в потенциал, включающие взаимодействие между полями скварков и полями Хиггса как

$$\begin{aligned} V_{sq\,H} = {} & \left|\lambda_b\mathscr{H}_1^-\bar{\mathscr{B}} + \lambda_t\mathscr{H}_2^0\bar{\mathscr{T}}\right|^2 + \left|\lambda_b\mathscr{H}_1^0\bar{\mathscr{B}} + \lambda_t\mathscr{H}_2^+\bar{\mathscr{T}}\right|^2 \\ & + \left|\lambda_b\right|^2\left|\mathscr{H}_1^0\mathscr{B} - \mathscr{H}_1^-\mathscr{T}\right|^2 + \left|\lambda_t\right|^2\left|\mathscr{H}_2^+\mathscr{B} - \mathscr{H}_2^0\mathscr{T}\right|^2, \end{aligned} \tag{28.6.25}$$

где прописные буквы обозначают скалярные компоненты суперполей. Тогда вклады скварковой петли в потенциал $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ равны

$$V_H^{\text{скварковая петля}} = 3\langle\mathscr{S}\mathscr{S}^*\rangle\left[2|\lambda_b|^2(\mathscr{H}_1^\dagger\mathscr{H}_1) + 2|\lambda_t|^2(\mathscr{H}_2^\dagger\mathscr{H}_2)\right], \tag{28.6.26}$$

где $\langle \mathscr{S}\mathscr{S}^* \rangle$ — вакуумное среднее произведения любого из скварковых полей и ему комплексно сопряженного, взятых в одной и той же точке пространства-времени. (Принимая, что эта величина одинакова для всех типов скварков, мы здесь воспользовались выражением (28.6.4), из которого следует, что массы скварков M_Q не очень отличаются для скварков $\mathscr{T}$, $\mathscr{B}$, $\bar{\mathscr{T}}$ и $\bar{B}$.) Множитель 3 в (28.6.26) учитывает три цвета каждого типа скварков.) Вакуумное среднее $\langle \mathscr{S}\mathscr{S}^* \rangle$ в низшем порядке дается выражением

$$\langle \mathscr{S}\mathscr{S}^* \rangle \equiv \langle \mathscr{S}(x)\mathscr{S}^*(x) \rangle_{\text{ВАК.}} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{p^2 + M_Q^2 - i\varepsilon}. \qquad (28.6.27)$$

Интеграл, конечно, расходится, но если скварки имели бы равные нулю голые массы кварков, то вклад в нарушающие суперсимметрию коэффициенты сократился бы кварковыми петлями, так что результат учета скварковых петель сводится к вычитанию из выражения (28.6.27) такого же выражения с заменой M_Q на нуль, что после виковского поворота дает

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{S}\mathscr{S}^* \rangle &\to \frac{M_Q^2 i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(p^2 + M_Q^2 - i\varepsilon)(p^2 - i\varepsilon)} \\ &= -\frac{M_Q^2 i}{(2\pi)^4} \int_0^{M^2} \frac{\pi^2 dp^2}{p^2 + M_Q^2} \simeq -\frac{M_Q^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{M_Q^2}\right).\end{aligned}$$

Мы вставили ультрафиолетовое обрезание при массе переносчика M, так как при импульсах больше M масса скварка должна быть заменена на зависящую от импульса массу, которая при очень больших импульсах стремится к суперсимметричному значению нуль. Подставляя это в выражение (28.6.26), находим чистый вклад в потенциал от скварковых и кварковых петель:

$$(V_m)^{3\ \text{петли}} = \frac{3M_Q^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{M_Q^2}\right) \left[2|\lambda_b|^2 (\mathscr{H}_1^\dagger \mathscr{H}_1) + 2|\lambda_t|^2 (\mathscr{H}_2^\dagger \mathscr{H}_2)\right]. \qquad (28.6.28)$$

(Это трехпетлевой вклад, так как квадраты масс скварков заданы двухпетлевыми диаграммами. В потенциале также имеются слагаемые, квадратичные как по полям Хиггса, так и по скварковым полям, возникающие из произведений хиггсовских и скварковых членов в квадратах D-компонент $SU(2)\times U(1)$ калибровочного поля. Они не дают трехпетлевого вклада в хиггсовские массы, потому что сумма каждого из $SU(2)\times U(1)$ квантовых чисел скварков обращается в нуль, и поэтому их вклады в D-компоненты $SU(2)\times U(1)$ калибровочного поля имеют нулевые вакуумные средние.) Сравнивая (28.6.28) с (28.5.9) и добавляя двухпетлевой вклад

(28.6.23) к массам, видим, что

$$m_1^2 \simeq M_L^2 - \frac{3M_Q^2|\lambda_b|^2}{8\pi^2}\ln\left(\frac{M^2}{M_Q^2}\right), \tag{28.6.29}$$

$$m_2^2 \simeq M_L^2 - \frac{3M_Q^2|\lambda_t|^2}{8\pi^2}\ln\left(\frac{M^2}{M_Q^2}\right). \tag{28.6.30}$$

Используя выражение (28.6.14) и то, что $|\lambda_t| = m_t/v_2 = m_t(2\sqrt{2}G_F)^{1/2}/\sin\beta$, можно записать (28.6.30) как

$$\begin{aligned} m_2^2 \simeq & 2TM^2\left[\frac{3}{4}\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^2 + \frac{5}{12}\left(\frac{g'^2}{16\pi^2}\right)^2\right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{2}G_F m_t^2}{\pi\sin^2\beta}\left(\frac{g_s^2}{16\pi^2}\right)^2 \ln\left(\frac{3}{8T(g_s^2/16\pi^2)}\right)\right] \end{aligned} \tag{28.6.31}$$

При $T = 1$, $g_s^2/4\pi = 0,118$, $g^2/4\pi = 0,0340$, $g'^2/4\pi = 0,0101$ и $m_t = 180$ ГэВ, это равно величине

$$m_2^2 \simeq M_L^2\left[1 - \frac{3,06}{\sin^2\beta}\right], \tag{28.6.32}$$

которая отрицательна для всех значений β, что обеспечивает естественный механизм спонтанного нарушения электрослабой калибровочной симметрии. К тому же $M_L^2 = (0,91 \times 10^{-4})M^2/8\pi^2$. Пока $\operatorname{tg}\beta$ невелик, имеем $|\lambda_b| \ll |\lambda_t|$, поэтому соотношение (28.6.17) дает

$$m_2^2 \simeq M_L^2. \tag{28.6.33}$$

Те аспекты электрослабой феноменологии, для которых предсказания моделей с вызванным калибровочными полями нарушением суперсимметрии наиболее неопределенны и неудовлетворительны, связаны с параметром μ в сохраняющем суперсимметрию слагаемом $\mu[(H_1^{\mathrm{T}}eH_2)]_{\mathcal{F}}$ и связанном с ним слагаемым $B\mu$ в лагранжианне. Эти слагаемые связаны из-за того, что взаимодействия хиггсовских суперполей с калибровочными, лептонными и кварковыми суперполями инвариантны относительно преобразований симметрии

$$\begin{aligned} &H_1 \to e^{i\phi}H_1, && H_2 \to e^{i\phi}H_2, \\ &Q \to e^{-i\phi}Q, && V_i \to V_i, \\ &\bar{D} \to \bar{D}, && \bar{U} \to \bar{U}, \end{aligned} \tag{28.6.34}$$

что при отсутствии в суперпотенциале слагаемого $\mu(H_1^{\mathrm{T}}eH_2)$ запретило бы возникновение за счет радиационных поправок слагаемого $B\mu\,\mathrm{Re}(H_1^{\mathrm{T}}eH_2)$ в потенциале скалярного поля.

Слагаемое $B\mu$ не может исчезнуть, поскольку тогда соотношение (28.5.22) и тот факт, что (как мы видели) $m_A \neq 0$, означали бы, что $\sin 2\beta = 0$, или, другими словами, либо $v_1 = 0$, либо $v_2 = 0$. Это означало бы, что либо все кварки заряда $-e/3$ и заряженные лептоны, либо кварки заряда $+2e/3$ безмассовые. (Если $B\mu = 0$ и $\mu = 0$, то эта проблема сохраняется во всех порядках, так как появление ненулевого вакуумного среднего для обоих v_1 и v_2 означало бы, что симметрия относительно любой комбинации преобразования (28.6.34) и электрослабых $U(1)$ калибровочных преобразований спонтанно нарушена, так что C-нечетный нейтральный скаляр при $m_A = 0$ был бы голдстоуновским бозоном.) Естественно попытаться учесть ненулевое значение $B\mu$ как радиационную поправку в теории, в которой симметрия относительно преобразования (28.6.34) явно нарушена суперсимметричным слагаемым $\mu[(H_1^{\mathrm{T}}eH_2)]_{\mathscr{F}}$ в лагранжиане. Это дает очень малое значение для $B\mu$ на масштабе переносчика [34], хотя учет эффектов ренормгруппы значительно увеличивает значение $B\mu$ при более низких энергиях. Согласно (28.5.22), сравнительно малое значение $B\mu$ хорошо согласуется с той идеей, что большая масса t-кварка проистекает из большого значения $\mathrm{tg}\,\beta$. В любом случае, как уже упоминалось, экспериментальная нижняя граница массы чарджино позволяет делать вывод, что значение $|\mu|$ равно по крайней мере 60 ГэВ.

Трудность состоит в том, что появление ненулевого значения μ возрождает проблему иерархии, которую, как предполагалось, должна решить суперсимметрия: вместо вопроса о том, почему хиггсовские массовые члены в лагранжиане настолько меньше планковской массы или массы, при которой объединяются калибровочные взаимодействия, мы должны теперь спрашивать о том, почему столь мало μ.

Можно было бы оставить проблему иерархии в покое, если бы хиггсовские суперполя взаимодействовали с нарушающим суперсимметрию сектором таким образом, чтобы член $\mu[(H_1^{\mathrm{T}}eH_2)]_{\mathscr{F}}$ был запрещен какой-либо симметрией, но появлялся бы, когда эта симметрия спонтанно нарушена. Можно избежать появления безмассового голдстоуновского бозона, если симметрия не непрерывная, а дискретная. Простейшая возможность состоит в том, чтобы просто расширить преобразования симметрии (28.6.34), включив преобразования

$$S \to e^{-2i\phi} S,$$

что разрешило бы появление в суперпотенциале слагаемого вида

$$\lambda' S(\mathscr{H}_1^{\mathrm{T}} e \mathscr{H}_2).$$

Можно избежать непрерывной симметрии, включив также в суперпотенциал член S^3, так что лагранжиан становится инвариантным лишь относительно преобразований с φ, кратными $2\pi/3$, чего уже достаточно для запрещения ненулевых голых масс μ. В этом случае появление ненулевых вакуумных средних $\mathscr{S}$ и $\mathscr{F}$ для скалярной и аксиальной компонент S приводит к

$$B\mu = |\lambda'\mathscr{F}|, \quad \mu = |\lambda'\mathscr{S}|.$$

Отсюда следовало бы, что B имело бы очень большое не зависящее от $|\lambda'|$ значение M, определенное формулой (28.6.12), которое бы было примерно в $(g_s^2/16\pi)^{-1} \approx 100$ раз больше, чем массы скварка или глюино. Но тогда, поскольку из (28.6.32) и (28.6.33) следует, что $m_1^2 + m_2^2 < 0$, условие стабильности (28.5.11) потребовало бы, что $|\mu| \geqslant M/2$, и, следовательно, из соотношения (28.5.22) следовало бы, что m_A также много больше, чем массы скварка и слептона. Это запрещено соотношением (28.5.23) и оценками (28.6.33) и (28.6.32) на m_1^2 и m_2^2 до тех пор, пока $\operatorname{tg}\beta$ не очень близок к единице.

Мы увидим в разделе 31.6, что теории с вызванным гравитацией нарушением суперсимметрии дают приемлемые значения $B\mu$ и μ. Такие теории характеризуются очень большим масштабом нарушения суперсимметрии, от 10^{11} Гэв до 10^{13} ГэВ в различных версиях. Было несколько предложений [34] относительно способов получения приемлемых значений $B\mu$ и μ в теориях, в которых суперсимметрия нарушена при относительно низких энергиях, таких, как теории вызванного калибровочными полями нарушения суперсимметрии, но ни одно из них не кажется особенно привлекательным. Кроме того, так как мы не знаем, откуда взялось μ, у нас нет никаких оснований предполагать, что оно действительно, поэтому теории вызванного калибровочными полями нарушения суперсимметрии рискуют привести к слишком большому нарушению CP, так же, как это произошло в более широком контексте в разделе 28.4.

Подобно квадратам масс скаляров m_1^2 и m_2^2, параметры A_{ij} и C_{ij} в (28.4.1) даются двухпетлевыми диаграммами. Однако они имеют размерности масс, а не квадратов масс, и много меньше, чем массы скаляров и калибрино, потому они вносят сравнительно несущественный вклад в нарушение суперсимметрии.

Как в любой модели с суперсимметрией, нарушенной при энергиях, много меньших, чем 10^{10} ГэВ, во всех моделях, основанных на вызванном калобровочными полями нарушением суперсимметрии самой легкой R-нечетной частицей является гравитино. Как мы увидим в разделе 31.3, масса гравитино порядка $\sqrt{G}$, умноженному на квадрат характерной для нарушения суперсимметрии энергии F, определенной так, что энергия вакуума есть $F^2/2$. Там, где суперсимметрия нарушена $\mathscr{F}$-членами $\mathscr{F}_{n0}$

$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ нейтральных суперполей S_n, имеем $F^2=\sum_n|\mathscr{F}_{n0}|^2$. Если в лагранжиане для S_n нет больших безразмерных величин, то массы скварков в этой модели порядка $g_s^2\sqrt{F}/16\pi^2\approx 10^{-2}\sqrt{F}$, и для того, чтобы по порядку величины это было меньше, чем естественная граница 10^4 ГэВ, необходимо, чтобы $\sqrt{F}<10^6$ ГэВ, что дает массу гравитино меньшую, чем 1 кэВ. Гравитационные взаимодействия при доступных энергиях столь малы, что реально могут рождаться только состояния гравитино спиральностью $\pm 1/2$, и их поведение такое же, как и состояний голдстино. Как следует из формулы (27.5.12), в обсуждаемых здесь моделях поле голдстино появляется в фермионной компоненте ψ_n суперполей S_n с коэффициентом $i\sqrt{2}\mathscr{F}$. Голдстино испускается в распаде R-нечетных счастиц на соответствующие R-четные частицы стандартной модели через радиационные поправки, с голдстино, исходящими из вершин, соединяющих внутренние линии ψ_n и $\mathscr{S}_n$. В соответствии с формулой (29.2.10), амплитуды испускания голдстино обратно пропорциональны F, что делает эти распады сравнительно маловероятными, хотя, возможно, достаточно быстрыми для того, чтобы быть замеченными.

Так как распад R-нечетных частиц в голдстино медленный, то в этих моделях феноменологически важно установить следующую по массе за самой легкой R-нечетную частицу, в которую все более тяжелые R-нечетные частицы будут распадаться до того, как она, в свою очередь, распадется в голдстино. Как мы видели, следующей по массе за самой легкой R-нечетной частицей обычно является слептон, вино или бино. (В моделях с суперполем-переносчиком с теми же $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ квантовыми числами, что и квантовое число хиггсовских дублетов возможно, что смешивание между этими суперполями понизит массу дублетов переносчиков столь значительно, что самой легкой R-нечетной частицей станет глюино [35а].) Детальные вычисления, включающие эффекты нарушения $SU(2)\times U(1)$, показывают, что в пространстве параметров имеется большая область, в которой следующей по массе за самой легкой R-нечетной частицей является один из двух тау-слептонов [35б].

28.7. Несохранение барионов и лептонов

Дополнительные частицы в суперсимметричных моделях предоставляют несколько новых механизмов несохранения барионов и лептонов. Мы видели в разделе 28.1, что существуют различные суперсимметричные операторы (28.1.2), (28.1.3) размерности четыре, которые не сохраняют барионные и лептонные числа и которые могут быть включены в перенормируемую $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ инвариантную теорию, что приводит к катастрофической вероятности процессов типа распада протона. Эти члены могут быть исключены из лагранжиана наложением условия сохранения R-четности (или, эквивалентно, инвариантности относительно смены знака всех кварковых и лептонных киральных суперполей), но это не исключает различные $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ инвариантные операторы размерности $d>4$, которые, однако, не сохраняют барионные и лептонные числа. Как обсуждалось в разделе 21.3, если существует какой-то механизм несохранения барионов и лептонов, характеризуемый некоторым большим масштабом масс M, тогда это операторы появятся в эффективном лагранжиане стандартной модели с коэффициентами, пропорциональными M^{4-d}. Если ограничиться полями несуперсимметричной стандартной модели, операторы, которые могут нарушить сохранение барионов, имеют минимальную размерность 6 [36] и, таким образом, приводят к несохраняющим барионное число амплитудам, пропорциональным M^{-2}. Новые поля, требуемые суперсимметрией, приводят к двум важным изменениям в оценках процессов с несохранением барионов, таким, как распады протона и связанного нейтрона. Как мы видели в разделе 28.2, изменения в уравнениях ренормгруппы приводят к бо́льшей оценке M, что уменьшает эффект операторов размерности 6. В то же время, эти новые поля позволяют построить новые операторы размерности 5, которые приводят к несохраняюшим барионное число амплитудам, пропорциональным M^{-1}, и поэтому вносят, возможно, доминирующий вклад в распад протона и связанного нейтрона [37].

Суперсимметричные операторы размерности 5, которые могут быть образованы из киральных суперполей (обычно обозначаемых Φ), имеют вид $(\Phi^*\Phi\Phi)_D$ и $(\Phi\Phi\Phi\Phi)_{\mathscr{F}}$ и им комплексно сопряженных. (Мы не рассматриваем операторы, которые включают производные или калибровочные поля, потому что они не приводят к какой-либо дополнительной возможности несохранения барионов и лептонов.) В обозначениях раздела 28.1 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$-инвариантные операторы размерности 5, которые также сохраняют R-четность, имеют вид

$$(LLH_2H_2)_{\mathscr{F}}, \tag{28.7.1}$$

$$(L\bar{E}H_2^*)_D, \quad (Q\bar{D}H_2^*)_D, \quad (Q\bar{U}H_1^*)_D, \quad (QQ\bar{U}\bar{D})_{\mathscr{F}}, \quad (Q\bar{U}L\bar{E})_{\mathscr{F}}, \tag{28.7.2}$$

и

$$(QQQL)_{\mathscr{F}}, \quad (\bar{U}\bar{U}\bar{D}\bar{E})_{\mathscr{F}}, \tag{28.7.3}$$

с очевидной сверткой индексов, как это требуется $SU(3)$ и $SU(2)$ сохранением. Взаимодействие (28.7.1) — суперсимметричная версия оператора размерности пять, который в некоторых теориях [38] может привести к появлению малых масс нейтрино. Взаимодействия (28.7.2) приводят лишь к малым поправкам к процессам, которые уже появились в перенормируемых

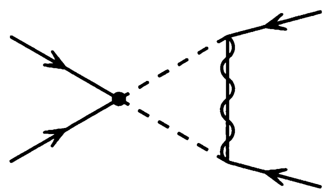

Рис. 28.7. Диаграмма, порождающая четырехфермионное взаимодействие между кварками и(или) лептонами, которое нарушает сохранение баронного и лептонного чисел. Здесь сплошные линии — кварки и(или) лептоны, пунктирные линии — скварки и(или) слептоны, комбинированная сплошная и волнистая линия — калибрино, точка — вершина, появляющаяся непосредственно из взаимодействий $\mathscr{F}$-члена (28.7.3).

слагаемых суперсимметричной стандартной модели. И только взаимодействия (28.7.3) приводят к новым механизмам несохранения как барионов, так и лептонов.

В соответствии с формулой (26.4.4), кварки и лептоны входят во взаимодействия (28.7.3) в членах, включающих пары кварковых и(или) лептонных полей и пары скварковых и(или) слептонных полей. Для того, чтобы породить процессы лишь между кварками и лептонами, необходимо пары скварков и(или) слептонов превратить в пары кварков и(или) лептонов путем обмена калибрино в однопетлевой диаграмме, показанной на рис. 28.7. Это породит эффективные четырехфермионные $qq q\ell$-взаимодействия с $d = 6$ между тремя кварками и лептоном. Константа этих взаимодействий g_6 будет пропорциональна квадрату калибровочных констант g, g' или g_s для калибрино, пропорциональна нарушающей суперсимметрию массе гейджино, обратно пропорциональна квадрату наибольшей из масс калибрино и скварка и(или) слептона (которая необходима для того, чтобы придать константе нужную размерность), и пропорциональна множителю порядка $1/8\pi^2$ от интегрирования по петле.

Можно думать, что бо́льшая сила взаимодействия глюино делает обмен глюино доминирующим вкладом в g_6. (В самом деле, в теориях с вызванным калибровочными полями нарушением суперсимметрии для умеренных значений следа (28.6.3) и при $g \approx g'$ формулы (28.6.13–28.6.14) приводят к

$$m_{\text{глюино}} \approx m_{\text{скварк}} \approx \frac{g_s^2}{16\pi^2} M_*,$$

$$m_{\text{вино}} \approx m_{\text{слептон}} \approx m_{\text{бино}} \approx \frac{g^2}{16\pi^2} M_*,$$

где M_* — масса, характеризующая сектор переносчиков. Поэтому в таких теориях диаграммы с обменом отдельными глюино дают вклады, пропорциональные $g_s^2/m_{\text{глюино}}$, тогда как взаимодействие вино или бино (или, более точно, обмен чарджино или нейтралино) приводит к вкладам, пропорциональным $g^2 m_{\text{вино}}/m^2_{\text{скварк}}$ которые меньше на множитель, равный $g^2 m_{\text{вино}}/g_s^2 m_{\text{глюино}} \approx g^4/g_s^4$). Однако, между диаграммами с обменом глюино происходит сокращение, сильно подавляющее их вклад. Это было первоначально показано с использованием тождества Фирца для четырехфермионных операторов [39], но такой же результат можно получить и вовсе без формул. Для сохранения цвета коэффициенты операторов $(QQQL)_{\mathcal{F}}$ и $(\bar{U}\bar{U}\bar{D}\bar{E})_{\mathcal{F}}$ должны быть полностью антисимметричны по цветам трех кварковых и антикварковых суперполей, и так как эти суперполя являются бозонами, они должны быть антисимметричными также и по их ароматам. Взаимодействия глюино не зависят от аромата, и поэтому, если мы можем пренебречь зависимостью от аромата масс скварков, то коэффициенты четерехфермионных $d = 6$ операторов также будут антисимметричны по ароматам и по цветам. Следовательно, статистика Ферми требует, чтобы коэффициенты этих операторов также были антисимметричны по спиновым индексам кварковых или антикварковых полей. Но все три кварковых или антикварковых поля в $d = 6$ операторах, полученных за счет обмена калибрино из $(QQQL)_{\mathcal{F}}$ или $(\bar{U}\bar{U}\bar{D}\bar{E})_{\mathcal{F}}$, являются левыми и, следовательно, имеют лишь два независимых спиновых индекса, поэтому не может быть коэффициента, антисимметричного по всем трем спинам. Вклад от обмена глюино в $d = 6$ операторах будет, таким образом, равен нулю, если все массы скварков равны между собой. Поэтому такой вклад подавлен частичными разностями между массами различных скварков. В соответствии с уравнением (28.6.4), в теориях с вызванным калибровочными полями нарушением суперсимметрии частичные разности между массами скварков $\bar{U}$ и $\bar{D}$ порядка g'^4/g_s^4, так что обмен глюино между антискварками в $(\bar{U}\bar{U}\bar{D}\bar{E})_{\mathcal{F}}$ операторе порождают четырехфермионный оператор размерности шесть с коэффициентом того же порядка, что и порожденный обменом бино. Однако, так как глюино сохраняют аромат, этот оператор, подобно оператору $(\bar{U}\bar{U}\bar{D}\bar{E})_{\mathcal{F}}$, должен быть полностью антисимметричен по антикварковым ароматам, так как он должен включать c- и t-кварки, и потому не может непосредственно давать вклад в распад протона или связанного нейтрона. С другой стороны, уравнение (28.6.4) демонстрирует, что частичные разности масс между Q кварками различных ароматов по порядку величины много меньше g^4/g_s^4, и потому обмен глюино между скварками в операторе $(QQQL)_{\mathcal{F}}$ дает вклад в g_5, который много меньше, чем при обмене вино или бино. Мы заключаем, что, по крайней мере в теориях с вызванным калибровочными полями нарушением суперсимметрии, обмен глюино дает меньший вклад в распад протона или связанного нейтрона, чем обмен вино или бино. В других моделях обмен глюино может дать вклад, сравнимый с вкладами от других процессов [40].

При $g \approx g'$ и $m_{\text{вино}} \approx m_{\text{бино}}$ вклады от обмена вино или бино в операторы размерности шесть порядка

$$g_6 \approx \frac{g^2 g_5 m_{\text{вино}}}{8\pi^2 m^2_{\text{скварк}}} \tag{28.7.4}$$

где g_5 — типичная величина эффективных взаимодействий с $d = 5$ (28.7.3). Если массы вино и скварка имеют то же отношение (g^2/g_s^2), как в теориях с вызванным калибровочными полями нарушением суперсимметрии, то это приводит к

$$g_6 \approx \frac{g^4 g_5}{8\pi^2 g_s^2 m_{\text{скварк}}} \tag{28.7.5}$$

Четырехфермионные $qq\ell$-члены размерности шесть в эффективном лагранжиане те же самые, что и те, которые, по предположению, генерировали процессы, подобные распаду протона, в несуперсимметричных теориях [36]. Они приводят к распаду протона и связанного нейтрона с вероятностью, которая по размерным соображениям должна иметь вид

$$\Gamma_N = c_N m_N^5 g_6^2, \tag{28.7.6}$$

где c_N — обычное число, которое должно вычисляться непертурбативными методами в рамках квантовой хромодинамики. На эти вычисления было потрачено много труда, и результаты [41] лежат в диапазоне $c_N \approx 3 \times 10^{-3\pm0{,}7}$.

Для оценки g_5 заметим, что невозможно породить $\mathcal{F}$-члены, подобные (28.7.3), которые бы включали лишь левокиральные суперполя за счет обмена в древесном приближении калибовочными супермультиплетами, которые всегда взаимодействуют как с левокиральными суперполями, так и с их правокиральными комплексно сопряженнными суперполями. Поэтому взаимодействия (28.7.3) возникают в древесном приближении только от обмена частицами киральных суперполей, и, следовательно, величина g_5 имеет порядок g_T^2/M_T^2, где g_T — типичная константа не сохраняющего барионное или лептонное число взаимодействия некоторого сверхтяжелого левокирального суперполя массой M_T с кварковым и лептонным суперполями. Чтобы породить взаимодействия (28.7.3), эти сверхтяжелые частицы должны быть цветовыми триплетами или антитриплетами, и триплетами или синглетами относительно $SU(2)$. Какая бы калибровочная группа не объединяла сильное и электрослабое взаимодействия, по-видимому, она диктует некоторое соотношение между взаимодействиями сверхтяжелого триплета T и знакомого цветового синглета H_1 и H_2. Тогда g_T будет того же порядка, что и константы юкавского взаимодействия во взаимодействиях (28.1.2) и (28.1.3), которые дают массу известным лептонам и кваркам, и которые равны массам кварков или лептонов, деленным на вакуумные среднее $\mathscr{H}_1^0$ или $\mathscr{H}_2^0$ порядка $G_F^{-1/2} \approx 300$ ГэВ. Мы, следовательно, полагаем

$$g_5 \approx \frac{G_F m_f^2}{M_T}, \tag{28.7.7}$$

где m_f — некоторая типичная масса кварка или лептона. Мы видели, что операторы размерности пять антисимметричны по кварковым ароматам, так что в качестве компромисса между массой s-кварка и массами u- и d-кварков выберем $m_f = 30$ МэВ. Собирая формулы (28.7.5)–(28.7.7) и взяв $M_T = 2 \times 10^{16}$ ГэВ (как это следует из результатов раздела 28.2), $c_N = 0{,}003$, $g_s^2/4\pi = 0{,}118$, $g^2/4\pi = 1/(0{,}23 \times 137)$ и $m_{\text{скварк}} = 1$ ТэВ, получим время жизни протона (или связанного нейтрона) Γ_N^{-1} примерно 2×10^{31} лет [42]. Это не очень отличается от экспериментальных нижних границ на парциальные времена жизни тех мод распада протонов, которые считаются основными, и по разным оценкам, составляют от 10^{31} до 5×10^{32} лет. В момент написания этого раздела наиболее жесткие ограничения были установлены ненаблюдением распада протона в большом детекторе нейтрино «Супер Камиоканде» в Японии [42]: парциальные времена жизни для распадов $p \to e^+\pi^0$ и $p \to \bar{\nu}K^+$ больше, чем $2{,}1 \times 10^{33}$ и $5{,}5 \times 10^{32}$ лет соответственно. В приведенных выше оценках теоретического времени жизни существует неопределенность по меньшей мере в 100 раз, связанная только с неопределенностью массы скварка, так что еще слишком рано говорить, что существует какое-то расхождение между экспериментом и теоретическими ожиданиями. С другой стороны, суперсимметрия указывает на возможность скорого открытия несохранения барионов.

Мы можем также кое-что сказать из общих соображений об ожидаемых относительных вероятностях разных мод распада протона и связанного нейтрона. Как мы упоминали, операторы размерности пять (28.7.3) должны быть полностью антисимметричными по ароматам кварковых суперполей, так что единственные операторы, которые здесь следует рассмотреть, имеют вид $(U_i D_j D_k N_\ell)_{\mathscr{F}}$, $(D_i U_j U_k E_\ell)_{\mathscr{F}}$ и $(\bar{D}_i \bar{U}_j \bar{U}_k \bar{E}_\ell)_{\mathscr{F}}$, где i, j, k, ℓ — индексы генераторов, и для каждого случая $j \neq k$. Тогда обмен нейтральными вино или бино породит $d = 6$ четырехфермионные операторы вида $u_i d_j d_k \nu_\ell$, $d_i u_j d_k e_\ell$ и $\bar{d}_i \bar{u}_j \bar{u}_k \bar{e}_\ell$ с $j \neq k$ и произвольными i и ℓ, в то время как процесс обмена заряженным вино породит те же четырехфермионные операторы с произвольными $i \neq j$ и k и ℓ. Единственные кварки, достаточно легкие для того, чтобы участвовать в распаде протона, — это u, s и d. Пренебрегая остальными кварками и малыми углами смешивания для третьего поколения, имеем

$$u_1 = u, \quad d_1 = d\cos\theta_c + s\sin\theta_c, \quad d_2 = -d\sin\theta_c + s\cos\theta_c,$$

где θ_c — угол Кабиббо, при этом u_2, u_3 и d_3 можно проигнорировать. Четырехфермионные операторы, которые могут быть порождены обменом вино или бино и дают вклад в распад протона или связанного нейтрона, следовательно, имеют вид $uds\nu_\ell \cos(2\theta_c)$, $udd\nu_\ell \sin(2\theta)$, $uuse_\ell \cos\theta_c$ и $uude_\ell \sin\theta_c$ плюс остальные операторы, которые получаются заменой кварков и лептонов на антикварки и антилептоны. Поэтому при прочих равных условиях доминирующими модами распада будут $p \to K^+\bar{\nu}$, $n \to K^0\bar{\nu}$, $p \to K^0 e^+$ и $p \to K^0\mu^+$, тогда как моды $p \to \pi^+\bar{\nu}$, $n \to \pi^0\bar{\nu}$, $p \to \pi^0 e^+$, $p \to \pi^0\mu^+$ и $n \to \pi^- e^+$ подавлены факторами $\sin^2\theta_c = 0{,}05$, хотя и несколько усилены за счет бóльшего доступного фазового пространства.

Эти рассуждения не ведут к определенным предсказаниям для относительных вероятностей, так как в дополнение ко всем вышеупомянутым факторам коэффициенты g_5 операторов (28.7.3) могут сильно зависеть от ароматов появляющихся в этих операторах суперполей. Для дальнейшего продвижения необходима конкретная теория генерации операторов размерности пять. Большинство авторов работ [42] на основе суперсимметричных версий $SU(5)$-теорий делают заключение, что в распадах протона и связанного нейтрона будут доминировать моды $p \to K^+\bar{\nu}$ и $n \to K^0\bar{\nu}$, но для моделей, основанных на группе $SO(10)$, моды с заряженными лептонами могут стать преобладающими [43]. Кроме того, в некоторых моделях обмен хиггсино может составить конкуренцию обмену вино и бино [44], увеличивая вероятность распада $p \to K^+\bar{\nu}$. Представляется разумным при поиске несохранения барионов относиться непредвзято к тому, на какие моды ожидается распад протона и связанного нейтрона.

Возможно, конечно, что все эти процессы с несохранением барионов запрещены неким законом сохранения. Как упоминалось в разделе 28.1, в теории струн имеются доводы против того, чтобы сохранение барионов было фундаментальной глобальной непрерывной симметрией, однако не сохраняющие барионное число операторы (28.7.3) могут быть запрещены $\mathbb{Z}_3$ мультипликативной симметрией, известной как барионная четность [45], относительно которой суперполе Q нейтрально; суперполя H_2 и $\bar{D}$ домножаются на фазовый множитель $\exp(i\pi/3)$, а суперполя L, H_1, $\bar{U}$ и $\bar{D}$ домножаются на противоположный фазовый множитель $\exp(-i\pi/3)$. Эта симметрия разработана для того, чтобы допустить фундаментальные юкавские взаимодействия (28.1.2) и (28.1.3), равно как и μ-член (28.5.7) и не сохраняюшие лептонное число слагаемые (28.1.4) и (28.7.1), и при этом запретить не сохраняющие барионное число слагаемые (28.1.5) размерности четыре и (28.7.3) размерности пять. Эта симметрия спонтанно нарушается при наличии вакуумных средних $\mathscr{H}_1^0$ и $\mathscr{H}_2^0$ (и, возможно, полей снейтрино $\mathscr{N}$), и без закона сохранения R-четности не было бы ничего, что сохраняло бы стабильной самую легкую суперсимметричную частицу.

Задачи

1. Предположим, что взаимодействия (28.1.4) и (28.1.5) на самом деле присутствуют в лагранжиане суперсимметричной версии стандартной модели. Сделайте грубую оценку, насколько тяжелыми должны были бы быть скварки и слептоны, чтобы избежать противоречия с экспериментальными ограничениями на время жизни протона.

2. Предположим, что типичная масса m калибрино, хиггсино, скварков и слептонов значительно больше m_Z. Запишите уравнения ренормгруппы для бегущих калибровочных констант связи при энергиях выше и ниже m. Используйте эти результаты, наряду с предположением об объединении, использованном в разделе 28.2, чтобы получить формулы для $\sin\theta$ и масштаба объединения M, выраженные через m, m_Z, $e(m_Z)$, $g_s(m_Z)$ и n_s. Насколько велика может быть масса m без нарушения экспериментальных ограничений на $\sin\theta$ и M?

3. Получите формулы для взаимодействий кварков и лептонов с самой легкой CP-четной скалярной частицей в минимальной суперсимметричной стандартной модели, записанные через параметры m, m_Z, β, G_F и массы кварков и лептонов.

4. Воспользуйтесь рассуждениями об аналитичности для вывода однопетлевой формулы для массы глюино в теории с вызванным калибровочными полями нарушением суперсимметрии, при которой суперполя-переносчики Φ_n и $\bar{\Phi}_n$ приобретают массы за счет слагаемого $\sum_n \lambda_n S_n(\bar{\Phi}_n\Phi_n)$ в суперпотенциале через вакуумные средние $\mathscr{S}_n$ и $\mathscr{F}_n$ φ- и $\mathscr{F}$-компонент синглетного суперполя S_n и в пределе $|\mathscr{F}_n| \ll |\lambda_n||\mathscr{S}_n|^2$.

5. Принимая в расчет возможность слабой зависимости масс скварков от аромата, оцените вклад обмена глюино в несохраняющие лептонное и барионное числа четырехфермионные взаимодействия кварков и лептонов. Установите верхнюю границу на эти вклады, используя вытекающие из вероятности $K^0 \to \bar{K}^0$ перехода ограничения на расщепления масс скварка.

Список литературы

1. Мы не будем здесь рассматривать возможность объединения при гораздо меньших энергиях, вопрос о которой был поднят в работах I. Antoniadis, *Phys. Lett.* **B246**, 377 (1990); J. Lykken,

Phys. Rev. **D54**, 3693 (1996), и был вновь рассмотрен в работе: N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *Phys. Rev. Lett.* **B429**, 263 (1998); I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *Phys. Rev. Lett.* **B436**, 257 (1998).

1a. S. Weinberg, in *Proceedings of the XVII International Conference on High Energy Physics*, London, 1974, J. R. Smith, ed. (Rutherford Laboratory, Chilton, Didcot, England, 1974); S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D13**, 974 (1976); E. Gildener and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D13**, 3333 (1976).

1б. T. Banks and L. Dixon, *Nucl. Phys.* **B307**, 93 (1988). Для детального рассмотрения см.: J. Polchinski, *String Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998): Chapter 18.

2. Дополнительные законы R-сохранения были введены в работе: A. Salam and J. Strathdee, *Nucl. Phys.* **B87**, 85 (1975); P. Fayet, *Nucl. Phys.* **B90**, 104 (1975), перепечатана в сб. *Supersymmetry*, S. Ferrara, ed., (North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapore, 1987). R-четность может быть определена через квантовое число R как $\exp(i\pi R)$, и может сохраняться при умножении, даже если само R не сохраняется при сложении. См. G. Farrar and P. Fayet, *Phys. Lett.* **76B**, 575 (1978); P. Fayet, in *Unification of the Fundamental Particle Interactions*, S. Ferrara, J. Ellis, and P. van Nieuwenhuizen, eds. (Plenum, New York, 1980); S. Dimopoulos, S. Raby, and F. Wilczek, *Phys. Lett.* **112B**, 133 (1982); G. Farrar and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D27**, 1731 (1983), перепечатана в сб.: *Supersymmetry*.

3. S. Dimopoulos and H. Georgi, *Nucl. Phys.* **B193**, 150 (1981), перепечатана в сб.: *Supersymmetry* [2].

4. R. D. Peccei and H. R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440 (1977); *Phys. Rev.* **D16**, 1791 (1977).

4a. S. Dimopoulos and G. F. Giudice, *Phys. Lett.* B357, 573 (1995); A. Pomerol and D. Tommasini, *Nucl. Phys.* **B466**, 3 (1996); G. Dvali and A. Pomerol, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3728 (1996); *Nucl. Phys.* **B522**, 3 (1998); A. G. Cohen, D. B. Kaplan, and A. E. Nelson, *Phys. Lett.* **B388**, 588 (1996); R. N. Mohapatra and A. Riotto, *Phys. Rev.* **D55**, 1 (1997); R.-J. Zhang, *Phys. Lett.* **B402**, 101 (1997); H. P. Nilles and N. Polonsky, *Phys. Lett.* **B412**, 69 (1997); D. B. Kaplan, F. Lepeintre, A. Masiero, A. E. Nelson, and A. Riotto, hep-ph/9806430, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 055003; J. Hisano, K. Kurosawa, and Y. Nomura, *Phys. Lett.* **B445**, 316 (1999). Этот пример масс может возникнуть естественным образом из радиационных поправок; см. J. L. Feng, C. Kolda, and N. Polonsky, *Nucl. Phys.* **B546**, 3 (1999);

J. A. Bagger, J. L. Feng, and N. Polonsky, hep-ph/9905292, *Nucl. Phys.* **B563** 320 (1999).

4б. B. W. Lee and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 165 (1977); D. A. Dicus, E. W. Kolb, and V. L. Teplitz, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 168 (1977).

4в. S. Wolfram, *Phys. Lett.* 82B, 65 (1979); J. Ellis, J. S. Hagelin, D. V. Nanopoulos, D. Olive, and M. Srednicki, *Nucl. Phys.* **B238**, 453 (1984).

4г. P. F. Smith and J. R. J. Bennett, *Nucl. Phys.* **B149**, 525 (1979).

5. H. Georgi, H. R. Quinn, and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 451 (1974).

6. S. Dimopoulos and H. Georgi [3]; J. Ellis, S. Kelley, and D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett.* **B260**, 131 (1991); U. Amaldi, W. de Boer,and H. Furstmann, *Phys. Lett.* **B260**, 447 (1991); C. Giunti, C. W. Kim and U. W. Lee, *Mod. Phys. Lett.* **16**, 1745 (1991); P. Langacker and M.-X. Luo, *Phys. Rev.* **D44**, 817 (1991). Для остальных ссылок и более современных результатов обработки данных, см. P. Langacker and N. Polonsky, *Phys. Rev.* **D47**, 4028 (1993); D49, 1454 (1994); L. J. Hall and U. Sarid, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2673 (1993).

7. S. Dimopoulos, S. Raby, and F. Wilczek, *Phys. Rev.* **D24**, 1681 (1981), перепечатано в сб.: *Supersymmetry* [2].

7a. P. Hořava and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B460, 506** (1996); ibid. **B475**, 94 (1996); E. Witten, *Nucl. Phys.* **B471**, 135 (1996); P. Hořava, *Phys. Rev.* **D54**, 7561 (1996).

8. H. Pagels and J. R. Primack, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 223 (1982).

9. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1303 (1983).

10. S. Dimopoulos and H. Georgi [3]; N. Sakai, *Z. Phys. C.* **11**, 153 (1981). См. также обзоры H. E. Haber and G. L. Kane, *Phys. Reports* **117**, 75 (1985); J. A. Bagger, in *QCD and Beyond: Proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics*, University of Colorado, June 1995, D. E. Soper, ed. (World Scientific, Singapore, 1996); V. Barger, in *Fundamental Particles and Interactions: Proceedings of the FCP Workshop on Fundamental Particles and Interactions*, Vanderbilt University, May 1997, R. S. Panvini, T. J Weiler, eds. (American Institute of Physics, Woodbury, NY, 1998); J. F. Gunion, in *Quantum Effects in the MSSM* Proceedings of the International Workshop on Quantum Effects in the MSSM. Barcelona. September 1997, J. Sola, ed. (World Scientific Publishing, Singapore, 1998); S. Dawson, in Proceedings of the 1997

Theoretical Advanced Study Institute on Supersymmetry, Supergravity, and Supercolliders, J. A. Bagger, ed. (World Scientific, Singapore, 1998); S. P. Martin, in *Perspectives on Super symmetry*, G. L. Kane, ed. (World Scientific, Singapore, 1998); K. R. Dienes and C. Kolda, in *Perspectives on Supersymmetry*, ibid.

11. S. Dimopoulos and D. Sutter, *Nucl. Phys.* **B194**, 65 (1995); H. E. Haber, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **62**, 469 (1998).

12. S. Dimopoulos and H. Georgi [3]; J. Ellis and D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett. HOB*, 44 (1982); J. F. Donoghue, H. P. Nilles, and D. Wyler, *Phys. Lett.* **128B**, 55 (1983). Для поправок сильного взаимодействия к этим вычислениям, см. J. A. Bagger, K. T. Matchev, and R.-J. Zhang, *Phys. Lett.* **B412**, 77 (1997). Условия, при которых ограничения на процессы с изменением аромата не налагают ограничений на массы кварков, обсуждалось в работах: R. Barbieri and R. Gatto, *Phys. Lett. HOB*, 211 (1981); Y. Nir and N. Seiberg, *Phys. Lett.* **B309**, 337 (1993). Детальный обзор см.: F. Gabbiani, E. Gabrielli, A. Masiero, and L. Silvestrini, *Nucl. Phys.* **B477**, 321 (1996).

13. M. K. Gaillard and B. W. Lee, *Phys. Rev.* **D10**, 897 (1974).

14. J. Ellis and D. V. Nanopoulos [12]. Подробные результаты даны F. Gabbiani and A. Masiero, *Nucl. Phys.* **B322**, 235 (1989); J. S. Hagelin, S. Kelley, and T. Tanaka, *Nucl. Phys.* **B415**, 293 (1994). Наиболее полное рассмотрение см. в работе: D. Sutter, Stanford University Ph. D. thesis (unpublished) and S. Dimopoulos and D. Sutler [11].

14a. M. Dine, R. Leigh, and A. Kagan, *Phys. Rev.* **D48**, 4269 (1993).

15. Более современные обзоры см.: Y. Grossman, Y. Nir, and R. Rattazzi, in *Heavy Flavours II*, A. J. Buras and M. Lindner, eds. (World Scientific, Singapore, 1998); A. Masiero and L. Silvestrini, in *Perspectives on Supersymmetry* [10].

16. J. Ellis and M. K. Gaillard, *Nucl. Phys.* **B150**, 141 (1979); D. V. Nanopoulos, A. Yildiz, and R. H. Cox, *Ann. Phys.* (N.Y.) **127**, 126 (1980); M. B. Gavela, A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pene, J.-C. Raynal, and T. N. Pham, *Phys. Lett.* **109B**, 215 (1982); B. H. J. McKellar, S. R. Choudhury, X-G. He, and S. Pakvasa, *Phys. Lett.* **B197**, 556 (1987).

16a. P. G. Harris et al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 904 (1999).

17. J. Ellis, S. Ferrara, and D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett.* **114B**, 231 (1982); J. Polchinski and M. B. Wise, *Phys. Lett.* **125B**, 393 (1983); M. Dugan, B. Grinstein, and L. J. Hall, *Nucl. Phys.* **B255**, 413 (1985).

18. R. Arnowitt, J. Lopez, and D. V. Nanopoulos, *Phys. Rev.* **D42**, 2423 (1990); R. Arnowitt, M. J. Duff, and K. S. Stelle, *Phys. Rev.* **D43**, 3085 (1991); Y. Kizuri and N. Oshimo, *Phys. Rev.* **D45**, 1806 (1992).

19. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2333 (1989); D. A. Dicus, *Phys. Rev.* **D41**, 999 (1990); J. Dai, H. Dykstra, R. G. Leigh, S. Paban, and D. A. Dicus, *Phys. Lett.* **B237**, 216 (1990); E. Braaten, C. S. Li, and T. C. Yuan, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1709 (1990); A. de Rujula, M. B. Gavela, O. Pene, and F. J. Vegas, *Phys. Lett.* **B245**, 640 (1990); R. Arnowitt, M. J. Duff, and K. S. Stelle [18]; T. Ibrahim and P. Nath, *Phys. Lett.* **148B**, 98 (1998).

20. K. S. Babu, C. Kolda, J. March-Russell, and F. Wilczek, *Phys. Rev.* **059**, 016004 (1999).

21. R. Arnowitt, M. J. Duff, and K. S. Stelle [18]. С помощью функций J_1 и J_2 в этой работе: функция J выражена как $2J_1 + \frac{2}{3}J_2$, в предположении, что диаграммы с глюонами конструктивно присоеденены к линиям скварков или глюино.

22. H. Georgi and L. Randall, *Nucl. Phys.* **B276**, 241 (1980); A. Manohar and H. Georgi, *Nucl. Phys.* **B238**, 189 (1984); S. Weinberg [19].

23. W. Fischler, S. Paban, and S. Thomas, *Phys. Lett.* **B289**, 373 (1992).

24. J. Ellis and D. V. Nanopoulos [12]; F. Gabbiani and A. Masiero [14]; M. Dine, A. Kagan, and S. Samuel, *Phys. Lett.* **B243** 250 (1990); F. Gabbiani, E. Gabrielli, A. Masiero, and L. Silvestrini [12].

25. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 223 (1978); F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 279 (1978).

26. A. Brignole, J. Ellis, G. Ridolfi, and F. Zwirner, *Phys. Lett.* **B271**, 123 (1991); M. Carena, M. Quiros, and C. E. M. Wagner, *Nucl. Phys.* **B461**, 407 (1996); S. Heinemayer, W. Hollik, and G. Weiglein, hep-ph/9812472 *Eur. Phys. J.* **C9** (1999) 343-366, hep-ph/9903404 *Phys. Lett.* **B455** (1999) 179-191, hep-ph/9903504 *Acta Phys. Polon.* **B30** (1999) 1985-1997. Численные результаты для m_h, цитировавшиеся тут, взяты из работы S. Dawson [10].

27. R. Barate et al. (ALEPH collaboration), *Phys. Lett.* **B412**, 173 (1997).

27a. M. Grünewald and D. Karlen, in *Proceedings of the XXIX Inter-national Conference on High Energy Nuclear Physics*, A. Astbury, D. Axen, and J. Robinson, eds. (TRIUMF, Vancouver, 1999).

28. R. Barate et al. (ALEPH collaboration), 1999 CERN preprint EP-99-011, to be published in *Phys. Lett.* Нижняя граница в 54.5 ГэВ было получена

ранее из экспериментов по $e^+ - e^-$-аннигиляции в диапазоне от 130 до 172 ГэВ: P. Abreu et al. (DELPHI collaboration), *Phys. Lett.* **B420**, 140 (1998).

29. A. J. Buras, M. Misiak, M. Münz, and S. Pokorski, *Nucl. Phys.* **B424**, 374 (1994).

29a. R. Barate et al. (ALEPH collaboration), 1999 CERN preprint EP-99-014, to be published in *Eur. Phys. J.*

30. M. Dine, W. Fischler, and M. Srednicki, *Nucl. Phys.* **B189**, 575 (1981); S. Dimopoulos and S. Raby, *Nucl. Phys.* **B192**, 353 (1982); M. Dine and W. Fischler, *Phys. Lett.* **HOB**, 227 (1982); *Nucl. Phys.* **B204**, 346 (1982); C. Nappi and B. Ovrut, *Phys. Lett.* **113B**, 175 (1982); L. Alvarez-Gaumè, M. Claudson, and M. B. Wise, *Nucl. Phys.* **B207**, 96 (1982); S. Dimopoulos and S. Raby, *Nucl. Phys.* **B219**, 479 (1983). Этот класс моделей был возрожден в работе: M. Dine and A. E. Nelson, *Phys. Rev.* **D48**, 1277 (1993); **D51**, 1362 (1995); J. A. Bagger [10]; M. Dine, A. E. Nelson, and Y. Shirman, *Phys. Rev.* **D51**, 1362 (1995); M. Dine, A. E. Nelson, Y. Nir, and Y. Shirman, *Phys. Rev.* **D53**, 2658 (1996). В качестве обзоров см. C. Kolda, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **62**, 266 (1998); G. F. Giudice and R. Rattazzi, hep-ph/9801271, *Phys. Rept.* **322** (1999) 419-499; S. L. Dubovsky, D. S. Gorbunov, and S. V. Troitsky, hep-ph/9905466, *Phys. Usp.* **42** (1999) 623-651, *Usp. Fiz. Nauk* **169** (1999) 705-736. Феноменология этих моделей описана в работе: S. Dimopoulos, S. Thomas, and J. D. Wells, *Nucl. Phys.* **B488**, 39 (1997).

31. S. Dimopoulos, G. F. Giudice, and A. Pomerol, *Phys. Lett.* **389B**, 37 (1997); S. P. Martin, *Phys. Rev.* **D55**, 3177 (1997).

32. G. F. Giudice and R. Rattazzi, *Nucl. Phys.* **B511**, 25 (1998). Эта работа была дополнена в статье N. Arkani-Hamed, G. F. Giudice, M. A. Luty, and R. Rattazzi, *Phys. Rev.* D58, 115005 (1998).

33. N. Seiberg, *Phys. Lett.* **B318**, 469 (1993).

34. K. S. Babu, C. Kolda, and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3070 (1996).

35. J. E. Kim and H. P. Nilles, *Phys. Lett.* **138B**, 150 (1984); J. Ellis, J. F. Gunion, H. E. Haber, L. Roszkowski, and F. Zwirner, *Phys. Rev.* **D39**, 844 (1989); E. J. Chun, J. E. Kim, and H. P. Nilles, *Nucl. Phys.* **B370**, 105 (1992); M. Dine and A. E. Nelson [30]; M. Dine, A. E. Nelson, Y. Nir, and Y. Shirman [30]; G. Dvali, G. F. Giudice, and A. Pomerol, *Nucl. Phys.* **B478**, 31 (1996); S. Dimopoulos, G. Dvali, and R. Rattazzi, *Phys. Lett.* **413B**, 336 (1997); H. P. Nilles and N. Polonsky, *Nucl. Phys.* **B484**, 33

B484, 33 (1997); G. Cleaver, M. Cvetic, J. R. Espinosa, L. Everett, and P. Langacker, *Phys. Rev.* **D57**, 2701 (1998); P. Langacker, N. Polonsky, and J. Wang, hep-ph/9905252, будет опубликовано; J. E. Kim, hep-ph/9901204, *Phys. Lett.* **B452** (1999) 255-259.

35а. S. Raby, *Phys. Lett.* **B422**, 158 (1998).

35б. D. A. Dicus, B. Dutta, and S. Nandi, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3055 (1997); *Phys. Rev.* **D56**, 5748 (1997).

36. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1566 (1979); F. Wilczek and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1571 (1979).

37. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D26**, 287 (1982). N. Sakai and T. Yanagida, *Nucl. Phys.* **B197**, 533 (1982). Эти статьи перепечатаны в сб.: *Supersymmetry* [2].

38. S. Weinberg [36].

39. J. Ellis, J. S. Hagelin, D. V. Nanopoulos, and K. Tamvakis, *Phys. Lett.* **124B**, 484 (1983); V. M. Belyaev and M. I. Vysotsky, *Phys. Lett.* **127B**, 215 (1983).

40. V. Lucas and S. Raby, *Phys. Rev.* **D55**, 6986 (1997).

41. Эта оценка взята из компиляции несуперсимметричных вычислений полной вероятности двухчастичного распада протона, выраженной через массы сверхтяжелых калибровочных бозонов M_X в работе: P. Langacker, in *Proceedings of the 1983 Annual Meeting of the Division of Particles and Fields of the American Physical Society* (American Institute of Physics, New York, 1983): 251. Чтобы выразить этот результат через g_6, я предложил, что эффективно константа g_6, использовавшаямя в вычислениях, задавалась бы как $g_6 = g^2(M_X)/M_X^2$, где $g(M_X)$ имеет значение, соответствующее несуперсимметричным теориям, при $g^2(M_X)/4\pi \approx 1/41$.

42. Для более подробных (как правило, зависящих от модели) вычислений, включая ренормгрупповые поправки к g_5, см. S. Dimopoulos, S. Raby, and F. Wilczek, *Phys. Lett.* **112B**, 133 (1982); J. Ellis, D. V. Nanopoulos, and S. Rudaz, *Nucl. Phys.* **B202**, 43 (1982); W. Lang, *Nucl. Phys.* **B203**, 277 (1982); J. Ellis, J. S. Hagelin, D. V. Nanopoulos, and K. Tamvakis [39]; V. M. Belyaev and M. I. Vysotsky [39]; L. E.. Ibáñez and C. Muñoz, *Nucl. Phys.* **B245**, 425 (1984); P. Nath, A. H. Chamseddine, and R. Arnowitt, *Phys. Rev.* **D32**, 2385 (1985); J. Hisano, H. Murayama, and T. Yanagida, *Nucl. Phys.* **B402**, 46 (1993); V. Lucas and S. Raby [40]. Обзор см.: P. Nath and R. Arnowitt, *Phys. Atom. Nucl.* **61**, 975 (1997).

42a. M. Takita et al., in *Proceedings of the XXIX International Conference on High Energy Nuclear Physics* [27a].

43. K. S. Babu, J. C. Pati, and F. Wilczek, *Phys. Lett.* **423B**, 337 (1998).

44. V. Lucas and S. Raby [40]; T. Goto and T. Nihei, *Phys. Rev.* **D59**, 115009 (1999).

45. L. E. Ibáñez and G. Ross, *Nucl. Phys.* **B368**, 3 (1991).

29

За рамками теории возмущений

Большинство обсуждавшихся до сих пор применений суперсимметрии было связано с использованием теории возмущений. В этой главе будут рассмотрены результаты, применимые даже при учете непертурбативных эффектов.

29.1. Общие аспекты нарушения суперсимметрии

В спектрах известных частиц суперсимметрия не наблюдается, следовательно, она должна нарушаться. В предыдущей главе было показано, что нарушение суперсимметрии в древесном приближении стандартной модели исключается экспериментальными данными, и что большое различие между масштабом электрослабого нарушения и масштабами Планка или великого объединения предполагает, что, по-видимому, суперсимметрия нарушается, когда какая-то бегущая калибровочная константа связи становится большой. Поэтому очень важно исследовать спонтанное нарушение суперсиметрии без использования теории возмущений.

В разделе 26.7 было показано, что суперсимметрия действия влечет за собой существование тока суперсимметрии $S^{\mu}(x)$. Этот ток является майорановским спинором в смысле соотношения (26.A.1), т. е.

$$S^{\mu}(x)^{*} = -\beta\gamma_5\epsilon S^{\mu}(x), \tag{29.1.1}$$

он сохраняется,

$$\partial_{\mu}S^{\mu}_{\beta}(x) = 0, \tag{29.1.2}$$

и интеграл от его временной компоненты является генератором суперсимметрии,

$$\int d^3x S^0_{\beta}(x) = Q_{\beta}, \tag{29.1.3}$$

для которого коммутатор $-i(\overline{\alpha}Q)$ с любым оператором дает изменение этого оператора относительно суперсимметричного преобразования с бесконечно малым майорановским спинорным параметром α.

Соображения, которые привели к этим результатам, основывались на суперсимметрии действия; при этом ничего не зависело от того, была ли суперсимметрия спонтанно нарушена или нет, если не считать, пожалуй, предположения о существовании интеграла (29.1.3). На самом деле, это предположение может нарушаться в теориях с безмассовыми фермионами, в которых могут проявляться дальнодействующие эффекты (или, эквивалентно — полюсы при нулевом 4-импульсе), что сделало бы этот интеграл расходящимся. Далее будет показано, что такие безмассовые фермионы являются необходимым следствием нарушения суперсимметрии. Чтобы избежать проблемы сходимости этого интеграла даже в теориях с безмассовыми фермионами, удобно работать в пространстве конечного объема V. Это можно сделать, сохраняя трансляционную инвариантность, если наложить периодические граничные условия: предполагается, что все поля не изменяются при сдвиге любой пространственной координаты x^i на величину $V^{1/3}$.

Существование оператора Q_α, индуцирующего суперсимметричные преобразования квантовых полей, позволяет получить все следствия суперсимметрии при условии, что есть суперсимметричное вакуумное состояние $|\mathrm{VAC}\rangle$ с нулевым пространственным импульсом, из которого можно построить многочастичные состояния, действуя на него полевыми операторами. Однако, если состояние $|\mathrm{VAC}\rangle$ суперсимметрично в том смысле, что $Q_\alpha|\mathrm{VAC}\rangle = 0$, то из антикоммутационного соотношения (25.2.36) следует, что это состояние имеет нулевую энергию и нулевой импульс. Обратно, вычислив среднее по вакууму от положительного оператора $\{\mathrm{Q}_\alpha, \mathrm{Q}_\alpha^*\}$ (мы на время вернулись к двухкомпонентным обозначениям), можно видеть, что если вакуум имеет нулевую энергию, то он должен аннигилироваться операторами Q_α и Q_α^*, т. е. должен быть суперсимметричен. Если же он не суперсимметричен, то его энергия должна быть положительно определена. *Итак, вопрос о том, есть ли спонтанное нарушение суперсимметрии или нет, сводится к вопросу, будет ли энергия вакуума положительно определена, или она равна нулю.*

Эти же соображения привели Виттена к выводу, что расширенная суперсимметрия с $N > 1$ двухкомпонентными спинорными генераторами Q_{ar} и им сопряженными не может быть спонтанно нарушена до расширенной суперсимметрии с меньшим числом генераторов или до простой суперсимметрии, потому что если любой из генераторов не аннигилирует вакуум, то энергия вакуума не обращается в нуль, но тогда ни один из генераторов не может аннигилировать вакуум [1]. Обычно энергия ваккума возникает как плохо определенная аддитивная константа к энергиям всех состояний, но здесь эта константа приобретает смысл в результате появления 4-вектора энергии-импульса в антикоммутационных соотношениях суперсимметрии. Одно из преимуществ работы в конечном объеме состоит в том, что теперь имеет смысл говорить о полной энергии вакуума.

Хьюз, Лау и Польчинский отметили, что существуют теории, в которых происходит нечто вроде частичного нарушения суперсимметрии [1a]. В этих теориях нет суперсимметричной алгебры типа той, что описана в главе 25. Вместо этого, в них имеется алгебра *токов*, основанная на антикоммутационых соотношениях вида (26.7.45):

$$\int d^3x \left\{ S^0_{r\alpha}(x), \bar{S}^\mu_{s\beta}(y) \right\} = -2i\delta_{rs}\gamma_\nu\Theta^{\mu\nu}(y) + 2i\gamma^\mu C_{rs},$$

где $\Theta^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса, удовлетворяющий закону сохранения $\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0$, C_{rs} — новая константа. При $N = 1$ эта константа может рассматриваться как член $-\eta^{\mu\nu}C$ в $\Theta^{\mu\nu}$. Однако для расширенной суперсимметрии это невозможно, если только не выполнено необязательное условие $C_{rs} \propto \delta_{rs}$. Такая алгебра не исключается доказанной в разделе 25.2 теоремой Хаага–Лопушанского–Сониуса, потому что она не может быть симметрией S-матрицы. Действительно, спонтанно нарушенные симметрии никогда не являются симметриями S-матрицы; но обычно предполагается, что они основываются на алгебрах и супералгебрах, которые *могли бы* быть симметриями S-матрицы на некоторых стадиях некоторых теорий. Если же константа C_{rs} не пропорциональна δ_{rs}, то супералгебра токов не может генерировать симметрию S-матрицы ни на одной стадии ни одной теории. Здесь будут рассмотрены супералгебры типа тех, что описаны в главе 25, для которых справедлива аргументация Виттена.

Другое преимущество работы в конечном объеме состоит в том, что все состояния становятся дискретными и нормируемыми. Из коммутации оператора Q_α с P_μ немедленно следует, что любое состояние с ненулевой энергией спарено с другим состоянием, имеющим ту же энергию и импульс, но подчиняющимся другой статистике. Чтобы это увидеть, заметим, что для любого 3-импульса $\mathbf{p}$ можно найти такой двухкомпонентный спинор u_a, что $\sum_{ab} u^*_a \sigma_{ab} \cdot \mathbf{p} u_b = 0$ и $\sum_a |u_a|^2 = 1$. (Если вектор $\mathbf{p}$ направлен по третьей оси, возьмем $u = (1,1)/\sqrt{2}$. Если $\mathbf{p}$ направлен в любую другую сторону, подействуем на спинор u представлением группы вращений спина $1/2$, переводящим третью ось в ось, по которой направлен $\mathbf{p}$.) Тогда в пространстве 4-импульсом p^μ антикоммутационные соотношения (25.2.31) и (25.2.32) дают

$$\mathrm{Q}^2(p) = p^0, \tag{29.1.4}$$

где $Q(p)$ — эрмитова линейная комбинация генераторов суперсимметрии:

$$\mathrm{Q}(p) = \sum_a u_a \mathrm{Q}_a + \sum_a u_a^* \mathrm{Q}_a^*. \tag{29.1.5}$$

Действуя генератором $\mathrm{Q}(p)$ на любое нормированное состояние $|X\rangle$ 4-импульсом p^μ и $p^0 > 0$, получаем другое нормированное состояние $|Y\rangle = \mathrm{Q}(p)|X\rangle/\sqrt{p^0}$ с тем же 4-импульсом, но подчиняющимся другой статистике. Более того, $|X\rangle$ является единственным состоянием, связанным с $|Y\rangle$ таким образом, потому что, если $|Y\rangle = \mathrm{Q}(p)|X\rangle/\sqrt{p^0}$, то согласно (29.1.4), $|X\rangle = \mathrm{Q}(p)|Y\rangle/\sqrt{p^0}$. Кратность суперсимметричных генераторов и спиновых состояний обычно приводит к тому, что эти пары фермионных и бозонных состояний связаны с другими парами с тем же 4-импульсом; но пока достаточно знать, что все состояния ненулевой энергии могут быть, по крайней мере, сгруппированы в такие пары.

Когда суперсимметрия нарушается, не следует ожидать, что состояния с определенным числом частиц образуют супермультиплеты с другими состояниями противоположной статистики и теми же 4-импульсом и числом частиц. Спаривание состояний требует наличия безмассового фермиона, так, чтобы n-частичное состояние могло быть спарено с состоянием той же энергии, того же импульса, но противоположной статистики, состоящим из тех же n частиц, и безмассового фермиона нулевой энергии и импульса. Этот безмассовый фермион называется *голдстино*. Точнее, любое n-частичное состояние связано с двумя состояниями той же энергии и импульса, но противоположной статистики, содержащими дополнительную частицу голдстино с нулевым импульсом и спином, направленным вверх или вниз, и еще с одним состоянием той же энергии, импульса и *той же* статистики, содержащим два дополнительных голдстино противоположного спина, обладающих нулевым моментом. В частности, когда суперсимметрия нарушается, энергия вакуумного состояния не равна нулю, поэтому оно должно быть спарено с фермионным состоянием той же энергии и нулевого импульса; другими словами, ваккум и состояние, содержащее два голдстино нулевого импульса, спариваются с двумя состояниями одного голдстино с нулевым импульсом. Только, если суперсимметрия не нарушена, существует состояние с нулевой энергией — вакуум, которое может быть неспаренным.

Спаривание состояний с ненулевой энергией предоставляет ценный диагностический инструмент, который в некоторых случаях может сказать, что спонтанное нарушение суперсиметрии отсутствует, даже когда теория возмущений не в состоянии ответить на этот вопрос. В случае, когда все взаимодействия слабы, можно надеяться, что теория возмущений дает *качественную* картину спектра. Если оказывается, что в древесном приближении есть n вакуумных состояний с нулевой энергией и нет безмассвых фермионов, то можно быть уверенным, что в случае слабой связи нет фермионных состояний с нулевой энергией, с которыми можно спарить n вакуумных состояний. Поэтому эти неспаренные состояния должны иметь энергию, строго равную нулю. При увеличении силы связей или изменении параметров теории каким-либо другим способом, энергия состояний может изменяться от положительных значений до нуля и обратно, но состояния в общем случае не будут внезапно появляться или исчезать. (Существует одно исключение из общего правила — изменение параметров, влияющих на асимптотическое поведение лагранжиана больших полей. Как скоро будет показано, в этом случае состояния *могут* появляться и исчезать.) Поскольку каждое состояние с ненулевой энергией всегда спарено с другим состоянием противоположной статистики, в таких парах возможно только изменение энергии от какого-то положительного значения до нуля и обратно. Поэтому пока поведение лагранжиана для больших значений полей не изменяется, число бозонных состояний с нулевой энергией минус число фермионных состояний с нулевой энергией сохраняется при вариациях параметров теории. Эта разность называется *индексом Виттена* [2]. Формально этот индекс равен $\mathrm{Tr}\,(-1)^F$, где F — фермионное число. Спаривание состояний, обсуждавшееся ранее, гарантирует, что состояния с ненулевой энергией не вносят вклад в шпур. Если индекс Виттена не равен нулю, то должны быть состояния с нулевой энергией, следовательно, суперсимметрия не может быть нарушена. В частности, в теории, где древесное приближение дает n вакуумных состояний нулевой энергии и нет фермионов с нулевой энергией, индекс Виттена в случае слабой связи равен n, когда древесное приближение дает надежную качественную картину спектра, и остается равным n при увеличении силы связи. Поэтому можно быть уверенным, что эффекты более высокого порядка или даже непертурбативные эффекты не нарушают суперсимметрию.

В качестве примера использования индекса Виттена, рассмотрим теорию Весса–Зумино для одного кирального суперполя с суперпотенциалом в виде полинома третьей степени (26.4.16):

$$f(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{6}g\varphi^3,$$

где φ — комплексная скалярная компонента суперполя. В разделе 26.4 было показано, что в этой модели в древесном приближении нарушение суперсимметрии отсутствует. А что будет, если учесть более высокие порядки теории возмущений или рассмотреть непертурбативные эффекты? Теория возмущений дает хорошее приближение к энергетическому спектру, когда масса m велика, а константа g мала. Это означает, что в этом случае в окрестности нулевой энергии имеется два бозонных состояния, соответствующие решениям уравнения $\partial f(\varphi)/\partial\varphi = 0$: $\varphi = 0$ и $\varphi = -2m^2/g$. Кроме того, вблизи нулевой энергии нет фермионных состояний; самое нижнее по энергии фермионное состояние — это однофермионное состояние с энергией вблизи $|m|$ и нулевым импульсом. В типичных теориях скалярных полей не следует ожидать, чтобы энергия двух бозонных состояний строго равнялась нулю; хотя они и могут иметь нулевые энергии в древесном приближении, ожидается, что эффекты высоких порядков (в том числе туннельный переход через барьер между $\varphi = 0$ и $\varphi = -2m^2/g$) смешают эти состояния, и их энергия станет отличной от нуля. (Барьер становится непроницаемым только в пределе бесконечного объема.) Однако в суперсимметричных теориях эти состояния должны иметь энергию, строго равную нулю, потому что нет низкоэнергетического фермионного состояния, с которым их можно было бы спарить. Таким образом, для больших m и малых g индекс Виттена равен 2. Поскольку индекс Виттена инвариантен относительно изменений параметров теории, он сохраняет свое значение даже при больших g, когда нарушается теория возмущений, и даже для m, стремящемся к нулю, когда две потенциальные ямы сливаются. (В этом случае непосредственно вычислить индекс Виттена совсем не просто в силу присутствия в древесном приближении как безмассовых бозонов, так и безмассовых фермионов.) Поскольку индекс Виттена не равен нулю, то в модели Весса–Зумино суперсимметрия строго сохраняется, независимо от значений параметров теории.

Аналогичные аргументы можно использовать в теориях с несколькими киральными скалярными суперполями и показать, что индекс Виттена положителен, и поэтому спонтанное нарушение суперсимметрии отсутствует. Модели О'Райферти, обсуждавшиеся в разделе 26.5, являются исключением, потому что существуют плоские направления, вдоль которых потенциал остается постоянным, когда поля не растут степенным образом, а стремятся к бесконечности. Эти модели прекрасно иллюстрируют тот факт, что хотя индекс Виттена и должен быть равен нулю, чтобы нарушалась суперсимметрия, однако равенство индекса нулю не обязательно означает, что суперсимметрия действительно нарушена. Например, если записать суперпотенциал, использованный в разделе 26.5, через канонически нормированные суперполя, то он принимает вид

$$f(X,Y_1,Y_2) = mY_1(X-a) + gY_2X^2,$$

с произвольными параметрами m, g и a. Тогда потенциал равен

$$U(x,y_1,y_2) = |g|^2|x|^4 + |m|^2|x-a|^2 + |my_1 + 2gxy_2|^2,$$

где маленькие буквы обозначают скалярные компоненты левокиральных суперполей. Если m и a не равны нулю, а параметр g мал, то теория возмущений дает хорошую оценку для спектра. В этом случае потенциал достигает минимума вблизи $x = a - 2|g|^2|a|^4/|m|^2$ при условии $my_1 + 2xy_2 = 0$, а энергия вакуума приблизительно равна $|ga^2|^2V$. Поскольку эта энергия возникает как аддитивная постоянная во всех состояниях, то состояния с нулевой энергией отсутствуют, и индекс Виттена равен нулю. Матрица вторых производных суперпотенциала $\mathcal{M}$ (строки и столбцы расположены согласно порядку x, y_1, y_2) имеет вид

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2gy_2 & m & 2gx \\ m & 0 & 0 \\ 2gx & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственный вектор $(0, 2gx, -m)$ отвечает собственному значению нуль, поэтому в такой модели есть безмассовый фермион, т. е. голдстино, связанное с нарушением суперсимметрии. Фермионное состояние, вырожденное с ваккумом, состоит из одного голдстино нулевой энергии и нулевого импульса. (Опять имеются два вакуумных фермионных состояния с противоположными ориентациями спина голдстино и два бозонных состояния с вакуумными энергиями: сам вакуум и состояние, состоящее из двух голдстино с противоположными спинами.) Теперь при $a \to 0$ суперсимметрия может стать ненарушенной (позднее мы покажем, что так и будет), но индекс Виттена должен быть по-прежнему равным нулю. В этом случае безмассовый фермион уже не будет голдстино, и в силу непрерывности его масса должна оставаться нулевой, так что он остается спаренным с вакуумным состоянием. Конечно, это общее свойство теорий, в которых суперсимметрия восстанавливается при отдельных значениях параметров: когда нарушается суперсимметрия, в силу непрерывности безмассовый фермион, играющий роль голдстино, остается безмассовым (хотя уже больше не является голдстино) при тех значениях параметров, когда суперсимметрия восстанавливается, так что вакуум остается спаренным с безмассовым фермионным состоянием, и индекс Виттена остается равным нулю.

Эта модель прекрасно иллюстрирует, почему необходимо сопровождать утверждение, что индекс Виттена сохраняется при изменении параметров суперсимметричной теории, оговоркой, что изменение параметров не должно менять асимптотическое поведение плотности лагранжиана для больших полей. Предположим, что плоское направление в этой модели становится искривленным из-за добавления малого слагаемого к суперпотенциалу, так что теперь он имеет вид

$$f(X, Y_1, Y_2) = mY_1(X - a) + gY_2X^2 + \frac{1}{2}\varepsilon(Y_1^2 + Y_2^2),$$

где ε — малый массовый параметр. Теперь условия сохранения суперсимметрии имеют два решения:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

Для этих решений x является одним из корней квадратного уравнения $2g^2x^2 + m(x-a) = 0$, а y_1 и y_2 — величины порядка $1/\varepsilon$: $y_1 = -m(x-a)/\varepsilon$ и $y_2 = -gx^2/\varepsilon$. Мы видим, что причиной изменения индекса Виттена от 0 до 2 при включении малого параметра ε является то, что появляются два новых минимума потенциала при бесконечно больших значениях полей.

Для решения вопроса, нарушается суперсимметрия или нет в теориях с нулевым индексом Виттена, часто полезно использовать законы сохранения, чтобы ограничить возможные спаривания, и определить новый тип индекса. Если K является квантовым оператором, коммутирующим с генераторами суперсимметрии Q_α (и следовательно, с гамильтонианом), то все состояния ненулевой энергии, имеющие определенное значение K, спарены с состояниями, подчиняющимися противоположной статистике, и имеющими те же значения энергии, импульса и величины K. Кроме того, не только индекс Виттена $\mathrm{Tr}\,(-1)^F$ не зависит от параметров теории (до тех пор, пока они не изменяют асимптотическое поведение лагранжиана для больших полей), но также и *взвешенный индекс Виттена*, равный $\mathrm{Tr}\,g(K)(-1)^F$, где $g(K)$ — произвольная функция сохраняющейся величины. Чтобы таким образом использовать закон сохранения, необязательно чтобы он не нарушался, когда объем V стремится к бесконечности. Необходимо лишь, чтобы оператор K коммутировал с генераторами суперсимметрии.

Для выяснения возможностей нарушения суперсимметрии иногда полезно работать с линейной комбинацией взвешенных индексов Виттена для нескольких разных сохраняющихся величин. В частности, рассмотрим величину

$$W_G = \sum_{h \in G} \mathrm{Tr}\,\left\{h(-1)^F\right\}, \tag{29.1.6}$$

где суммирование ведется по всем элементам некоторой группы симметрии G. (Для компактных непрерывных групп эта сумма должна интерпретироваться как интеграл по объему группы с соответствующей инвариантной мерой.) Когда суммирование ведется по конечной или компактной группе, в любом неприводимом представлении, отличном от единичного, сумма «характеров» $\mathrm{Tr}\,h$ оказывается равной нулю, так что

$$W_G = \sum_f N(f)(-1)^f, \tag{29.1.7}$$

где $N(f)$ показывает, сколько раз единичное представление группы G появляется среди состояний с фермионным числом f. Другими словами,

W_G есть просто индекс Виттена, но вычисленный только с использованием G-инвариантных состояний. До тех пор, пока сохраняется G, индекс W_G не зависит от параметров теории и, если он не равен нулю, то суперсимметрия сохраняется.

В разделе 29.4 законы сохранения будут использованы в этом же духе для изучения спонтанного нарушения суперсимметрии в калибровочных теориях. Однако более простой (хотя и академический) пример дается рассмотренной ранее моделью О'Райферти, только теперь параметр a взят равным нулю. Тогда суперпотенциал имеет вид

$$f(X,Y_1,Y_2) = mY_1X + gY_2X^2, \tag{29.1.8}$$

откуда потенциал в древесном приближении равен

$$U(x,y_1,y_2) = |m|^2|x|^2 + |g|^2|x|^4 + |my_1 + 2gxy_2|^2. \tag{29.1.9}$$

Мы знаем, что в этом случае индекс Виттена равен нулю, т. к. это уже было получено для $a \neq 0$. Но нарушается ли при этом суперсимметрия? Если $a = 0$, то потенциал обращается в нуль в древесном приближении при значениях поля с $x = y_1 = 0$. Возникает вопрос: добавляют ли эффекты более высоких порядков по g или непертурбативные эффекты малую энергию соответствующим состояниям? Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что этот суперпотенциал (и следовательно лагранжиан) инвариантен относительно дискретной симметрии K, относительно которой суперполя преобразуются по формулам

$$KXK^{-1} = iX, \quad KY_1K^{-1} = -iY_1, \quad KY_2K^{-1} = -Y_2. \tag{29.1.10}$$

(Заметим, что такая симметрия нарушается членом $-maY_1$ в исходном потенциале, поэтому ни один результат, полученный с использованием K, не будет применим к этому суперпотенциалу.) Поскольку потенциал обращается в нуль при $x = y_1 = 0$ и произвольных y_2, для малых g можно воспользоваться теорией возмущений, из которой следует, что для каждого y_2 существует бозонное вакуумное состояние *вблизи* нулевой энергии. Для $y_2 = 0$ этот вакуум будет четным относительно K. Для любого ненулевого значения $|y_2|$ можно взять линейные комбинации двух состояний с нулевой энергией с $y_2 = \pm|y_2|$, одно из которых четно относительно K, а другое — нечетно. Как уже было показано, здесь имеется также безмассовый фермион, т. е. фермионное состояние Y_2. Но этот фермион нечетен относительно K, поэтому он не может быть спарен с четными вакуумными состояниями. Другие фермионы теории имеют в древесном приближении массы $|m|$, поэтому для малых g они также не могут быть спарены с четными вакуумными состояниями. Мы заключаем, что для малых g четные вакуумные состояния должны иметь энергию, строго равную нулю, и суперсимметрия сохраняется. В этой модели непросто вычислить взвешенный индекс Виттена, потому что имеется бесконечное число бозонных состояний с нулевой энергией, четных относительно K. Они содержат нулевое число или два Y_2-фермиона нулевого импульса и любое четное число Y_2-бозонов нулевого импульса. Ясно, что $\mathrm{Tr}\, K(-1)^F > 0$, и поскольку это не зависит от g (пока $g \neq 0$), суперсимметрия не может быть нарушена при любом конечном значении g.

29.2. Правила сумм для тока суперсимметрии

Обратимся к правилам сумм, дающим точные количественные соотношения между энергией вакуума и параметрами, описывающими степень нарушения суперсимметрии.

Предположим сначала, что мир заключен в ящик размером V с периодическими граничными условиями, чтобы сохранить трансляционную инвариантность. Тогда среднее по вакууму от антикоммутационных соотношений (25.2.36) можно записать в виде суммы по дискретным состояниям $|X, \text{ящик}\rangle$:

$$\begin{aligned}&\sum_X \langle \mathrm{VAC}|Q_\alpha|X, \text{ящик}\rangle \left\langle \mathrm{VAC}\left|Q_\beta\right|X, \text{ящик}\right\rangle^* \\ &+\sum \left\langle \mathrm{VAC}\left|Q^*_\beta\right|X, \text{ящик}\right\rangle \langle \mathrm{VAC}|Q^*_\alpha|X, \text{ящик}\rangle^* \\ &\qquad = -2i\left(\gamma_\mu\beta\right)_{\alpha\beta}\langle \mathrm{VAC}|P^\mu|\mathrm{VAC}\rangle, \qquad (29.2.1)\end{aligned}$$

где метка «ящик» показывает, что для скалярных произведений нормированные состояния содержат символ Кронекера, а не дельта-функцию. Полагая $\beta = \alpha$ и суммируя по α с использованием (25.2.37), получаем

$$\sum_{X,\alpha} |\langle \mathrm{VAC}|Q_\alpha|X, \text{ящик}\rangle|^2 = 4\left\langle \mathrm{VAC}\left|P^0\right|\mathrm{VAC}\right\rangle. \qquad (29.2.2)$$

Поскольку Q_α коммутирует с 4-импульсом, вклад в эту сумму могут вносить только состояния с нулевым 3-импульсом и энергией, равной энергии вакуума. Чтобы найти зависимость матричных элементов, вносящих вклад в (29.2.2), от объема, заметим, что состояния $|X, \text{ящик}\rangle$, нормированные в ящике и содержащие N_X частиц, связаны, согласно (3.4.3), с соответствующими состояниями $|X\rangle$, нормированными в континууме, условием

$$|X, \text{ящик}\rangle = \left((2\pi)^3/V\right)^{N_X/2}|X\rangle. \qquad (29.2.3)$$

Для состояний с $\mathbf{p}_X = 0$, пространственный интеграл временной компоненты суперсимметричного тока S^0_α дает еще один множитель V, следовательно, для нормированных в ящике состояний с $\mathbf{p}_X = 0$ имеем

$$\langle \mathrm{VAC}|Q_\alpha|X,\text{ящик}\rangle = (2\pi)^{3N_X/2}V^{1-N_X/2}\left\langle \mathrm{VAC}\left|S^0_\alpha(0)\right|X\right\rangle. \tag{29.2.4}$$

Поскольку инвариантность относительно поворотов на угол 2π не позволяет X быть состоянием без частиц, доминирующими членами в (29.2.2) при $V \to \infty$ будут одночастичные состояния. Переходя к этому пределу в формуле (29.2.2), получаем

$$(2\pi)^3 \sum_{X,\alpha}^{(0)} \left|\left\langle \mathrm{VAC}\left|S^0_\alpha(0)\right|X\right\rangle\right|^2 = 4\rho_{\mathrm{VAC}}, \tag{29.2.5}$$

где ρ_{VAC} обозначает плотность энергии вакуума

$$\rho_{\mathrm{VAC}} \equiv \left\langle \mathrm{VAC}\left|P^0\right|\mathrm{VAC}\right\rangle/V, \tag{29.2.6}$$

где верхний индекс (0) показывает, что суммирование в (29.2.5) ведется только по одночастичным состояниям с нулевым 4-импульсом, являющимися, конечно, двумя спиральными состояниями голдстино.

Таким образом, из формулы (29.2.5) видно, что если плотность энергии вакуума не равна нулю, то вакуум не инвариантен относительно суперсимметричных преобразований, а преобразуется в одночастичные состояния голдстино. И обратно, соотношение (29.2.2) показывает, что если вакуум не инвариантен относительно суперсимметричных преобразований, то его энергия в конечном объеме не может быть равна нулю, хотя не исключено, что суперсимметричные преобразования могут перевести вакуум только в многочастичные состояния, и в таком случае плотность энергии вакуума обратится в нуль в пределе большого объема.

Чтобы вычислить вклад одноголдстинного состояния в (29.2.5), используем лоренц-инвариантность и запишем матричный элемент суперсимметричного тока между вакуумом и этим состоянием $|\mathbf{p},\lambda\rangle$ с импульсом $\mathbf{p}$ и спиральностью λ в форме*

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{VAC}|S^\mu(0)|\mathbf{p},\lambda\rangle = (2\pi)^{-3/2}\Bigg[&\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\left(\gamma^\mu F + ip^\mu F'\right)\\ &+\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\left(\gamma^\mu F^* + ip^\mu F'^*\right)\Bigg]u(\mathbf{p},\lambda),\end{aligned} \tag{29.2.7}$$

*Использование только лоренц-инвариантности позволяет получить эту формулу с независимыми коэффициентами F_L, F'_L и F_R, F'_R для матриц, пропорциональных $(1+\gamma_5)/2$ и $(1-\gamma_5)/2$ соответственно. Соотношения $F_R = F^*_L$ и $F'_R = F'^*_L$ накладываются CPT-инвариантностью. Чтобы это увидеть, необходимо использовать свойства где $u(\mathbf{p},\lambda)$ — коэффициентные функции для безмассового дираковского поля, введенного в разделе 5.5; F и F' — неизвестные константы. Матричный элемент (29.2.7) удовлетворяет условию сохранения

$$p_\mu \langle \text{VAC}|S^\mu(0)|\mathbf{p},\lambda\rangle = 0,$$

потому что $u(\mathbf{p},\lambda)$ удовлетворяет уравнению Дирака для нулевой массы (5.5.42) в импульсном представлении, а p^μ лежит на световом конусе. Тогда сумма по спиральностям дает

$$\sum_\lambda U(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}(\mathbf{p},\lambda) = -i\not{p}/2p^0.$$

(Дираковский спинор $u(\mathbf{p},\lambda)$ для безмассовой частицы импульсом $\mathbf{p}$ и спина λ не очень хорошо определен при $\mathbf{p}\to 0$. Однако проблема снимается, если рассматривать сумму по X в (29.2.5) как сумму по спиральностям для малых импульсов $\mathbf{p}$ с фиксированным направлением.) Прямые вычисления приводят к выражению

$$4\rho_{\text{VAC}} = \text{Tr}\left\{\left(F\frac{1+\gamma_5}{2}+F^*\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\gamma^0\frac{-i\not{p}\beta}{2p^0}(\gamma^0)^\dagger\left(F^*\frac{1+\gamma_5}{2}+F\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right\},$$

откуда

$$\rho_{\text{VAC}} = |F|^2/2. \tag{29.2.8}$$

В конце этого раздела будет дано другое доказательство этой формулы.

CPT-преобразования для суперсимметричного тока

$$\text{CPT}S^\mu(x)(\text{CPT})^{-1} = -\gamma_5 S^\mu(-x)^* = -\beta\varepsilon S^\mu(-x),$$

(см. раздел 5.8) и для одночастичных состояний

$$\text{CPT}\,|\mathbf{p},\lambda\rangle = \chi_\iota\,|\mathbf{p},-\lambda\rangle$$

Здесь χ_ι — фазовый множитель, зависящий от того, как определены относительные фазы спиральных состояний. Кроме того, требуется действительность коэффициентных функций $u(\mathbf{p},\iota)$, связанных с коэффициентными функциями одночастичных состояний определением

$$\left\langle \text{VAC}\middle|\psi_{\text{перенорм}}(x)\middle|\mathbf{p},\iota\right\rangle = (2\pi)^{-3/2}\exp(ip\cdot x)u(\mathbf{p},\iota),$$

где $\psi_{\text{перенорм}}(x)$ обозначает перенормированное майорановское поле, которое при CPT-пребразовании меняется следующим образом

$$\text{CPT}\psi_{\text{перенорм}}(x)(\text{CPT})^{-1} = \gamma_5\psi_{\text{перенорм}}(-x)^* = \beta\varepsilon\psi_{\text{перенорм}}(-x).$$

Таким образом получаем $u(\mathbf{p},\iota) = \chi_\iota^*\beta\varepsilon u^*(\mathbf{p},-\iota)$. Это равенство вместе со свойствами суперсимметричного тока и одночастичных состояний относительно CPT-преобразования приводят к соотношениям $F_R = F_L^*$ и $F_R' = F_L'^*$.

Параметр F играет ту же роль во взаимодействиях мягких голдстино, что и параметр F_π (введенный в разделе 19.4) — во взаимодействиях мягких пионов. Матричный элемент суперсимметричного тока между двумя состояниями X и Y можно представить в виде суммы слагаемых, имеющих одноголдстинный полюс при $p^\mu = 0$ по переданному импульсу $p \equiv p_X - p_Y$, и тех, у которых такой полюс отсутствует

$$\langle X|S^\mu(0)|Y\rangle = \left\{\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\left[\gamma^\mu F + ip^\mu F'\right] + \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\left[\gamma^\mu F^* + ip^\mu F'^*\right]\right\} \times \left(\frac{-i\not{p}}{p^2}\right) M(X \to Y+g) + \langle X|S^\mu(0)|Y\rangle_{\text{без полюса}}, \quad (29.2.9)$$

где $\bar{u}M(X \to Y+g)$ — амплитуда испускания голдстино 4-импульсом p и дираковской волновой функцией u. Метка «без полюса» обозначает члены матричного элемента без одноголдстинного полюса по 4-импульсу p. Сохранение тока S^μ означает, что при свертке с p_μ он обращается в нуль, так что в пределе $p^\mu \to 0$ амплитуда испускания голдстино равна*

$$M(X \to Y+g) \to -i\left\{\left(\frac{1+\gamma_5}{2F}\right) + \left(\frac{1-\gamma_5}{2F^*}\right)\right\} p_\mu \langle X|S^\mu(0)|Y\rangle_{\text{без полюса}}, \quad (29.2.10)$$

Существует другое правило сумм, позволяющее дать альтернативное доказательство существования голдстино, когда суперсимметрия спонтанно нарушена. Оно также связывает параметр f и плотность энергии вакуума с D- и $\mathcal{F}$-членами, характеризующими степень нарушения суперсимметрии. (Такое использование правила сумм аналогично второму доказательству существования голдстоуновских бозонов при спонтанном нарушении обычных симметрий, приведенному в разделе 19.2.) Для вывода этого правила сумм, откажемся от введения конечного объема, а чтобы избежать проблемы сходимости интеграла (29.1.3), будем работать с локальным следствием

---

*Амплитуда $\langle X|S^\mu(0)|Y\rangle_{\text{без полюса}}$ может иметь полюса, ведущие себя как $1/p\cdot k$ при $p^\mu \to 0$. Они не возникают в пропагаторе голдстино, который явно исключен из этого матричного элемента. Полюса появляются в пропагаторах других частиц, возникающих за счет вставки суперсимметричного тока во внешние линии импульса k в процессе $X \to Y$. В пределе $p^\mu \to 0$ вклад от этих полюсов в (29.2.10) был бы больше амплитуды испускания или поглощения мягких голдстино. Но чтобы возникли такие полюса, голдстино должен испускаться в переходе между двумя *вырожденными* частицами, подчиняющимися противоположным статистикам, что вряд ли может произойти в теориях со спонтанно нарушенной суперсимметрией. Взаимодействия мягких голдстино отличаются в этом отношении от взаимодействий мягких пионов, фотонов или гравитонов.

суперсимметрии действия

$$\left[\left(\overline{S}^0(\mathbf{x},t)\alpha\right),\chi(\mathbf{y},t)\right] = \left[\overline{\alpha}\left(S^0(\mathbf{x},t)\right),\chi(\mathbf{y},t)\right] = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\delta\chi(\mathbf{x},t)+\ldots, \tag{29.2.11}$$

где $\chi(x)$ — произвольное фермионное или бозонное поле, $\delta\chi(x)$ — изменение $\chi(x)$, вызванное суперсимметричным преобразованием с бесконечно малым параметром α, оставляющим действие инвариантным, а точки обозначают члены, содержащие производные $\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Рассмотрим среднее по вакууму от антикоммутатора произвольного левого спинорного поля $\psi_L(x)$ с ковариантно сопряженным током $\overline{S}^\mu(y)$ суперсимметричного тока. Суммируя по полному набору промежуточных состояний $|X\rangle$ (включая интегрирование по импульсам частиц), можно записать значение среднего по вакууму в виде

$$\left\langle \mathrm{VAC}\left|\left\{\psi_{L\alpha}(x),\overline{S}^\mu_\beta(y)\right\}\right|\mathrm{VAC}\right\rangle = \int d^4p\, e^{ip\cdot(x-y)}\left[G^\mu_{\alpha\beta}(p)+\widetilde{G}^\mu_{\alpha\beta}(-p)\right], \tag{29.2.12}$$

где

$$G^\mu_{\alpha\beta}(p) \equiv \sum_X \delta^4(p-p_X)\,\langle \mathrm{VAC}|\psi_{L\alpha}(0)|X\rangle\left\langle X\left|\overline{S}^\mu_\beta(0)\right|\mathrm{VAC}\right\rangle, \tag{29.2.13}$$

$$\widetilde{G}^\mu_{\alpha\beta}(p) = \sum_X \delta^4(p-p_X)\left\langle \mathrm{VAC}\left|\overline{S}^\mu_\beta(0)\right|X\right\rangle\langle X|\psi_{L\alpha}(0)|\mathrm{VAC}\rangle. \tag{29.2.14}$$

В силу лоренц-инвариантности матрицы $G^\mu(p)$ и $\widetilde{G}^\mu(p)$ должны иметь вид

$$\begin{aligned} G^\mu(p) = \theta(p^0)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)&\Big[\gamma^\mu G^{(1)}(-p^2)+\not{p}p^\mu G^{(2)}(-p^2)\\ &+p^\mu G^{(3)}(-p^2)+\not{p}\gamma^\mu G^{(4)}(-p^2)\Big] \end{aligned} \tag{29.2.15}$$

и

$$\begin{aligned} \widetilde{G}^\mu(p) = \theta(p^0)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)&\Big[\gamma^\mu \widetilde{G}^{(1)}(-p^2)+\not{p}p^\mu \widetilde{G}^{(2)}(-p^2)\\ &+p^\mu \widetilde{G}^{(3)}(-p^2)+\not{p}\gamma^\mu \widetilde{G}^{(4)}(-p^2)\Big]. \end{aligned} \tag{29.2.16}$$

Правые стороны формул (29.2.15) и (29.2.16) не изменяются, если заменить $-p^2$ на m^2, умножить на $\delta(p^2+m^2)$ и проинтегрировать по m^2. После этого формула (29.2.12) принимает вид

$$(2\pi)^{-3}\left\langle \mathrm{VAC}\left|\left\{\psi_L(x),\overline{S}^\mu(y)\right\}\right|\mathrm{VAC}\right\rangle = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\int_0^\infty dm^2\Big[\gamma^\mu G^{(1)}(m^2)$$

$$
- \not{\partial}\partial^\mu G^{(2)}(m^2) - i\partial^\mu G^{(3)}(m^2) - i\not{\partial}\gamma^\mu G^{(4)}(m^2)\Big]\Delta_+(x-y,m)
$$

$$
+ \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\int_0^\infty dm^2 \left[\gamma^\mu \widetilde{G}^{(1)}(m^2) - \not{\partial}\partial^\mu \widetilde{G}^{(2)}(m^2) - i\partial^\mu \widetilde{G}^{(3)}(m^2)\right.
$$

$$
\left. -i\not{\partial}\gamma^\mu \widetilde{G}^{(4)}(m^2)\right]\Delta_+(y-x,m), \tag{29.2.17}
$$

где $\Delta_+(x,m)$ — стандартная функция

$$
\Delta_+(x,m) \equiv (2\pi)^{-3}\int d^4p\,\theta(p^0)\delta(p^2+m^2)\exp(ip\cdot x). \tag{29.2.18}
$$

В силу причинности антикоммутатор в левой стороне формулы (29.2.17) должен обращаться в нуль для пространственноподобных интервалов $x-y$. Для таких интервалов $\Delta_+(x-y,m)$ является четной функцией $x-y$ и поэтому (29.2.17) равно нулю для всех пространственноподобных интервалов тогда и только тогда, когда

$$
\begin{aligned}
G^{(1)}(m^2) &= -\widetilde{G}^{(1)}(m^2), \qquad & G^{(2)}(m^2) &= -\widetilde{G}^{(2)}(m^2),\\
G^{(3)}(m^2) &= +\widetilde{G}^{(3)}(m^2), \qquad & G^{(4)}(m^2) &= +\widetilde{G}^{(4)}(m^2),
\end{aligned} \tag{29.2.19}
$$

так что для произвольных $x-y$ равенство (29.2.17) принимает вид

$$
(2\pi)^{-3}\left\langle \mathrm{VAC}\left|\left\{\psi_L(x),\overline{S}^\mu(y)\right\}\right|\mathrm{VAC}\right\rangle = \int_0^\infty dm^2\left[G^{(1)}(m^2)\gamma^\mu - G^{(2)}(m^2)\not{\partial}\partial^\mu\right.
$$

$$
\left. -iG^{(3)}(m^2)\partial^\mu - iG^{(4)}(m^2)\not{\partial}\gamma^\mu\right]\Delta(x-y,m)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right), \tag{29.2.20}
$$

где, как обычно,

$$
\Delta(x-y,m) \equiv \Delta_+(x-y,m) - \Delta_+(y-x,m). \tag{29.2.21}
$$

Затем наложим условие сохранения суперсимметричного тока (29.1.2), которое (с учетом $\Box\Delta = m^2\Delta$) дает

$$
G^{(1)}(m^2) = m^2G^{(2)}(m^2), \quad m^2G^{(3)}(m^2) = -m^2G^{(4)}(m^2). \tag{29.2.22}
$$

Наконец, необходимо связать эти спектральные функции с нарушением суперсимметрии. Вспомним, что для $x^0 = y^0$

$$
\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{y},0,m) = 0, \quad \dot{\Delta}(\mathbf{x}-\mathbf{y},0,m) = -i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).
$$

Полагая $x^0 = y^0 = t$ и $\mu = 0$ в равенстве (29.2.20), получаем

$$\left\langle \mathrm{VAC} \left| \left\{ \psi_L(\mathbf{x},t), \overline{S}^0(\mathbf{y},t) \right\} \right| \mathrm{VAC} \right\rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \times \int_0^\infty dm^2 \left[G^{(3)}(m^2) + G^{(4)}(m^2) \right]. \tag{29.2.23}$$

Сворачивая справа с параметром α бесконечно малого майорановского фермионного суперсимметричного преобразования и используя соотношение (29.2.11), получим

$$i\langle \delta\psi_L \rangle_{\mathrm{VAC}} = (2\pi)^3 \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \alpha \int_0^\infty dm^2 \left[G^{(3)}(m^2) + G^{(4)}(m^2) \right]. \tag{29.2.24}$$

Но соотношения (29.2.22) показывают, что подынтегральное выражение интеграла по m^2 в (29.2.24) равно нулю везде, кроме $m^2 = 0$, так что можно сделать вывод, что

$$G^{(3)}(m^2) + G^{(4)}(m^2) = \delta(m^2)\mathcal{G}\,, \tag{29.2.25}$$

с постоянным коэффициентом $\mathcal{G}$, определяемым формулой

$$i\langle \delta\psi_L \rangle_{\mathrm{VAC}} = (2\pi)^3 \mathcal{G}\, \alpha_L. \tag{29.2.26}$$

Как было показано в разделах 26.4 и 27.4, о нарушении суперсимметрии сигнализирует появление вакуумных средних от изменений $\delta\psi$ при суперсимметричных преобразованиях одного или более спинорных полей ψ. Уравнения (29.2.25) и (29.2.26) показывают, что для любого спинорного поля такого типа спектральная функция $G^{(3)}(m^2) + G^{(4)}(m^2)$ ведет себя как дельта-функция при $m^2 = 0$. Эта особенность может возникнуть только из-за появления в суммах по состояниям (29.2.13) и (или) (29.2.14) безмассового одночастичного состояния $|g\rangle$. Чтобы матричные элементы $\langle \mathrm{VAC}|\psi|g\rangle$ и $\langle g|\psi|\mathrm{VAC}\rangle$ не равнялись нулю, безмассовая частица должна иметь спин $1/2$. Это и есть голдстино.

Вычислим вклад одноголдстинного состояния $|\mathbf{p},\lambda\rangle$ с импульсом $\mathbf{p}$ и спиральностью λ в спектральные функции $G^{(i)}(m^2)$. В силу лоренц-инвариантности матричный элемент произвольного фермионного поля (не только перенормированного поля голдстино) в формуле (29.2.13) принимает вид*

$$\langle \mathrm{VAC}|\psi(0)|\mathbf{p},\lambda\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[N\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)+N^*\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right]u(\mathbf{p},\lambda), \quad (29.2.27)$$

где N — постоянная, характеризующая выбранное фермионное поле. Дельта функция в (29.2.13) записывается как

$$\delta^4(p-p_g) = 2p^0\delta(p^2)\theta(p^0)\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}_g).$$

Вместе с равенством (29.2.7) это дает

$$\left[G^{\mu}_{\alpha\beta}(p)\right]_1 = \frac{N}{(2\pi)^3}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\theta(p^0)\delta(p^2)\not{p}\left[\gamma^{\mu}F+ip^{\mu}F'\right],$$

где индекс 1 обозначает вклад одноголдстинного состояния. Сравнение этого выражения с (29.2.15) показывает, что

$$\left[G^{(2)}(m^2)\right]_1 = i(2\pi)^{-3}NF'\delta(m^2), \qquad \left[G^{(4)}(m^2)\right]_1 = (2\pi)^{-3}NF\delta(m^2),$$
$$\left[G^{(1)}(m^2)\right]_1 = \left[G^{(3)}(m^2)\right]_1 = 0. \quad (29.2.28)$$

Итак, из формул (29.2.25) и (29.2.26) получаем

$$i\langle\delta\psi_L\rangle_{\mathrm{VAC}} = NF\alpha_L. \quad (29.2.29)$$

Очевидно, что если изменение любого фермионного поля при суперсимметричном преобразовании имеет ненулевое значение среднего по вакууму, множитель N для такого поля не может быть равен нулю. Поэтому должно существовать одноголдстинное состояние, дающее вклад в эти спектральные функции.

Чтобы сделать изложение более конкретным, вспомним, что фермионные компоненты ψ_{Ln} левокирального скалярного суперполя Φ_{Ln} подчиняются суперсимметричному закону преобразования (26.3.15)

$$\delta\psi_{Ln} = \sqrt{2}\partial_{\mu}\varphi_n\gamma^{\mu}\alpha_R+\sqrt{2}\mathscr{F}_n\alpha_L, \quad (29.2.30)$$

*И в этом случае лоренц-инвариантность допускает независимые коэфициенты N_L и N_R для $(1+\gamma_5)$ и $(1-\gamma_5)$ соответственно. Используя CPT-преобразование одночастичного состояния, вещественность коэффициентных функций, обсужденную в первой сноске этого раздела, CPT-преобразование общего фермионного поля $\mathrm{CPT}\psi(x)(\mathrm{CPT})^{-1} = \beta\varepsilon\psi(-x)$, получаем, что $N_L = N_R^*$.

в то время, как формула (27.3.5) дает суперсимметричное преобразование полей калибрино

$$\delta\lambda_A = \left(\frac{1}{4} f_{A\mu\nu}\,[\gamma^\nu,\gamma^\mu] + i\gamma_5 D_A\right)\alpha. \tag{29.2.31}$$

Следовательно множители N в матричных элементах ψ_n и λ_A между вакуумом и одноголдстинным состоянием определяются выражениями

$$N_n = iF^{-1}\sqrt{2}\,\langle\mathscr{F}_n\rangle_{\rm VAC}\,, \quad N_A = -F^{-1}\,\langle D_A\rangle_{\rm VAC}\,. \tag{29.2.32}$$

Посмотрим, как результаты (29.2.32) возникают в древесном приближении. Для перенормируемой теории калибровочных и киральных суперполей формула (27.4.30) дает часть фермионной массовой матрицы, включающей левые фермионы, в виде

$$\begin{aligned} M_{nm} &= \left(\frac{\partial^2 f(\varphi)}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m}\right)_{\varphi=\varphi_0}, \\ M_{nA} &= M_{An} = i\sqrt{2}(t_A\varphi_0)^*_n, \quad M_{AB} = 0. \end{aligned} \tag{29.2.33}$$

Потенциал (27.4.9) имеет минимум при вакуумных полях φ_{n0}, поэтому

$$0 = \left(\frac{\partial V(\dot\varphi)}{\partial\varphi_n}\right)_0 = -\sum_m M_{nm}\mathscr{F}_{m0} + \sum_A \left(\varphi_0^\dagger t_A\right)_n D_{A0}, \tag{29.2.34}$$

где $\mathscr{F}$ и D определяются формулами (27.4.6) и (27.4.7):

$$\mathscr{F}_n = -\left(\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n\right)^*, \quad D_A = \xi_A + \sum_{nm}\varphi_n^*(t_A)_{nm}\varphi_m,$$

Индекс 0 показывает, что мы положили $\varphi_n = \varphi_{n0}$. Более того, в силу калибровочной инвариантности суперпотенциала необходимо, чтобы

$$\sum_n \mathscr{F}_n\,(t_B\varphi)^*_n = 0, \tag{29.2.35}$$

для всех значений φ. Поэтому массовая матрица M левых кварков имеет собственный вектор v с $Mv = 0$, где

$$v_n = \sqrt{2}\mathscr{F}_{n0}, \quad v_A = iD_{A0}. \tag{29.2.36}$$

Итак, если в древесном приближении разложить левые фермионные поля по перенормированным полям частиц определенной массы, то коэффициенты при поле гравитино в ψ_{Ln} и λ_{AL} будут пропорциональны $\sqrt{2}\mathscr{F}_{n0}$ и iD_{A0} соответственно, что согласуется с (29.2.32).

Если отнормировать спинорные поля ψ_{Ln} и λ_A так, чтобы матрица, связывающая эти поля с перенормированными полями частиц определенной массы, была унитарна, то

$$\sum_n |N_n|^2 + \sum_A |N_A|^2 = 1. \tag{29.2.37}$$

Поэтому соотношения (29.2.32) дают непертурбативный результат:

$$|F|^2 = 2\sum_n |\langle \mathscr{F}_n \rangle_{\text{VAC}}|^2 + \sum_A |\langle D_A \rangle_{\text{VAC}}|^2. \tag{29.2.38}$$

Формула (29.2.38) для $|F|^2$ позволяет выразить среднее по вакууму от плотности (29.2.8) через средние по вакууму вспомогательных полей:

$$\rho_{\text{VAC}} = \sum_n |\langle \mathscr{F}_n \rangle_{\text{VAC}}|^2 + \frac{1}{2}\sum_A |\langle D_A \rangle_{\text{VAC}}|^2. \tag{29.2.39}$$

Это выражение является непертурбативным обобщением результата (27.4.9), полученного в нулевом порядке теории возмущений. Тем самым подтверждается использованный в разделе 27.6 вывод: необходимыми и достаточными условиями того, что суперсимметрия не нарушена, являются условия $\langle \mathscr{F}_n \rangle = \langle D_A \rangle = 0$.

* * *

Полезно посмотреть, как можно получить формулу (29.2.8) без введения конечного объема. С этой целью рассмотрим среднее по вакууму антикоммутатора двух суперсимметричных токов. Так же, как в предыдущем разделе, воспользуемся лоренц-инвариантностью и обращением в нуль антикоммутаторов для пространственноподобных интервалов; тогда получим

$$\begin{aligned}\Big\langle \text{VAC}\Big|\Big\{S^\mu(x), \overline{S}^\nu(y)\Big\}\Big|\text{VAC}\Big\rangle = -i\int dm^2 \Big[H^{(1)}(m^2)\gamma^\mu\partial^\nu + H^{(2)}(m^2)\gamma^\nu\partial^\mu \\ + H^{(3)}\,\not{\partial}\partial^\mu\partial^\nu + H^{(4)}(m^2)\,\not{\partial}\eta^{\mu\nu} + H^{(5)}(m^2)\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\delta_\lambda\gamma_\rho\Big]\,\Delta(x-y,m^2) + \ldots,\end{aligned} \tag{29.2.40}$$

где

$$\begin{aligned}\int dX\delta^4(p-P_X)\,\langle \text{VAC}\,|S^\mu_\alpha(0)|\,X\rangle \Big\langle X\Big|\overline{S}^\nu_\beta(0)\Big|\text{VAC}\Big\rangle = H^{(1)}(-p^2)\gamma^\mu p^\nu \\ + H^{(2)}(-p^2)\gamma^\nu p^\mu - H^{(3)}(-p^2)\,\not{p}p^\mu p^\nu + H^{(4)}(-p^2)\,\not{p}\eta^{\mu\nu} \\ + H^{(5)}(-p^2)\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}p_\lambda\gamma_\rho + \ldots,\end{aligned} \tag{29.2.41}$$

Здесь точки в (29.2.40) и (29.2.41) обозначают линейную комбинацию других независимых дираковских ковариантных матриц 1, γ_5, $\gamma_5\gamma_\sigma$ и $[\gamma_\sigma, \gamma_\tau]$, которые не представляют интереса. Из майорановской природы токов и формулы (26.A.20) следует, что все спектральные функции $H^{(i)}$ действительны, а закон сохранения токов суперсимметрии требует, чтобы

$$H^{(1)}(m^2) = H^{(2)}(m^2) = -m^2 H^{(3)}(m^2) - H^{(4)}(m^2), \tag{29.2.42}$$

и

$$m^2 H^{(1)}(m^2) = 0. \tag{29.2.43}$$

Полагая $\mu = \nu = 0$ и $x^0 = y^0$ в (29.2.40), интегрируя по $\mathbf{x}$ и используя (29.2.42), получаем

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{VAC} \middle| \left\{ Q, \overline{S}^0(0) \right\} \middle| \mathrm{VAC} \right\rangle = (2\pi)^3 \beta \int d m^2 \Big[H^{(1)}(m^2) + H^{(2)}(m^2) \\ + m^2 H^{(3)}(m^2) + H^{(4)}(m^2) \Big] + \ldots = (2\pi)^3 \beta \int d m^2 H^{(1)}(m^2) + \ldots .\end{aligned} \tag{29.2.44}$$

Чтобы вычислить этот антикоммутатор, сначала запишем его в виде

$$\left\{ Q, \overline{S}^\nu(x) \right\} = -2i\gamma_\mu T^{\mu\nu}(x) + \ldots, \tag{29.2.45}$$

где $T^{\mu\nu}(x)$ — некий тензорный оператор, а точки опять обозначают линейную комбинацию других независимых дираковских ковариантов. В силу майорановского характера Q и S^μ, оператор $T^{\mu\nu}(x)$ эрмитов, и он сохраняется в силу сохранения тока суперсимметрии тока в том смысле, что

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \tag{29.2.46}$$

а из антикоммутационного выражения (25.2.36) вытекает, что

$$\int d^3 x T^{\mu 0}(x) = P^\mu. \tag{29.2.47}$$

Эти свойства позволяют отождествить $T^{\mu\nu}$ с тензором энергии-импульса. Вообще говоря, он не равен *симметричному* тензору энергии-импульса $\Theta^{\mu\nu}$, обсуждавшемуся в разделе 7.4. Однако соотношение (29.2.47) показывает, что плотность энергии T^{00} может отличаться от Θ^{00} только членами с пространственными производными, которые не могут давать вклад в состояния с 3-импульсом, равным нулю. Поэтому плотность энергии вакуума определяется выражением

$$\rho_{\mathrm{VAC}} = \left\langle \mathrm{VAC} \middle| T^{00} \middle| \mathrm{VAC} \right\rangle. \tag{29.2.48}$$

Таким образом, из формул (29.2.44) и (29.2.45) следует

$$2\rho_{\mathrm{VAC}} = (2\pi)^3 \int dm^2 H^{(1)}(m^2). \tag{29.2.49}$$

Однако, из условия (29.2.43) вытекает, что $H^{(1)}(m^2)$ равно нулю везде, кроме, может быть, $m^2 = 0$, поэтому

$$H^{(1)}(m^2) = 2(2\pi)^{-3}\delta(m^2)\rho_{\mathrm{VAC}}. \tag{29.2.50}$$

Итак, еще раз показано, что наличие ненулевой плотности энергии вакуума влечет за собой существование безмассового фермиона — голдстино. Используя (29.2.7), вычисляем вклад одноголдстинного состояния в спектральные функции

$$H^{(1)}(m^2) = (2\pi)^{-3}\delta(m^2)|F|^2. \tag{29.2.51}$$

Сравнение этого выражения с (29.2.50) дает предыдущий результат (29.2.8) для плотности энергии вакуума.

29.3. Непертурбативные поправки к суперпотенциалу

В разделе 27.6 было показано, что суперпотенциал в произвольных суперсимметричных теориях калибровочных и киральных суперполей неперенормируем в любом конечном порядке теории возмущений, так что если суперсимметрия сохраняется в древесном приближении, то она может быть нарушена только непертурбативными поправками к эффективному вильсоновскому лагранжиану. Проанализируем эти поправки в общем виде. Они были тщательно исследованы в серии статей Аффлека, Дэвиса, Дайна и Зайберга в начале 80-х годов [3]. Особое внимание в них было уделено суперсимметричным версиям квантовой хромодинамики с произвольным числом цветов и ароматов. Здесь будет представлен упрощенный анализ произвольных суперсимметричных калибровочных теорий, основанный на использованных Зайбергом [4] соображенях аналитичности, о чем уже говорилось в разделе 27.7.

Для исследования непертурбативных эффектов рассмотрим произвольную перенормируемую суперсимметричную теорию, включив на этот раз в лагранжиан возможный θ-член:

$$\mathscr{L} = \Big[\Phi^\dagger e^{-V}\Phi\Big]_D + 2\,\mathrm{Re}\Big[f(\Phi)\Big]_{\mathscr{F}} + \mathrm{Re}\left[\frac{\tau}{8\pi i}\sum_{A\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{A\alpha L}W_{A\beta L}\right]_{\mathscr{F}}, \tag{29.3.1}$$

где суперпотенциал $f(\Phi)$ является калибровочно-инвариантным полиномом третьей степени по левокиральным суперполям, а параметр τ определен в (27.3.23):

$$\tau = \frac{4\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{2\pi}. \tag{29.3.2}$$

Как и в разделе 27.6, вводим два калибровочно-инвариантных левокиральных внешних суперполя, обозначаемых здесь Y и T. Лагранжиан заменяем выражением

$$\mathcal{L}^\sharp = \left[\Phi^\dagger e^{-V}\Phi\right]_D + 2\,\mathrm{Re}\left[Yf(\Phi)\right]_{\mathcal{F}} + \mathrm{Re}\left[\frac{T}{8\pi i}\sum_{A\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta}W_{A\alpha L}W_{A\beta L}\right]_{\mathcal{F}}. \tag{29.3.3}$$

Если положить спинорные и вспомогательные компоненты Y и T равными нулю и взять их скалярные компоненты в виде $y = 1$ и $t = \tau$ соответственно, то это выражение совпадает с (29.3.1). В общем случае непертурбативные эффекты будут нарушать обе симметрии, на которых базировался анализ в разделе 27.6. Операция трансляции, которая в наших обозначениях есть просто $T \to T + \xi$ с действительным ξ, не является симметрией, потому что $\sum_A \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma}$ может иметь ненулевой интеграл по пространству-времени. Исходная R-инвариантность (с T и Y, имеющими значения R, равные 0 и +2) тоже не является симметрией, потому что обсуждавшаяся в главе 22 аномалия приводит к ненулевой дивергенции R-тока. Пусть θ_L и θ_R имеют $R = +1$ и $R = -1$ соответственно, а V_A и Φ_n R-нейтральны; тогда фермионные поля λ_{AL} и ψ_{nL} имеют соответственно $R = +1$ и $R = -1$, так что выражение (22.2.26) дает

$$\partial_\mu J_R^\mu = -\frac{1}{32\pi^2}(C_1 - C_2)\sum_A \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma}, \tag{29.3.4}$$

где C_1 и C_2 — константы, определенные в (17.5.33) и (17.5.34):

$$\sum_{CD} C_{ACD}C_{BCD} = C_1\delta_{AB}, \quad \mathrm{Tr}\,\{t_A t_B\} = C_2\delta_{AB}. \tag{29.3.5}$$

Здесь шпур вычисляется по всем типам левокирального суперполя*. Например, в обобщенной суперсимметричной версии квантовой хромодинамики,

*В знаменателе формулы (29.3.4) стоит множитель 32 вместо 16, потому что у калибрино нет отличающихся от них самих античастиц, а при вычислении шпура в (29.3.5), античастицы считаются отдельно от частиц. Кроме того, мы принимаем описанную в конце раздела 27.3 договоренность и включаем множители, содержащие калибровочные константы связи, в сами калибровочные поля, а не в структурные константы или матричные генераторы t_A. Таким образом. калибровочные генераторы нормированы так, что для t_A, t_B и t_C в стандартной $SU(2)$ подалгебре калибровочной алгебры структурная константа равна $C_{ABC} = \epsilon_{ABC}$.

исследованной в работе [3], с калибровочной группой $SU(N_c)$ и N_f парами левокиральных кварковых суперполей Q_n и $\overline{Q_n}$ в фундаментальном представлении и ему комплексно сопряженном, эти константы имеют значения, получаемые из формул (17.5.35) (с $n_f = 2N_f$):

$$C_1 = N_c, \qquad C_2 = N_f.$$

Несмотря на то, что симметрия относительно трансляции T и R-инвариантность нарушаются непертурбативными эффектами, существует достаточно мощная остаточная симметрия. Рассмотрим общее R-преобразование

$$\theta_L \to e^{i\phi}\theta_L, \quad \Phi \to \Phi, \quad V_A \to V_A, \quad Y \to e^{2i\phi}Y, \tag{29.3.6}$$

с произвольным вещественным φ. При таком преобразовании T-независимые члены в лагранжиане (29.3.3) остаются неизменными. Однако согласно (29.3.4) квантовые эффекты нарушают эту симметрию так, как будто в лагранжиане есть член $\Delta\mathscr{L}$, преобразующийся как

$$\Delta\mathscr{L} \to \Delta\mathscr{L} - \frac{1}{32\pi^2}(C_1 - C_2)\sum_A \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma}\phi.$$

Вспомним выражение (27.3.18). Тогда эта добавка сокращается, если преобразование T взять в виде

$$T \to T + (C_1 - C_2)\phi/\pi. \tag{29.3.7}$$

Поскольку $W_{A\alpha L}$ имеет $R = 2$, вся теория, включающая непертурбативные эффекты, инвариантна относительно *комбинированных* преобразований (29.3.6) и (29.3.7). В частности, суперполе $\exp(2i\pi T)$, которое для $T = \tau$ периодично по θ, имеет $R = 2(C_1 - C_2)$.

Введем ультрафиолетовое обрезание и рассмотрим эффективный вильсоновский лагранжиан

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\lambda^\sharp = &\Big[\mathscr{A}_\lambda\left(\Phi, \Phi^\dagger, V, T, T^\dagger, Y, Y^\dagger, \mathscr{D}, \ldots\right)\Big]_D \\ &+ 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{T}{8\pi i}\sum_{A\alpha\beta}\sum_{A\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{AL\alpha}W_{AL\beta} + \mathscr{B}_\lambda(\Phi, W_L, T, Y)\right]_{\mathscr{F}},\end{aligned} \tag{29.3.8}$$

где $\mathscr{A}_\lambda$ и $\mathscr{B}_\lambda$ — калибровочно-инвариантные функции выписанных аргументов. Член, пропорциональный T, выписан отдельно от функции $\mathscr{B}_\lambda$, чтобы трансляция T (29.3.7) обязательно сокращала аномалию в R-преобразовании (29.3.6). В силу инвариантности относительно комбинированного преобразования (29.3.6) и (29.3.7), члены в функции $\mathscr{B}_\lambda$ должны быть пропорциональны степеням экспоненты $\exp(2i\pi T)$, имеющей определенное значение R.

Более того, в функции $\mathscr{B}_\lambda$ могут быть только *положительные* степени $\exp(2i\pi T)$. Согласно (27.3.24), только инстантоны с положительным топологическим числом $\nu \geqslant 0$ могут давать вклады в эффективную плотность лагранжиана, которые не по T^*, а по T, и от них появляются множители $\exp(2i\pi T)$. В более общем случае при $T = \tau$ любая степень $\exp(2ia\pi T)$ будет зависеть от калибровочной константы связи через множитель $\exp(-8\pi^2 a/g^2)$, так что величина a должна быть положительной, чтобы непертурбативные эффекты были подавлены для малых g. Следовательно, непертурбативные эффекты входят в $\mathscr{L}^\sharp_\lambda$ через операторы $\exp(2i\pi a T)$, имеющие положительно определенные, нулевые или отрицательно определенные значения R для $C_1 > C_2$, $C_1 = C_2$ и $C_1 < C_2$ соответственно. (В описанной ранее обобщенной суперсимметричной версии квантовой хромодинамики это соответствует $N_c > N_f$, $N_c = N_f$ и $N_c < N_f$.) Рассмотрим каждый случай в отдельности.

$C_1 > C_2$

В этом случае степени $\exp(2ia\pi T)$ с $a > 0$ имеют положительно определенные значения R, которые, согласно (29.3.7), равны $R = 2(C_1 - C_2)a$. В силу лоренц-инвариантности, если любой член в $\mathscr{B}_\lambda$ содержит $W_{A\alpha L}$, то он должен содержать по крайней мере два таких множителя. Поэтому есть только три способа построить члены в $\mathscr{B}_\lambda$ с $R = 2$: иметь два множителя W и никакой зависимости от Y и T; один множитель Y и никакой зависимости от W и T; один множитель $\exp(2i\pi T/(C_1 - C_2))$ и никакой зависимости от W и Y. Иными словами,

$$\mathscr{B}_\lambda = Y f_\lambda(\Phi) + \sum_{\alpha\beta AB} \varepsilon_{\alpha\beta} W_{A\alpha L} W_{B\beta B} \ell_{\lambda AB}(\Phi) + \exp\left(\frac{2i\pi T}{C_1 - C_2}\right) v_\lambda(\Phi). \tag{29.3.9}$$

Поскольку $f_\lambda(\Phi)$ не зависит от Y и T, это может быть только суперпотенциал в древесном приближении

$$f_\lambda(\Phi) = f(\Phi), \tag{29.3.10}$$

совпадающий с полученным по теории возмущений. Аналогично, поскольку $\ell_{\lambda AB}(\Phi)$ не зависит от Y или T, он должен иметь равные числа Φ и $\Phi^\dagger$, так что если этот множитель не зависит от $\Phi^\dagger$, то он не может зависеть от Φ. Тогда в силу лоренц-инвариантности (для простой калибровочной группы) множитель $\ell_{\lambda AB}(\Phi)$ должен быть пропорционален δ_{AB}, а поскольку он не зависит от T и Y, то использованные в разделе 27.6 соображения для подсчета степеней показывают, что коэффициент при δ_{AB} может быть только однопетлевым вкладом в обратный квадрат бегущей вильсоновской калибровочной константы связи.

Напомним, что такое бегущая калибровочная константа связи. В несуперсимметричных калибровочных теориях с фермионами уравнение (18.7.2) дает уравнение ренормгруппы в однопетлевом приближении

$$\lambda\frac{dg_\lambda}{d\lambda} = bg_\lambda^3, \tag{29.3.11}$$

где

$$b = -\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{6}C_2\right), \tag{29.3.12}$$

и $C_2 = -1/6$, а не $-1/3$, потому что сейчас левокиральные состояния антифермионов считаются отдельно от левокиральных состояний фермионов. Как было показано в разделе 28.2, вклад калибрино состоит в том, что C_1-член умножается на $9/11$, а эффект скалярных компонент левокиральных суперполей (таких как скварки и слептоны) сводится к умножению C_2-члена на $3/2$, так что в суперсимметричных теориях вместо (29.3.12) имеем

$$b = -\frac{1}{16\pi^2}(3C_1 - C_2). \tag{29.3.13}$$

Тогда получаем решение уравнения (29.3.11) для бегущей калибровочной константы связи:

$$g_\lambda^{-2} = g^{-2} + \frac{3C_1 - C_2}{8\pi^2}\ln\left(\frac{\lambda}{K}\right), \tag{29.3.14}$$

где K — ультрафиолетовое обрезание, введенное для того, чтобы придать смысл ультрафиолетово расходящейся голой калибровочной константе g.

Итак, положив $T = \tau$ и $Y = 1$, получаем эффективный вильсоновский лагранжиан для $C_1 > C_2$ в виде

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\lambda^\sharp = &\left[\mathscr{A}_\lambda\left(\Phi, \Phi^\dagger, V, \tau, \tau^*, \mathscr{D}, \ldots\right)\right]_D + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\tau_\lambda}{8\pi i}\sum_{A\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}W_{A\alpha L}W_{A\beta L}\right]_{\mathscr{F}} \\ &+ 2\,\mathrm{Re}\left[f(\Phi)\right]_{\mathscr{F}} + \exp\left(\frac{2i\pi\tau_\lambda}{C_1 - C_2}\right)\left[v_\lambda(\Phi)\right]_{\mathscr{F}},\end{aligned} \tag{29.3.15}$$

где

$$\tau_\lambda = \frac{4\pi i}{g_\lambda^2} + \frac{\theta}{2\pi}. \tag{29.3.16}$$

В последнем члене лагранжиана (29.3.15) τ в экспоненте удается заменить на τ_λ, потому что отличие равно постоянной, умноженной на $\ln\lambda$, что дает степенную зависимость от λ, которую можно включить в определение v_λ.

Итак, теперь непертурбативные эффекты выделены в последнем члене формулы (29.3.15). Этот член может появляться за счет инстантонов с топологическим числом $\nu > 0$, если $C_1 - C_2 = 1/\nu$. (В общем случае $C_1 - C_2$ является рациональным числом. Для обобщенной суперсимметричной версии квантовой хромодинамики $C_1 - C_2 = N_c - N_f$ — целое число, поэтому из условия $C_1 - C_2 = 1/\nu$ следует, что $N_c = N_f - 1$, и тогда вклад в лагранжиан вносят только инстантоны с $\nu = 1$. Подробные вычисления [5] в этой модели показывают, что инстантоны на самом деле дают такой вклад.) Однако независимо от того, вносят ли именно инстантоны непертурбативный вклад $v_\lambda(\Phi)$ в лагранжиан или нет, вид этого вклада можно определить, рассматривая неаномальные симметрии теории. Поскольку эта функция не зависит от Y, ее можно вычислить так, как будто $Y = 0$, так что в нее войдут все неаномальные симметрии первого члена в лагранжиане (29.3.1). К ним относятся сама калибровочная симметрия и глобальная симметрия относительно $\prod_d SU(n(d))$, где d отмечает различные неприводимые представления калибровочной группы, реализованной левокиральными суперполями, а число $n(d)$ показывает, сколько раз входит представление d. (Например, в обобщенной суперсимметричной квантовой хромодинамике d принимает два значения, отмечая N_c и $\overline{N_c}$ представления группы $SU(N_c)$, а $n(N_c) = n(\overline{N_c}) = N_f$.) Обозначим Φ как $\Phi^{(d)}_{ai}$, где a — калибровочный индекс, i — индекс аромата, нумерующий $n(d)$ различных Φ, преобразующихся относительно калибровочной группы по представлению d. Единственный способ построить функцию, зависящую от Φ и инвариантную относительно глобальной группы симметрии $\prod_d SU(n(d))$, — это взять произведение различных Φ, где $n(d)$ индексов аромата свернуты с антисимметричным $SU(n(d))$ тензором $\varepsilon_{i_1 \dots i_{n(d)}}$ для каждого d, а калибровочные индексы свернуты с постоянными тензорами калибровочной группы. (Например, для обобщенной суперсимметричной квантовой хромодинамики v_λ должна быть функцией единственного инварианта

$$D \equiv \mathrm{Det}_{ij} \sum_a Q_{ai} \overline{Q}_{aj},$$

который не равен нулю только для $N_c \geqslant N_f$.)

Помимо свободных от аномалий $SU(n(d))$ симметрий ароматов, существует также $U_d(1)$ симметрия для каждого из неприводимых представлений d, реализуемых теми Φ, где все $\Phi^{(d)}_{ai}$ для данного d преобразуются по правилу

$$\Phi^{(d)}_{ai} \to e^{i\varphi_d} \Phi^{(d)}_{ai}. \qquad (29.3.17)$$

Эта симметрия аномальна, причем эффекты аномалии сводятся к тому, как если бы лагранжиан подвергся преобразованию

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L} - \sum_d \frac{n(d)C_{2d}}{32\pi^2} \sum_A \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma} \varphi_d, \tag{29.3.18}$$

где C_{2d} — вклад в C_2 от любого левокирального скалярного суперполя, принадлежащего неприводимому представлению d калибровочной группы. Симметрия восстанавливается, если T обладает свойством преобразования

$$T \to T + n(d)C_{2d}\varphi_d/\pi. \tag{29.3.19}$$

Поскольку в выражении (29.3.9) $v_\lambda(\Phi)$ сопровождается множителем $\exp(2i\pi T/(C_1 - C_2))$, который преобразуется согласно

$$\exp\left(\frac{2i\pi T}{C_1 - C_2}\right) \to \prod_d \exp\left(\frac{+2in(d)C_{2d}\varphi_d}{C_1 - C_2}\right) \exp\left(\frac{2i\pi T}{C_1 - C_2}\right), \tag{29.3.20}$$

можно сделать вывод, что *для каждого представления d калибровочной группы, реализованного левокиральными скалярами, величина $v_\lambda(\Phi)$ должна быть однородной функцией $\Phi_{ai}^{(d)}$ отрицательного порядка $-2n(d)C_{2d}/(C_1 - C_2)$.* (Например, в обобщенной суперсиметричной квантовой хромодинамике есть два неприводимых представления группы $SU(N_c)$: фундаментальное и сопряженное представления, каждое с $n(d) = N_f$ и $C_{2d} = 1/2$, так что v_λ является однородной функцией порядка $-N_f/(N_c - N_f)$ по Q, принадлежащей фундаментальному представлению и однородной функцией того же порядка по $\overline{Q}$, принадлежащей представлению, сопряженному фундаментальному. Следовательно, она должна быть пропорциональна $D^{-1/(N_c-N_f)}$, где D — определитель, введенный раньше. В общем случае $C_2 = \sum_d n(d)C_{2d}$, поэтому $v_\lambda(\Phi)$ является однородной функцией всех Φ порядка $-2C_2/(C_1 - C_2)$.

Этот результат выдерживает важную проверку на совместимость. В разделе 27.4 было показано, что любой суперпотенциал имеет размерность +3 (полагая $\hbar = c = 1$ и подсчитывая степени масс), а скалярные суперполя Φ, подобно обычным скалярным полям, имеют размерность +1, так что зависящая от Φ часть v_λ должна возникать с коэффициентом размерности

$$3 + \frac{2C_2}{C_1 - C_2} = \frac{3C_1 - C_2}{C_1 - C_2}.$$

Этот коэффициент не зависит от калибровочной константы связи, а также от всех других констант или масс, входящих в суперпотенциал. Поскольку во втором члене выражения (29.3.11) голая константа связи g заменена на g_λ, он также не может зависеть от ультрафиолетового обрезания K, использованного для определения g. Поэтому он может зависеть только от λ. Следовательно,

$$v_\lambda(\Phi) = \lambda^{(3C_1 - C_2)/(C_1 - C_2)} H(\Phi), \tag{29.3.21}$$

где $H(\Phi)$ — однородная функция порядка $-2n(d)C_{2d}/(C_1 - C_2)$ тех Φ, которые принадлежат каждому представлению d калибровочной группы, и не зависящая от любого параметра теории. Тогда (29.3.14) можно переписать в форме

$$\tau_\lambda = i\frac{3C_1 - C_2}{2\pi} \ln\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right) + \frac{\theta}{2\pi}, \tag{29.3.22}$$

где Λ — энергетический параметр, характеризующий бегущую калибровочную константу связи, типа параметра $\Lambda \approx 200$ МэВ в квантовой хромодинамике. Тогда последний член в (29.3.15) имеет вид

$$\exp\left(\frac{2i\pi\tau_\lambda}{C_1 - C_2}\right) v_\lambda(\Phi) = \exp\left(\frac{i\theta}{C_1 - C_2}\right) \Lambda^{(3C_1 - C_2)/(C_1 - C_2)} H(\Phi). \tag{29.3.23}$$

Поэтому полный эффективный суперпотенциал, включающий непертурбативный вклад (29.3.23), *не зависит от плавающего обрезания* λ.

Функция $H(\Phi)$ однородна и имеет отрицательный порядок по Φ, так что в отсутствие голого суперпотенциала потенциал положительно определен при конечных значениях скалярных полей и обращается в нуль только при бесконечных значениях этих полей. В такой теории нет стабильного вакуумного состояния, и вопрос о нарушении суперсимметрии становится спорным. Вакуум можно стабилизировать, если добавить подходящий голый суперпотенциал. Например, в обобщенной суперсимметричной квантовой хромодинамике с $N_f < N_c$ единственным перенормируемым голым суперпотенциалом является сумма массовых членов

$$f(Q, \overline{Q}) = \sum_{ija} m_{ij} \overline{Q}_{ai} Q_{aj}. \tag{29.3.24}$$

Занимаясь поисками суперсимметричного вакуумного состояния, сначала следует выяснить, какие скалярные компоненты q_{ai} и $\overline{q}_{ai}$ удовлетворяют условию (27.4.11), которое в этом случае для всех генераторов t_A группы $SU(N_c)$ имеет вид

$$\sum_{abi} q^*_{ai}(t_A)_{ab} q_{bi} - \sum_{abi} \overline{q}^*_{ai}(t_A)\overline{q}_{bi} = 0. \tag{29.3.25}$$

Калибровочные взаимодействия (но не суперпотенциал) инвариантны относительно одновременных $SU(N_c)$ преобразований индексов цвета a в обеих компонентах q_{ai} и $\overline{q}_{ai}$, относительно $SU(N_f)$ и $\overline{SU(N_f)}$ преобразований индексов аромата i компонент q_{ai} и $\overline{q}_{ai}$ соответственно, и относительно $U(1)$ преобразования обеих q_{ai} и $\overline{q_{ai}}$ с противоположными фазами. Используя эти симметрии, можно все условия записать в форме

$$q_{ai} = \overline{q}_{ai} = \begin{cases} u_i \delta_{ai} & a \leqslant N_f \\ 0 & a > N_f \end{cases}, \tag{29.3.26}$$

где u_i — комплексные числа с одинаковой фазой. (Докажем это. Генераторы t_A группы $SU(N_c)$ образуют базис пространства всех бесследовых эрмитовых матриц, так что условие (29.3.25) эквивалентно требованию, что

$$\sum_i q^*_{ai} q_{bi} - \sum_i \overline{q}^*_{ai} \overline{q}_{bi} = k\delta_{ab}, \tag{29.3.27}$$

с некоторой постоянной k. С помощью комбинированного преобразования цвета и аромата $q \to UqV$, где U и V унитарны и унимодулярны, матрицу q можно привести к диагональному виду (29.3.26), а с помощью унимодулярного изменения фазы диагональных элементов можно сделать так, чтобы все они имели одинаковую фазу. Тогда условие (29.3.27) принимает вид

$$\sum_i \overline{q}^*_{ai} \overline{q}_{bi} = \begin{cases} \left(u_a^2 - k\right) \delta_{ab} & a \leqslant N_f \\ -k\delta_{ab} & a > N_f \end{cases}.$$

Условие для $a > N_f$ показывает, что $k \leqslant 0$. Если бы k не равнялось нулю, то $\overline{q_{ai}}$ реализовали бы N_c ненулевых ортогональных векторов, имеющих N_f компонент, что невозможно для $N_f < N_c$ и, следовательно, $k = 0$. Тогда компоненты $\overline{q}_{ai}$ можно привести к диагональной форме (29.3.26) с помощью серии унитарных преобразований аромата: сначала развернем $\overline{q_{1i}}$ вдоль оси 1; потом, зафиксировав первую ось, совершим поворот в пространстве, перпендикулярном этой оси, так, чтобы $\overline{q_{2i}}$ развернулись вдоль второй оси, и так далее. Затем выполним унимодулярное фазовое преобразование, так чтобы все диагональные элементы имели одинаковые фазы. Тогда равенство (29.3.27) показывает, что абсолютные значения всех диагональных элементов q_{ai} и $\overline{q}_{ai}$ равны, и с помощью неаномального изменения фаз q_{ai} и $\overline{q}_{ai}$ в противоположном направлении можно сделать так, чтобы были одинаковы их общие фазы, что и требовалось доказать.)

Функция H, входящая в (29.3.23), имеет вид

$$H(q,\overline{q}) = \mathcal{J}\left[\mathrm{Det}_{ij} \sum_a q_{ai} \overline{q}_{aj}\right]^{-1/(N_c - N_f)} = \mathcal{J}\left[\prod_i u_i\right]^{-2/(N_c - N_f)}, \tag{29.3.28}$$

где $\mathcal{J}$ — числовая константа. (Подробные вычисления показывают, что $\mathcal{J}=2$ для $N_f=2$ и $N_c=3$.) Складывая члены (29.3.23) и (29.3.24), получаем полный эффективный суперпотенциал

$$f_{\text{полн}}(q,\overline{q}) = \mathcal{K}\left[\prod_i u_i\right]^{-2/(N_c-N_f)} + \sum_i m_i u_i^2, \tag{29.3.29}$$

где

$$\mathcal{K} \equiv \mathcal{J}\exp\left(\frac{i\theta}{N_c-N_f}\right)\Lambda^{(3N_c-N_f)/(N_c-N_f)} \tag{29.3.30}$$

и m_i — диагональные элементы массовой матрицы, которые получаются, когда исходная массовая матрица подвергается $SU(N_f)\times\overline{SU(N_f)}$ преобразованию, использованному для записи скаляров в форме (29.3.26). Условие (27.4.10), при котором потенциал $f_{\text{полн}}(q,\overline{q})$ должен быть стационарным, имеет решение

$$u_i^2 = \frac{1}{m_i}\left(\frac{\mathcal{K}}{N_c-N_f}\right)^{1-N_f/N_c}\left(\prod_j m_j\right)^{-1/N_c}. \tag{29.3.31}$$

Поскольку скалярные поля записаны в базисе, в котором u_i имеют общую фазу, все m_i также должны иметь общую фазу в этом базисе. Однако общая фаза u_i^2 не единственная. Наличие $1/N_c$ степеней в (29.3.31) показывает, что решение определено с точностью до множителя $\exp(2i\pi n/N_c)$, где n принимает целые значения от 0 до N_c-1. (Два знака u_i для данного u_i^2 физически эквивалентны, потому что вся теория инвариантна относительно неаномальной симметрии с $q_{ai}\to e^{i\pi}q_{ai}$ и $\overline{q}_{ai}\to e^{-i\pi}\overline{q}_{ai}$.) Мы вернемся к тому факту, что существует N_c физически неэквивалентных решений при обсуждении индекса Виттена в следующем разделе.

$C_1 = C_2$

Этот случай интересен потому, что, как было показано в (27.9.3), простейшая $N=2$ суперсимметричная теория Янга–Миллса, записанная через $N=1$ суперполе, содержит единственное левокиральное суперполе в присоединенном представлении, для которого, конечно, $C_2=C_1$*.

*Заметим, что здесь C_2 относится к представлению калибровочной группы, реализованному киральными суперполями, так что она совпадает с величиной C_2^b из раздела 27.9, относящейся к представлению, реализованному комплексными скалярами, но равна половине величины C_2^f, относящейся к представлению, реализованному всеми спинорными полями, включая поля калибрино.

В случае $C_2 = C_1$ функция $\exp(2i\pi T)$ имеет $R = 0$, так что ее появление в $\mathscr{L}_\lambda^\sharp$ не ограничено R-инвариантностью. Общая форма F-члена в $\mathscr{L}_\lambda^\sharp$ дается выражением (29.3.9), но без последнего члена:

$$\mathscr{B}_\lambda = Y f_\lambda(\Phi, \exp(2i\pi T)) + \sum_{\alpha\beta AB} \varepsilon_{\alpha\beta} W_{A\alpha L} W_{B\beta B} \ell_{\lambda AB}(\Phi, \exp(2i\pi T)). \quad (29.3.32)$$

Поскольку потенциал f_λ может зависеть от T, нельзя сделать вывод, что он равен голому суперпотенциалу. Можно только сказать, что он зависит линейно от любых констант связи и масс, появляющихся линейно в голом суперпотенциале. В частности, *если с самого начала нет суперпотенциала, то его нельзя создать с помощью непертурбативных эффектов.*

Чтобы двигаться дальше, необходимо воспользоваться аномальной киральной симметрией относительно $U(1)$ преобразования всех Φ_n. Требование инвариантности теории относительно этой симметрии заставляет ввести отдельное внешнее левокиральное суперполе Y_r для всех слагаемых голого суперпотенциала порядка r по Φ_n. Тогда теория инвариантна относительно комбинированных преобразований

$$\Phi_n \to e^{i\phi}\Phi_n, \quad T \to T + C_2\phi/\pi, \quad Y_r \to e^{-ir\phi}Y_r. \quad (29.3.33)$$

В силу этой симметрии член в $\mathscr{B}_\lambda$, имеющий порядок $\mathscr{N}_r$ по коэффициентам члена в суперпотенциале порядка r по Φ и пропорциональный $\exp(2i\pi T)$, должен иметь порядок $\mathscr{N}_\Phi$ по Φ, равный

$$\mathscr{N}_\Phi = \sum_r r\mathscr{N}_r - 2C_2 a. \quad (29.3.34)$$

Из выражения (29.3.32) следует, что в случае $C_1 = C_2$ коэффициенты $\ell_{\lambda AB}$ в членах $\mathscr{B}_\lambda$, квадратичных по W, не должны зависеть от параметров суперпотенциала. Поэтому равенство (29.3.34) принимает в этом случае вид

$$\mathscr{N}_\Phi = -2C_2 a. \quad (29.3.35)$$

Итак, в $\ell_{\lambda AB}$ не может быть членов положительного порядка по Φ_r, и любой член в $\ell_{\lambda AB}$, независимый от Φ_r, не должен зависеть от T. Поэтому эти независимые от Φ члены в $\ell_{\lambda AB}$ являются, как и раньше, просто однопетлевым вкладом в бегущий параметр связи τ_λ.

Как видно из формулы (29.3.32), эффективный суперпотенциал должен быть линейным по параметрам суперпотенциала, так что только один член имеет $\mathscr{N}_r = 1$, а у всех других членов $\mathscr{N}_r = 0$. Для такого члена (29.3.34) принимает вид

$$\mathscr{N}_\Phi = r - 2C_2 a. \quad (29.3.36)$$

Поэтому слагаемое в эффективном суперпотенциале, имеющее $\mathcal{N}_\Phi$ степеней Φ, может появиться только из слагаемых в голом суперпотенциале, имеющих $r \geqslant \mathcal{N}_\Phi$ степеней Φ. Члены с $r = \mathcal{N}_\Phi$ имеют $a = 0$, поэтому они, так же как и голый суперпотенциал, определяются древесным приближением. Члены с $r > \mathcal{N}_\Phi$ являются непертурбативными поправками. Такое непертурбативное слагаемое заданного порядка по Φ может появиться из слагаемых голого суперпотенциала *более высокого* порядка по Φ.

$C_1 < C_2$

В этом случае значение $R = 2(C_1 - C_2)$ для $\exp(2i\pi T)$ *отрицательно*, поэтому для положительных R положительные степени $\exp(2i\pi T)$ могут компенсировать значения Y и W_α. Следовательно, $\mathcal{B}_\lambda$ может содержать члены произвольного порядка по Y и W_α. Используя условие киральной симметрии (29.3.34) и условие R-инвариантности

$$2 = \mathcal{N}_W + 2\sum_r \mathcal{N}_r - 2a(C_2 - C_1), \tag{29.3.37}$$

можно, однако, ограничить структуру членов данного порядка $\mathcal{N}_\Phi$ по Φ. Уравнения (29.3.34) и (29.3.37) имеют тривиальное решение с $\mathcal{N}_r = 1$ для $r = \mathcal{N}_\Phi$, $\mathcal{N}_r = 0$ для других значений r, $a = \mathcal{N}_W = 0$. Это решение показывает присутствие в $\mathcal{B}_\lambda$ исходного голого суперпотенциала без радиационных поправок. Если же нет исходного суперпотенциала, то $\mathcal{N}_r = 0$ для всех r и формула (29.3.35) не допускает наличия каких бы то ни было членов в вильсоновском лагранжиане с $\mathcal{N}_W = 0$. *Следовательно, в этом случае нельзя построить никакого суперпотенциала.* (В суперсимметричной версии квантовой хромодинамики этот вывод обычно делается на основании того, что из всех возможных членов в суперпотенциале не существует такого, который был бы совместим со всеми симметриями. Но, как уже говорилось, приведенный нами вывод имеет значительно более общий характер.) Для перенормируемых асимптотически свободных теорий существует полезное ограничение на структуру независящих от Φ членов в $\mathcal{B}_\lambda$. Из условия перенормируемости следует, что $\mathcal{N}_r = 0$ для $r > 3$, так что, вычитая из (29.3.37) выражение (29.3.34), умноженное на 2/3, получаем

$$2 \geqslant \frac{2}{3}\mathcal{N}_\Phi + \mathcal{N}_W + 2a\left(C_1 - \frac{1}{3}C_2\right). \tag{29.3.38}$$

В силу асимптотической свободы $3C_1 > C_2$, поэтому для $\mathcal{N}_\Phi = 0$ (или $\mathcal{N}_\Phi > 0$) каждый член справа положителен. Следовательно, не может быть независимых от Φ членов более высокой степени по W, чем вторая, и эти члены, кроме того, не зависят от T. Следовательно, они опять представляют однопетлевой вклад в бегущий параметр связи τ_λ. Однако, для $C_1 < C_2$ нет общего запрета на члены второго и более высокого порядка по W и члены с отрицательной степенью Φ.

29.4. Нарушение суперсимметрии в калибровочных теориях

Обратимся к вопросу, представляющему большой физический интерес: в каких калибровочных теориях имеется спонтанное нарушение суперсимметрии?

Начнем с абелевой калибровочной теории — суперсимметричной версии квантовой хромодинамики, описанной в разделе 27.5. Эта теории обладает $U(1)$ калибровочной симметрией и содержит два суперполя $\Phi_\pm$, несущие квантовые числа $\pm e$ группы $U(1)$, и суперпотенциал $f(\Phi) = m\Phi_+\Phi_-$. В разделе 27.5 было показано, что суперсимметрия нарушается в древесном приближени, если в лагранжиан включить член Файе–Иллиопулоса $\xi[V]_D$, так что индекс Виттена равен нулю при $\xi \neq 0$ и малых значениях e, откуда следует, что он равен нулю для всех значений e и ξ, в том числе и для $\xi = 0$. Сохраняется ли суперсимметрия при $\xi = 0$? Она сохраняется в древесном приближении, но можно ли сказать то же самое, если поправки более высокого порядка теории возмущений или непертурбативные эффекты в этом случае дают конечное значение энергии вакуума?

Чтобы ответить на эти вопросы, воспользуемся принципом симметрии теории для $\xi = 0$ так, как это было описано в общем виде в разделе 29.1. Симметрией теории является в данном случае зарядовое сопряжение: полная плотность лагранжиана инвариантна относительно преобразования зарядового сопряжения кирального и калибровочного суперполей:

$$\mathsf{C}\Phi_\pm\mathsf{C}^{-1} = \Phi_\mp, \quad \mathsf{C}V\mathsf{C}^{-1} = -V. \tag{29.4.1}$$

В древесном приближении имеется безмассовый фермион — фотино, но если принять, что вакуум четен относительно C, то состояние одного фотино будет нечетным относительно C, поэтому эти состояния не связаны между собой умножением на генератор суперсимметрии. В этой теории киральный фермион в древесном приближении имеет массу m, так что при малых e он также не спарен с вакуумом. Если нет фермионного состояния для спаривания, вакуумное состояние должно иметь энергию, строго равную нулю, по крайней мере для достаточно малых e, так что теория возмущений дает хорошую качественную картину спектра. Как было показано в разделе 29.1, нулевое значение энергии вакуума означает, что суперсимметрия не нарушена. Аналогично, фотино должно иметь массу, строго равную нулю, поскольку для него нет бозонного состояния, с которым можно образовать пару.

Возникает вопрос: что делать с теми значениями e, при которых уже нельзя доверять теории возмущений? Сам по себе индекс Виттена здесь не может помочь, потому что он обращается в нуль. Вместо него рассмотрим взвешенный индекс Виттена $\mathrm{Tr}\, \mathsf{C}(-1)^F$. Как уже было показано, для малых значений e и $\xi = 0$ вакуум имеет нулевую энергию, и существуют, кроме того, два состояния нулевой энергии, содержащие фотино нулевого импульса и противоположными спинами, и одно бозонное состояние нулевой энергии, содержащее два фотино с нулевыми импульсами и противоположными спинами. Вклад вакуума во взвешенный индекс Виттена равен $+1$; вклад двух состояний одного фотино равен $+2$ (поскольку и C, и $(-1)^F$ равны -1), вклад состояния двух фотино равен $+1$. В результате получаем $\mathrm{Tr}\, \mathsf{C}(-1)^F = 4$. Это значение не зависит от e, поэтому даже для больших значений констант связи взвешенный индекс Виттена равен 4 и, следовательно, суперсимметрия не нарушена.

Здесь есть одна сложность [2]. При перечислении состояний с нулевым импульсом в древесном приближении мы не рассматривали компоненты калибровочного поля $V_\mu(x)$ нулевого импульса. Постоянный член в $V_0(x)$ не вызывает трудностей, потому что его можно убрать калибровочным преобразованием

$$V_\mu(x) \to V_\nu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \tag{29.4.2}$$

с калибровочным параметром $\Lambda(x)$, пропорциональным x^0. С другой стороны, нельзя просто убрать постоянный член в $V_i(x)$, потому что для этого необходимо калибровочное преобразование с $\Lambda(x)$, пропорциональным x^i, что будет противоречить предполагаемой периодичности полей относительно сдвигов на размер ящика $L \equiv V^{1/3}$. В частном случае, рассматриваемом сейчас, все поля имеют заряды $\pm e$ и 0, поэтому периодичность сохраняется, если ограничиться калибровочными преобразованиями на решетке с параметром

$$\Lambda(x) = \frac{2\pi}{eL} \sum_i \ell_i x^i, \tag{29.4.3}$$

где ℓ_i — три положительных или отрицательных целых числа. Поэтому, хотя и нельзя убрать калибровочным преобразованием компоненты $V_i(x)$, соответствующие нулевому импульсу, их можно произвольно сдвигать на величины $2\pi\ell_i/eL$. Функция Лагранжа (не лагранжиан) в древесном приближении для независящей от x^i части V_μ в калибровке $V_0 = 0$ равен просто $-\frac{1}{2}L^3 \sum_i (\partial_0 V_i)^2$. Поэтому гамильтониан равен $+\frac{1}{2}L^{-3}\sum_i(\pi)^2$, где π_i канонически сопряжено к V_i: $\pi_i = L^3 \partial_0 V_i$. Тогда для этого поля волновая функция $\Psi(\mathbf{V})$ подобна волновой функции свободной частицы единичной массы, заключенной в трехмерный ящик с линейными размерами $2\pi/eL$ с периодическим граничными условиями. Волновые функции с определенной энергией $\mathbf{k}^2/2L^3$ и $k_i = eL\ell_i$ и целыми ℓ_i, пропорциональны $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{V})$. Это поле имеет единственное состояние нулевой энергии с $k_i = 0$, для которого нормированная волновая функция постоянна и равна $(eL/2\pi)^{3/2}$. Поскольку это состояние единственно, то калибровочная степень свободы не изменяет подсчет состояний нулевой энергии, и взвешенный индекс Виттена действительно равен 4.

Теперь рассмотрим теорию простого неабелева калибровочного суперполя без киральных суперполей. В работе Виттена 1982 года [2], где введен индекс Виттена, показано, что для таких теорий он равен $r+1$ (или, возможно, $-r-1$), где r обозначает ранг калибровочной группы, т. е. максимальное число коммутирующих генераторов. В 1997 году Виттен нашел поправку к этому результату [6], т. е. показал, что для классических унитарных, ортогональных и симплектических групп этот индекс является инвариантом Казимира C_1, который, действительно, равен $r+1$ для унитарных и симплектических групп, но для ортогональных групп $O(N)$ с $N > 7$ и исключительных групп имеет другое значение. В общем случае инвариант Казимира определяется формулой (17.5.33):

$$\sum_{CD} C_{ACD}C_{BCD} = g^2 C_1 \delta_{AB}, \qquad (29.4.4)$$

где g — постоянная связи, определение которой может быть сделано однозначным, если ограничить генераторы t_A, t_B и t_C генераторами «стандартной» $SU(2)$ подалгебры, использованной для вычисления инстантонных эффектов в разделе 23.5, а структурная константа есть просто $g\epsilon_{ABC}$. Тогда для классических групп имеем

$$C_1 = \begin{cases} N & SU(N) \\ N-2 & SO(N) \text{ для } N>3 \\ N+1 & USp(2N) \end{cases}. \qquad (29.4.5)$$

Ранг группы $SU(N)$ равен $r = N-1$, а ранг группы $USp(2N)$ равен $r = N$, поэтому в обоих случаях $r+1 = C_1$. Однако, группа $SO(N)$ с $N > 6$ имеет ранг $r = (N-1)/2 = (C_1+1)/2$ для нечетных N и $r = N/2 = (C_1+2)/2$ для четных N. Поэтому индекс равен C_1, а не $r+1$. Конечно, это не влияет на главный вывод, что если индекс Виттена не равен нулю, то нет спонтанного нарушения суперсимметрии. Кац и Смилга показали в 1999 году, что индекс равен C_1 и для исключительных групп [7]. Мы вычислим здесь индекс Виттена только для $SU(N)$ и $USp(2N)$ суперсимметричных калибровочных теорий без киральных суперполей. Однако, в процессе этих вычислений станет ясно, почему в ортогональных и исключительных группах возникают дополнительные сложности.

Общая стратегия вычислений такая же, как и для уже рассмотренных абелевых теорий. Сначала исследуем состояния нулевой энергии, чтобы увидеть есть ли среди них такие, которые не могут быть спарены действием генератора суперсимметрии. Если они есть, то пока связь достаточно слабая и древесное приближение дает хорошую качественную картину спектра, эти неспаренные состояния действительно имеют энергию, строго равную нулю. Тогда можно найти ненулевой взвешенный индекс Виттена, который будет постоянным даже для более сильных констант связи. Это позволит сделать вывод, что суперсимметрия не нарушается для любых значений константы связи.

Здесь возникает другая сложность, которой не было при рассмотрении абелевой теории с заряженными киральными суперполями. Обычно говорится, что произвольные перенормируемые теории калибровочных бозонов и калибрино без киральных суперполей вообще не содержат безразмерных параметров, поэтому не существует параметра связи, который мог бы быть подобран так, чтобы сделать связь слабой. Вместо этого имеется бегущая константа связи, зависящая от отношения энергии к характерному энергетическому масштабу Λ, подобно обсуждавшемуся в разделе 18.7 масштабу $\Lambda \approx 200$ МэВ в квантовой хромодинамике. Для неабелевых теорий калибровочная константа связи становится сильной при энергиях ниже Λ, независимо от того, какой слабой она была при более высоких энергиях. Но здесь рассматривается ящик объемом L^3, обеспечивающий инфракрасное обрезание при энергиях $\approx 1/L$, что обычно отсутствует в теориях с ненарушенными калибровочными симметриями. Когда речь идет о калибровочной теории со слабой связью, следует понимать, что имеется в виду теория со связью, малой вплоть до энергий порядка $1/L$. В этом случае, чтобы сделать какое либо заключение о реалистическом пределе бесконечного объема, существенно уметь ответить на вопрос: нарушается ли суперсимметрия как для слабой, так и для сильной связи?

Будем работать во временно́й калибровке $V_A^0 = 0$. Тогда лагранжиан (27.3.1) имеет вид

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\sum_{Aij} f_{Aij}^2 - \frac{1}{2}\sum_{A}(\partial_0 V_{Ai}) - \frac{1}{2}\sum_{A}\left(\overline{\lambda}_A(\not{D}\lambda)_A\right) + \frac{1}{2}\sum_{A} D_A^2, \tag{29.4.6}$$

где во временной калибровке

$$f_{Aij} = \partial_i V_{Aj} - \partial_j V_{Ai} + \sum_{BC} C_{ABC} V_{Bi} V_{Cj}, \tag{29.4.7}$$

$$(D_i\lambda)_A = \partial_i\lambda_A + \sum_{BC} C_{ABC} V_{Bi} \lambda_C, \tag{29.4.8}$$

$$(D_0\lambda)_A = \partial_0\lambda_A. \tag{29.4.9}$$

(Как обычно, калибровочная константа связи или другие константы включены как множители в структурные константы C_{ABC}.) В отсутствие киральных суперполей нет другой зависимости от вспомогательного поля D_A. Поскольку оно входит квадратично, его можно положить равным значению $D_A = 0$, при котором лагранжиан стационарен, и забыть о нем. Сохранив только моды, независящие от $\mathbf{x}$, можно записать эффективную функцию Лагранжа в виде

$$\int d^3x \mathscr{L} = L^3 \left[-\frac{1}{4} \sum_{Aij} \left(\sum_{BC} C_{ABC} V_{Bi} V_{Cj} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{Ai} \left(\partial_0 V_{Ai} \right)^2 \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{ABCi} C_{ABC} \left(\bar{\lambda}_A \gamma_i V_{Bi} \lambda_C \right) - \frac{1}{2} \sum_A \bar{\lambda}_A \gamma^0 \partial_0 \lambda_A \right]. \tag{29.4.10}$$

Тогда гамильтониан

$$H = \frac{1}{2L^3} \sum_{Ai} \pi_{Ai}^2 + \frac{L^3}{4} \sum_{Aij} \left(\sum_{BC} C_{ABC} V_{Bi} V_{Cj} \right)^2 + \frac{L^3}{2} \sum_{ABCi} C_{ABC} \left(\bar{\lambda}_A \gamma_i V_{Bi} \lambda_C \right), \tag{29.4.11}$$

где $\pi_{Ai} = L^3 \partial_0 V_{Ai}$ канонически сопряжен с V_{Ai}.

Конфигурациями калибровочных полей с нулевой энергией в древесном приближении будут те, для которых $\sum_{BC} C_{ABC} V_{Bi} V_{Cj} = 0$ для всех A, i и j. Это условие удовлетворяется всегда, если V_{Bi} равно нулю для всех i, кроме случая, когда t_B принадлежит подалгебре Картана калибровочной алгебры Ли*. Для унитарных и симплектических групп и их прямых произведений это единственная возможность удовлетворить такому условию. То же самое верно для ортогональных калибровочных алгебр $O(N)$ с $N \leqslant 6$, которые эквивалентны симплектическим и (или) унитарным алгебрам Ли (см. Приложение к главе 15), но не выполняется для ортогональных калибровочных алгебр $O(N)$ с $N \geqslant 7$. Вот почему в этом случае первые вычисления Виттена требовали коррекции.

***Подалгеброй Картана* является любая подалгебра, реализованная r независимыми генераторами $t_{\mathscr{A}}$, коммутирующими между собой, т. е. для которых $C_{A\mathscr{A}\mathscr{B}}$ равняется нулю для всех t_A, когда $t_{\mathscr{A}}$ и $t_{\mathscr{B}}$ принадлежат подалгебре Картана, где r — ранг, т. е. максимальное число таких генераторов. Например, для обсуждавшейся в разделе 19.7 $SU(3)$ симметрии сильных взаимодействий ранг $r = 2$, и подалгебру Картана можно выбрать состоящей из третьей компоненты изоспина t_3 и гиперзаряда t_8, которые действуют на легкие кварки коммутирующими матрицами, обозначенными в (19.7.2) λ_3 и λ_8.

Далее будем рассматривать только калибровочные алгебры, подобные симплектическим и унитарным, для которых условие нулевой энергии в древесном приближении требует обращения V_{Bi} в нуль для всех i, кроме случая, когда t_B принадлежит подалгебре Картана калибровочной алгебры Ли. Если все $V_{Ai} = 0$, кроме тех $V_{\mathscr{A}\,i}$, для которых $t_{\mathscr{A}}$ принадлежит подалгебре Картана, то нулевыми модами фермионного поля будут моды, для которых $\lambda_A = 0$, за исключением тех $\lambda_{\mathscr{A}}$, для которых $t_{\mathscr{A}}$ принадлежит подалгебре Картана.

Теперь следует подсчитать эти состояния. Собственные значения $t_{\mathscr{A}}$ в любом представлении полупростой алгебры Ли квантованы. Поэтому с помощью калибровочных преобразований все значения ненулевых калибровочных полей $V_{\mathscr{A}\,i}$ могут быть определены эквивалентными их значениям в ящике конечного размера с периодическими граничными условиями. Эти моды квантуются аналогично тому, как это делалось для калибровочного поля в $U(1)$ рассмотренной ранее модели. Поэтому состояние этих полей с нулевой энергией снова единственно и обладает постоянной волновой функцией в ящике.

Кратность состояний нулевой энергии в древесном приближении возникает только за счет фермионных степеней свободы. Удобно пользоваться двухкомпонентными обозначениями, когда, вместо четырехкомпонентного майорановского поля $\lambda_{\mathscr{A}\,A}$ для каждого генератора подалгебры Картана, берутся два левых поля $\lambda_{\mathscr{A}\,La}$ с $a = \pm 1/2$ и правые эрмитово сопряженные им поля $\lambda^*_{\mathscr{A}\,La}$. Эти поля калибрино удовлетворяют каноническим антикоммутационным соотношениям

$$\left\{\lambda_{\mathscr{A}\,La}, \lambda^*_{\mathscr{B}\,Lb}\right\} = \delta_{\mathscr{A}\mathscr{B}}\delta_{ab}$$

и

$$\left\{\lambda_{\mathscr{A}\,La}, \lambda_{\mathscr{B}\,Lb}\right\} = \left\{\lambda^*_{\mathscr{A}\,La}, \lambda^*_{\mathscr{B}\,Lb}\right\} = 0.$$

Действуя на вектор произвольного состояния полем $\lambda_{\mathscr{A}\,La}$ столько раз, сколько это необходимо, можно построить вектор состояния $|0\rangle$, который аннигилируется всеми $\lambda_{\mathscr{A}\,La}$. Тогда произвольный вектор состояния, отвечающий нулевой энергии, является линейной комбинацией произведений $\lambda^*_{\mathscr{A}\,La}$, действующих на $|0\rangle$.

Чтобы увидеть, как эти состояния могут быть спарены за счет действия генератора суперсимметрии, необходимо учесть симметрию теории. Условие нулевой энергии, т. е. условие, что калибровочные поля и поля калибрино лежат только в направлениях, соответствующих подалгебре Картана, инвариантно относительно подгруппы исходной калибровочной группы, состоящей из элементов h, сохраняющих инвариантность этой подалгебры, т. е. для которой $h^{-1}t_{\mathscr{A}}h$ является линейной комбинацией $t_{\mathscr{B}}$.

Эти элементы образуют конечную группу, называемую *группой Вейля*. Например, в фундаментальном представлении $SU(N)$ группа Вейля состоит из перестановок N координатных осей вместе с умножением на фазу, необходимую, чтобы сделать преобразования унимодулярными. Они могут быть представлены произведениями конечных калибровочных преобразований $W(i,j) = \exp(i\pi\sigma(ij)/2) = i\sigma(ij)$ с $i \neq j$, которые переставляют i-ю и j-ю координатные оси, где $\sigma(ij)$ — $U(N)$ генератор, у которого $[\sigma(ij)]^i{}_j = [\sigma(ij)]^j{}_i = 1$, а все остальные элементы равны нулю. Эти преобразования порождают ортогональные преобразования в пространстве, натянутом на диагональные бесследовые эрмитовые матрицы $t_{\mathscr{A}}$, которые генерируют подалгебру Картана в присоединенном представлении. Например, для группы $SU(2)$ можно взять подалгебру Картана, состоящую только из t_3. Тогда группа Вейля состоит из единичного элемента и единственного нетривиального калибровочного преобразования $W(1,2) = i\sigma(1,2) = i\sigma_1$, для которого $W^{-1}t_3W = -t_3$. Для группы $SU(3)$ подалгебра Картана имеет два генератора λ_3 и λ_8, а группа Вейля состоит из шести калибровочных преобразований: 1, $W(1,2)$, $W(2,3)$, $W(1,3)$, $W(1,2)W(2,3)$ и $W(2,3)W(1,2)$, которые генерируют повороты на углы, кратные 60°, в пространстве, реализованном t_3 и t_8.

Предполагая, что вакуум инвариантен относительно группы Вейля, его можно спарить действием генераторов суперсимметрии только с другими состояниями, инвариантными относительно этой группы*. Ранее построенное состояние нулевой энергии $|0\rangle$ может быть среди них, но может и не быть. Условие, что состояние $|0\rangle$ аннигилируется всеми $\lambda_{\mathscr{A}La}$, очевидно инвариантно относительно группы Вейля, поэтому если оно единственно, то это состояние должно реализовать одномерное представление группы Вейля. Группа Вейля всегда действует на генераторы подалгебры Картана посредством ортогональных преобразований, поэтому существуют два таких представления: инвариантное представление, в котором каждое преобразование Вейля представлено единицей, и псевдоинвариантное представление, в котором каждое преобразование Вейля представлено детерминантом его действия на генераторы подалгебры Картана.

Сначала рассмотрим случай, когда состояние $|0\rangle$ инвариантно относительно преобразований группы Вейля. Очевидно, что ни одна линейная комбинация однофермионных состояний $\lambda^*_{\mathscr{A}La}|0\rangle$ не может быть инвариантной относительно группы Вейля. Есть только одна инвариантная относительно этой группы линейная комбинация двухфермионных состояний; она имеет

*Виттен заметил, что физические состояния обязаны быть вейль-инвариантными, но мы здесь не станем в это вникать, потому что инвариантность вакуума относительно группы Вейля и генераторов суперсимметрии означает, что только вейль-инвариантные состояния имеют отношение к спонтанному нарушению суперсимметрии.

вид $U|0\rangle$, где

$$U \equiv \sum_{ab\mathscr{A}} e_{ab}\lambda^*_{\mathscr{A}\,La}\lambda^*_{\mathscr{A}\,Lb}. \qquad (29.4.12)$$

(Спиновые индексы a и b свернуты с антисимметричным тензором e_{ab}, определенным формулой (25.2.9), потому что в силу антикоммутационных соотношений произведение $\lambda^*_{\mathscr{A}\,La}\lambda^*_{\mathscr{A}\,Lb}$ антисимметрично по a и b.) Существуют различные инвариантные относительно группы Вейля линейные комбинации произведений трех и более генераторов подалгебры Картана, но в силу антикоммутации $\lambda^*_{\mathscr{A}\,La}$, они все обращаются в нуль, кроме тех, куда входят степени $U^\star$. Кроме того, в произведении более чем r множителей U некоторые $\lambda^*_{\mathscr{A}\,La}$ должны входить дважды, поэтому $U^{r+1}=0$. Из этого следует вывод, что число инвариантных относительно группы Вейля состояний ограничено числом $r+1$:

$$|0\rangle, U|0\rangle, U^2|0\rangle, \ldots, U^r|0\rangle, \qquad (29.4.13)$$

Все эти состояния — бозонные, а поскольку в древесном приближении нет фермионных состояний нулевой энергии, с которыми они могли бы быть

---

*Чтобы это увидеть для группы $SU(N)$, заметим, что каждый генератор $t_{\mathscr{A}}$ подалгебры Картана этой группы может быть записан как линейная комбинация $t_{\mathscr{A}} = \sum_i c_{\mathscr{A}\,i}T_i$ генераторов T_i подалгебры Картана группы $U(N)$. Каждый генератор T_i имеет единственный ненулевой элемент $(T_i)^i{}_i = 1$ (по индексам нет суммирования). Генераторы $t_{\mathscr{A}}$ имеют равный нулю след при условии $\sum_i c_{\mathscr{A}\,i} = 0$. Поскольку поля $\lambda^*_{\mathscr{A}\,La}$ при преобразованиях группы Вейля преобразуются подобно генераторам $t_{\mathscr{A}}$, то для того, чтобы функция $\sum_{\mathscr{A}\mathscr{B}\ldots} d_{\mathscr{A}\mathscr{B}\ldots}\lambda^*_{\mathscr{A}\,La}\lambda^*_{\mathscr{B}\,Lb}\cdots$ была инвариантной относительно группы Вейля, коэффициенты $d_{\mathscr{A}\mathscr{B}\ldots}$ должны иметь вид

$$d_{\mathscr{A}\mathscr{B}\ldots} = \sum_{ij\ldots} c_{\mathscr{A}\,i}c_{\mathscr{B}\,j}\cdots D_{ij\ldots},$$

где $D_{ij\ldots}$ — инвариантные тензоры, в том смысле, что для любого из векторов u_i, v_i и т. д. функция $D(u,v,\ldots) \equiv \sum_{ij\ldots} D_{ij\ldots}u_iv_j\ldots$ инвариантна относительно перестановок осей координат. В общем случае такая функция является линейной комбинацией произведений функции

$$S(x,y,z,\ldots) = \sum_i x_iy_iz_i\cdots,$$

где аргументы x, y, z, … рассматриваются как разные подмножества u, v и т.д. Однако поскольку $\sum_i c_{\mathscr{A}\,i} = 0$, в нашем случае сумма компонент каждого вектора равна нулю, и поэтому: $D(u) = S(u) = 0$; $D(u,v)$ пропорциональна $S(u,v)$; $D(u,v,w)$ пропорциональна $S(u,v,w)$; $D(u,v,w,x)$ является линейной комбинацией $S(u,v,w,x)$, $S(u,v)S(w,x)$, $S(u,w)S(v,x)$ и $S(u,x)S(v,w)$; и т. д. Здесь важно то, что хотя функция $D(u,v,\ldots)$ может быть не симметричной по своим аргументам (потому что различные произведения S могут входить с разными коэффициентами), функции $S(u,v,\ldots)$ *симметричны*. В нашем случае векторы являются антикоммутирующими величинами $u(a)_i = \sum_{\mathscr{A}} \lambda^*_{\mathscr{A}\,La}c_{\mathscr{A}\,i}$, для которых единственная ненулевая S-функция равна $S(u(1/2),u(-1/2))$. При соответствующей нормировке генераторов это есть оператор U.

спарены, то для достаточно слабой связи эти состояния должны иметь строго равную нулю энергию. Следовательно, суперсимметрия не нарушается. В этом случае индекс Виттена равен $r+1$, и он не зависит от величины константы связи, поэтому *каково бы ни было значение калибровочной константы связи, суперсимметрия спонтанно не нарушается.*

В случае, когда состояние $|0\rangle$ псевдоинвариантно, инвариантные относительно группы Вейля состояния имеют вид

$$\sum_{\mathcal{A},\mathcal{B},\ldots} \varepsilon_{\mathcal{A}\mathcal{B},\ldots} \lambda^*_{\mathcal{A}La} \lambda^*_{\mathcal{A}Lb} \cdots |0\rangle, \tag{29.4.14}$$

где $\varepsilon_{\mathcal{A}\mathcal{B}\ldots}$ — полностью антисимметричный тензор ранга r. Это выражение полностью симметрично по a, b и т. д., поэтому каждое состояние характеризуется некоторым числом тех индексов, которые равны $+1/2$, а не $-1/2$. Это число может принимать любое значение от 0 до r. Следовательно, число независимых состояний равно $r+1$. В зависимости от четности r, эти состояния либо все бозонные, либо все фермионные, так что индекс Виттена равен $\pm(r+1)$. Таким образом, и в этом случае нет спонтанного нарушения суперсимметрии.

Существует интересная связь между значением полученного здесь индекса Виттена и соображениями о том, как нарушаются некоторые глобальные симметрии. Лагранжиан суперсимметричной калибровочной теории инвариантен относительно преобразований глобальной $U(1)$ R-симметрии, которые делают противоположными фазы левых и правых частей полей калибрино:

$$\lambda_{AL} \to e^{i\varphi}\lambda_{AL}, \quad \lambda_{AR} \to e^{-i\varphi}\lambda_{AR}, \tag{29.4.15}$$

где φ — произвольная постоянная действительная фаза. Сохранение тока J_5^μ, связанного с этой симметрией, нарушается аномалией

$$\partial_\mu J_5^\mu = -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{ABCD} C_{ACD} C_{BCD} f_A^{\mu\nu} f_B^{\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{29.4.16}$$

где, как обычно, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ — полностью антисимметричная величина с $\varepsilon^{0123} \equiv 1$. (Это выражение получается из (22.2.24), если взять генераторы калибровочной группы t_A в виде $(t_A)_{BC} = -iC_{ABC}$, потому что калибрино принадлежат присоединенному представлению калибровочной группы. Затем аномалия умножается на $1/2$, поскольку калибрино не отличаются от своих античастиц.) Определив калибровочную константу связи как выше, из выражения (25.3.20) получаем интеграл от произведения напряженностей полей в аномалии в виде

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4x \sum_A f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma} = 64\pi^2 \nu / g^2, \tag{29.4.17}$$

где топологическое число ν — целое число, характеризующее топологический класс, к которому принадлежит калибровочное поле калибрино. Собрав вместе формулы (29.4.4), (29.4.16) и (29.4.17), видим, что инстантон с топологическим числом ν вызывает изменение в $R \equiv \int d^3x J_5^0$, равное

$$\Delta R = \int d^4x \partial_\mu J_5^\mu = -2\nu C_1. \tag{29.4.18}$$

Из этого равенства следует, что эффективное действие содержит члены $(\sum_{Aab} \lambda_{\mathscr{A} La} \lambda_{\mathscr{A} Lb} e_{ab})^{C_1}$ и его целые степени, которые, вместо того, чтобы быть инвариантными относительно R-преобразований (29.4.15), преобразуются, приобретая целые степени фазы $\exp(2i\varphi C_1)$. Таким образом, инстантоны нарушают инвариантность относительно произвольного $U(1)$ R-преобразования (29.4.15), сводя его к преобразованиям (29.4.15) группы Z_{2C_1}, где φ является целым кратным π/C_1. Можно ожидать, что рост калибровочной константы связи при низких энергиях приведет (как в квантовой хромодинамике) к появлению средних по вакууму от билинейных комбинаций калибрино, что означало бы, что дискретная группа симметрии Z_{2C_1} нарушается спонтанно до подгруппы Z_2, генерированной простым изменением знака мультиплета калибрино. Тогда в результате действия на любое одновакуумное состояние $|X\rangle$ элементами $\exp(in\pi R/C_1)$ группы Z_{2C_1} появилось бы C_1 состояний $|n\rangle$ нулевой энергии, где n принимает только значения $0, 1, \ldots, C_1 - 1$, потому что любая пара состояний, отличающаяся лишь действием генератора $\exp(i\pi R)$ группы Z_2, рассматривается как эквивалентная. Поскольку $|X\rangle$ могут быть только линейной комбинацией состояний с четными значениями R, можно построить C_1 состояний со значениями $\mathscr{R} = 0, 2, \ldots, 2C_1 - 2$ оператора R, взяв линейные комбинации

$$\sum_n \exp\left(\frac{in\pi\mathscr{R}}{C_1}\right)|n\rangle.$$

В частности, для $SU(N)$ и $USp(2N)$ эти состояния будут теми же инвариантными относительно группы Вейля состояниями, которые возникли при вычислении индекса Виттена для случая, когда состояние $|0\rangle$ R-инвариантно, причем оно инвариантно, а не псевдоинвариантно, относительно группы Вейля. Оператор U, определенный формулой (29.4.12), имеет $R = 2$, поэтому есть $r + 1 = C_1$ состояний $U^n|0\rangle$ с $R = 2n$, пробегающим значения от 0 до $2r = 2C_1 - 2$. Итак, присутствие C_1 состояний нулевой энергии, подчиняющихся одной статистике, помогает объяснить, почему индекс Виттена равен $\pm C_1$ как для исключительных и ортогональных, так и для унитарных и симплектических групп.

Тот факт, что индекс Виттена не равен нулю для всех чисто калибровочных суперсимметричных теорий, означает, что для того, чтобы обнаружить примеры спонтанного нарушения суперсимметрии, необходимо добавить киральные суперполя. Добавление в теорию *массивных* киральных суперполей не помогает, потому что для слабой связи введение таких полей не изменяет набора состояний нулевой энергии. Такой пример нам уже встречался — это рассмотренная в разделе 29.3 работа Аффлека, Дайна и Зайберга. Авторы показали, что $SU(N_c)$ калибровочная теория с $N_f < N_c$ левокиральными суперполями Q_{ai} в фундаментальном представлении $SU(N_c)$ и таким же числом левокиральных суперполей $\overline{Q_{ai}}$ в комплексно сопряженном представлении и массовым членом $\sum_{aij} m_{ij}\overline{Q_{ai}}Q_{ai}$ имеет N_c бозонных состояния нулевой энергии и ни одного фермионного состояния нулевой энергии. (Это пример случая, когда индекс Виттена не сохраняется при обращении массового члена в нуль, потому что этот массовый член — более высокого порядка по суперполям в суперпотенциале, так что обращение масс в нуль изменяет поведение суперпотенциала для больших значений суперполей. По существу, выражение (29.3.31) показывает, что, когда массы стремятся к нулю, значения скалярного поля в состоянии нулевой энергии стремятся к бесконечности.)

С другой стороны, несложно построить теорию с левокиральными суперполями и симметрией, в которой массы остаются равными нулю, а суперсимметрия динамически нарушается. Например, рассмотрим $SU(N_c)$ калибровочную теорию с N_f левокиральными суперполями Q_{ai} и N_f левокиральными суперполями $\overline{Q_{ai}}$ в представлениях N_c и $\overline{N_c}$ калибровочной группы, но добавим в теорию N_f левокиральных суперполей L_i, нейтральных относительно калибровочной группы $SU(N_c)$. Предположим наличие глобальной (или слабо связанной локальной) $SU(N_f)$ симметрии, действующей на индексы аромата i полей Q и L, но не действующей на $\overline{Q}$. Эта симметрия среди прочего запрещает существование массового слагаемого, связывающего поля Q и $\overline{Q}$. Возьмем поля Q_{ai} и L_i в представлениях N_f и $\overline{N_f}$ группы $SU(N_f)$ соответственно, а все $\overline{Q}$ возьмем синглетами группы $SU(N_f)$. Тогда единственный перенормируемый суперпотенциал записывается в форме

$$f(Q,\overline{Q},L) = \sum_{ija} \mathcal{G}_j \overline{Q}_{aj} Q_{ai} L_i, \tag{29.4.19}$$

где $\mathcal{G}_j$ — набор констант связи, которые с помощью $SU(N_f)$ поворота можно выбрать так, чтобы в этом наборе оставался только один ненулевой элемент, скажем, для $j = N_f$, который может быть сделан положительным. (Это является обобщением модели, исследованной Аффлеком, Дайном и Зайбергом [8], в которой они выбрали $N_c = 3$ и $N_f = 2$.) Калибровочно нейтральные суперполя L_i не влияют на непертурбативные члены в эффективном суперпотенциале, поэтому можно использовать результат раздела 29.3, согласно которому для $N_c > N_f$ калибровочные взаимодействия дают полный эффективный суперпотенциал

$$f_{\text{полн}}(Q,\overline{Q},L) = \sum_{ija} \mathcal{G}_j \sum_a \overline{Q}_{aj} Q_{ai} L_i + \mathcal{K}\left[\mathrm{Det}_{ij} \overline{Q}_{aj} Q_{ai}\right]^{-1/(N_c-N_f)}, \qquad (29.4.20)$$

где $\mathcal{K}$ — постоянная. Для того, чтобы суперсимметрия не нарушалась, необходимо (хотя и не достаточно), чтобы скалярные компоненты q_{ai}, $\overline{q}_{ai}$ и l_i киральных суперполей удовлетворяли условию $\partial f_{\text{полн}}(q,\overline{q},\ell)/\partial \ell_i = 0$, так что для всех i

$$\sum_{ja} \mathcal{G}_j \overline{q}_{aj} q_{ai} = 0. \qquad (29.4.21)$$

Однако из этого выражения следует, что матрица $\sum_a \overline{q_{aj}} q_{ai}$ имеет собственное значение, равное нулю, и поэтому ее детерминант равен нулю. Следовательно, это особая точка суперпотенциала (29.4.20), в которой $\partial f_{\text{полн}}/\partial q_{ai}$ или $\partial f_{\text{полн}}/\partial \overline{q}_{ai}$ не могут обратиться в нуль. Поэтому в этом классе моделей суперсимметрия обязательно нарушается.

Например, Аффлек, Дайн и Зайберг обнаружили [8], что в их модели ненулевые скалярные компоненты q_{ai}, $\overline{q}_{ai}$ и ℓ_i суперполей Φ_{ai}, $\overline{\Phi}_{ai}$ и L_i в минимуме потенциала с $N_c = 3$ и $N_f = 2$ должны быть равны

$$q_{11} = \overline{q}_{11} = 1{,}286(\mathcal{K}/2\mathcal{G})^{1/7},$$
$$q_{22} = \overline{q}_{22} = 1{,}249(\mathcal{K}/2\mathcal{G})^{1/7},$$
$$\ell_1 = \sqrt{q_{11}^2 - q_{22}^2}, \qquad (29.4.22)$$

где плотность энергии вакуума равна

$$\rho_{\text{VAC}} = 3{,}593(16\mathcal{G}^{10}/\mathcal{K}^4)^{1/7}. \qquad (29.4.23)$$

Кроме того, для $\theta = 0\, \mathcal{K} = 2\Lambda^7$.

Спонтанное нарушение суперсимметрии в этом случае позволяет думать, что суперсимметрия будет нарушаться сильными калибровочными взаимодействиями для широкого класса асимптотически свободных калибровочных теорий и, таким образом, придает некоторую законную силу рассуждениям относительно нарушения суперсимметрии в разделе 28.3.

29.5. Решение Зайберга–Виттена *

Часто случается, что потенциал суперсимметричной теории в древесном приближении равен нулю в непрерывной области значений скалярного поля. (Один из таких примеров см. (29.1.9).) В этом случае теория в древесном приближении имеет скалярные возбуждения нулевой массы, которые в силу сохранения суперсимметрии должны сопровождаться соответствующими фермионными суперпартнерами. Тогда при низких энергиях теория будет описываться семейством суперсимметричных эффективных лагранжианов, члены которых параметризуются одним или более *модулями*, т. е. средними значениями скалярных величин лежащей в основе теории. Квантовые эффекты в этой теории могут изменить зависимость эффективного лагранжиана от модулей и даже изменить топологию пространства модулей [9].

Одним из самых поразительных достижений теории суперсимметрии в 90-х годах была работа Зайберга и Виттена [10], в которой авторы смогли вычислить точную зависимость эффективного лагранжиана при низких энергиях от модулярного параметра в калибровочных теориях с $N=2$ суперсимметрией. Чтобы идея, заложенная в этот расчет, стала понятной, достаточно рассмотреть простейший случай $SU(2)$ калибровочной теории с $N=2$ суперсимметрией без дополнительных супермультиплетов материи.

В разделе 27.9 было показано, что лагранжиан в такой теории после исключения вспомогательных полей имеет вид

$$\mathscr{L}=\frac{1}{e^2}\Bigg[-\sum_A(D_\mu\varphi)^*_A(D^\mu\varphi)_A-\frac{1}{2}\sum_A\left(\overline{\psi_A}(\not{D}\psi)_A\right)$$
$$-2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{ABC}\varepsilon_{ABC}\left(\lambda^T_{AL}\epsilon\psi_{CL}\right)\varphi^*_B-\frac{1}{4}\sum_A f_{A\mu\nu}f_A^{\mu\nu}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_A\left(\overline{\lambda_A}(\not{D}\lambda)_A\right)\Bigg]+\frac{\theta}{64\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sum_A f_A^{\mu\nu}f_A^{\rho\sigma}-V(\varphi,\varphi^*), \qquad (29.5.1)$$

где A, B и C принимают значения 1, 2 и 3. В этом выражении изменен масштаб всех полей путем умножения каждого из них на e, так что e не появляется в ковариантных производных:

$$(D_\mu\psi)_A=\partial_\mu\psi_A+\sum_{BC}\varepsilon_{ABC}V_{B\mu}\psi_C, \qquad (29.5.2)$$

*Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

$$(D_\mu\lambda)_A = \partial_\mu\lambda_A + \sum_{BC}\varepsilon_{ABC}V_{B\mu}\lambda_C, \tag{29.5.3}$$

$$(D_\mu\varphi)_A = \partial_\mu\varphi_A + \sum_{BC}\varepsilon_{ABC}V_{B\mu}\varphi_C, \tag{29.5.4}$$

$$f_{A\mu\nu} = \partial_\mu V_{A\nu} - \partial_\nu V_{A\mu} + \sum_{BC}\varepsilon_{ABC}V_{B\mu}V_{C\nu}, \tag{29.5.5}$$

а потенциал равен

$$V(\varphi,\varphi^*) = 2\sum_A\left[\sum_{BC}\varepsilon_{ABC}\,\mathrm{Re}\,\varphi_B\,\mathrm{Im}\,\varphi_C\right]^2. \tag{29.5.6}$$

Этот потенциал равен нулю для семейства средних значений скалярного поля, которое (с точностью до калибровочного преобразования) может быть параметризовано в виде

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = a, \tag{29.5.7}$$

где a — комплексный параметр, известный как модуль вакуума. Это среднее значение вакуума придает массы $2|a|$ векторным полям $V_{1\mu}$ и $V_{2\mu}$, калибрино λ_1 и λ_2, киральным фермионам ψ_1 и ψ_2, скалярам φ_1 и φ_2, оставляя $V_{3\mu}$, λ_3, ψ_3 и $\varphi_3 = a$ безмассовыми.

Если учесть только эти безмассовые моды (и опустить индекс 3), то древесное приближение приводит к эффективной теории при низких энергиях, совпадающей с простой теорией свободных полей с лагранжианом

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{эфф}} = &\frac{1}{e^2}\left[-(\partial_\mu a)^*(\partial^\mu a) - \frac{1}{2}\left(\overline{\psi}(\partial\!\!\!/\psi)\right)\right.\\ &\left. - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\overline{\lambda}(\partial\!\!\!/\lambda)\right)\right] + \frac{\theta}{64\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma},\end{aligned} \tag{29.5.8}$$

где $f_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$. Действительно, любая перенормируемая теория одного калибровочного бозона и его калибровочно нейтральных $N = 2$ суперпартнеров должна быть теорией свободных полей, потому что в этом случае $N = 2$ суперсимметрия запрещает наличие суперпотенциала.

Однако это еще не конец истории. После интегрирования по массивным степеням свободы в такой теории квантовые поправки приводят к появлению неперенормируемых членов взаимодействия в эффективной теории при низких энергиях. Взаимодействия и содержащие их диаграммы Фейнмана, доминирующие при низких энергиях, можно классифицировать с помощью такого же подсчета степеней энергии, который был использован для теории взаимодействия пионов и нуклонов малых импульсов в разделе 19.5.

Когда эффективный лагранжиан используется для вычисления амплитуд рассеяния при низких энергиях в рамках теории возмущений, то число степеней энергии ν, возникающее в связной диаграмме с L петлями, I_f внешними фермионными линиями, I_b внутренними бозонными (a или V_μ) линиями, I_a внутренними линиями вспомогательных полей и V_i вершинами каждого типа i, равно

$$\nu = 4L + \sum_i V_i d_i = 2I_b - I_f, \tag{29.5.9}$$

где d_i — число производных во взаимодействии типа i. (Внутренние линии вспомогательных полей не дают вклад в (29.5.9), потому что их пропагаторы не зависят от импульсов.) Эти величины связаны топологическими соотношениями

$$L = I_b + I_f + I_a - \sum_i V_i + 1, \tag{29.5.10}$$

и

$$2I_b + E_b = \sum_i V_i b_i, \quad 2I_f + E_f = \sum_i V_i f_i, \quad 2I_a + E_a = \sum_i V_i a_i, \tag{29.5.11}$$

где E_b, E_f — числа линий внешних бозонных и фермионных полей, E_a — число линий вспомогательных полей; b_i, f_i и a_i — числа бозонных, фермионных и вспомогательных полей во взаимодействии типа i. Поэтому число степеней энергии можно записать в виде

$$\nu = \sum_i V_i \left(d_i + \frac{1}{2} f_i + a_i - 2 \right) + 2L - E_f - 2E_a + 2. \tag{29.5.12}$$

Согласно выражениям (26.8.4) и (27.4.42), как D-член функции левокиральных скалярных $N = 1$ суперполей и им сопряженных, так и $\mathscr{F}$-член пары $N = 1$ калибровочных суперполей W_α, умноженных на произвольную функцию $N = 1$ левокиральных скалярных суперполей, имеют $d_i + f_i/2 + a_i = 2$, в то время как добавление любых дополнительных множителей W_α или суперпроизводных $\mathscr{D}_\alpha$ дает $d_i + f_i/2 + a_i > 2$. Поэтому в нашем случае суперсимметрия исключает любые взаимодействия с $d_i + f_i/2 + a_i < 2$. Таким образом, основной вклад в амплитуды рассеяния при низких энергиях дается древесным приближением ($L = 0$), вычисленным из содержащего только члены с $d_i + f_i/2 + a_i = 2$ эффективного лагранжиана, который записывается в общем виде, обсуждавшимся в разделе 27.4:

$$\mathscr{L}_{\text{эфф}} = \frac{1}{2}\left[K(\Phi, \Phi^*)\right]_D - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[T(\Phi)\left(W_L^T \epsilon W_L\right)\right]_{\mathscr{F}}. \tag{29.5.13}$$

Формула (27.4.42) позволяет записать лагранжиан через компоненты полей в виде

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2 K(a,a^*)}{\partial a \partial a^*}\left[-\frac{1}{2}(\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi) + |\mathcal{F}|^2 - \partial_\mu a \partial^\mu a^*\right]$$
$$- \mathrm{Re}\left\{\frac{\partial^3 K(a,a^*)}{\partial^2 a \partial a^*}(\overline{\psi}\psi_L)\mathcal{F}^*\right\} - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial^3 K(a,a^*)}{\partial^2 a \partial a^*}(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)\partial_\mu a\right\}$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{\partial^4 K(a,a^*)}{\partial^2 a \partial^2 a^*}(\overline{\psi}\psi_L)(\overline{\psi}\psi_R)$$
$$+ \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left\{(\overline{\lambda}\lambda_L)(\overline{\psi}\psi_R)\frac{d^2T(a)}{da^2}\right\} - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{(\overline{\lambda}\lambda_L)\mathcal{F}\frac{dT(a)}{da}\right\}$$
$$+ \mathrm{Re}\left\{T(a)\left[-\frac{1}{2}(\overline{\lambda}\partial\!\!\!/(1-\gamma_5)\lambda) - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + \frac{1}{8}i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}D^2\right]\right\}$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{Re}\left\{\frac{dT(a)}{da}\left[-(\overline{\lambda}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_L)f_{\mu\nu} + 2i(\overline{\lambda}\psi_L)D\right]\right\}. \quad (29.5.14)$$

Затем, чтобы ввести $N=2$ суперсимметрию, потребуем инвариантность относительно дискретного преобразования R-симметрии (27.9.2)

$$\psi \to \lambda, \quad \lambda \to -\psi, \quad (29.5.15)$$

и неизменными a и V_μ. Условие равенства коэффициентов при $(\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi)$ и $(\overline{\lambda}\partial\!\!\!/\lambda)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 K(a,a^*)}{\partial a \partial a^*} = \mathrm{Re}\,T(a). \quad (29.5.16)$$

Справа стоит сумма функции от a и функции от a^*, так что $\partial^4 K/\partial^2 a \partial^2 a^* = 0$. Поэтому член четвертого порядка по ψ, для которого не нашлось бы соответствующего партнера по λ, отсутствует. С помощью интегрирования по частям слагаемое $\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{T(a)(\overline{\lambda}\partial\!\!\!/\gamma_5\lambda)\}$ может быть заменено на $-\frac{1}{4}\mathrm{Re}\{(\overline{\lambda}\gamma^\mu\gamma_5\lambda)\partial_\mu T(a)\}$. Тогда условие равенства коэффициентов $(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)$ и $(\overline{\lambda}\gamma^\mu\gamma_5\lambda)$ удовлетворяется, если

$$\frac{1}{4}\partial_\mu T = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 K}{\partial^2 a \partial a^*}\partial_\mu a.$$

Это равенство является автоматическим следствием условия (29.5.16). Согласно формуле (26.A.7), члены, пропорциональные $f_{\mu\nu}(\overline{\lambda}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\psi)$ и $f_{\mu\nu}(\overline{\lambda}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\gamma_5\psi)$, автоматически инвариантны относительно преобразования (29.5.15), что также относится к членам, пропорциональным $(\overline{\lambda}\lambda_L)(\overline{\psi}\psi_L)$ и ему сопряженному выражению. С другой стороны, инвариантность членов, пропорциональных $(\overline{\lambda}\psi)D$ и $(\overline{\lambda}\gamma_5\psi)D$, требует, чтобы преобразование (29.5.15) было расширено, так что

$$D \to -D, \tag{29.5.17}$$

что также оставляет инвариантным член $\frac{1}{2}D^2$. Наконец, в силу условия (29.5.16), коэффициенты $(\overline{\psi}\psi_L)\mathscr{F}^*$ и $(\overline{\lambda}\lambda_L)\mathscr{F}$ равны, поэтому преобразование (29.5.15) также должно быть расширено, так что

$$\mathscr{F} \to \mathscr{F}^*, \tag{29.5.18}$$

что оставляет инвариантным член $|\mathscr{F}|^2$. Теперь можно сделать вывод, что условие (29.5.16) гарантирует, что полное действие, полученное из лагранжиана (29.5.14), инвариантно относительно комбинированного преобразования (29.5.15), (29.5.17) и (29.5.18). Поскольку лагранжиан инвариантен относительно $N = 1$ суперсимметрии с левокиральным скалярным супермультиплетом $(a, \psi, \mathscr{F})$ и калибровочным супермультиплетом (V_μ, λ, D), он также инвариантен относительно второй суперсимметрии с левокиральным скалярным супермультиплетом $(a, \lambda, \mathscr{F}^*)$ и калибровочным супермультиплетом $(V_\mu, -\psi, -D)$. Поэтому условие (29.5.16) достаточно, чтобы действие, полученное из (29.5.13) или (29.5.14), было инвариантным (не требуя выполнения уравнений поля) относительно $N = 2$ суперсимметрии.

Общее решение (29.5.16) можно записать в форме*

$$T(a) = \frac{1}{4\pi i}\frac{dh(a)}{da}, \quad K(a,a^*) = \operatorname{Im}\left\{\frac{a^* h(a)}{4\pi}\right\}, \tag{29.5.19}$$

где h зависит только от a. Лагранжиан (29.5.14) можно переписать через h в виде

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Im}\Bigg\{ \left[\frac{dh}{da}\right] \Bigg[& -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\partial\!\!\!/(1-\gamma_5)\psi\right) - \frac{1}{2}\left(\overline{\lambda}\partial\!\!\!/(1-\gamma_5)\lambda\right) \\
& - \partial_\mu a \partial^\mu a^* + |\mathscr{F}|^2 + \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + \frac{1}{8}i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma}\Bigg]\Bigg\} \\
+ \frac{1}{4\pi}\operatorname{Im}\Bigg\{ \left[\frac{d^2 h}{da^2}\right] \Bigg[& -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\psi_L\right)\mathscr{F}^* - \frac{1}{2}\left(\overline{\lambda}\lambda_L\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}i\left(\overline{\lambda}\psi_L\right)D
\end{aligned}$$

*Множитель $1/4\pi i$ включен для того, чтобы упростить преобразование дуальности, введенное ниже. Зайберг и Виттен ввели функцию $\mathscr{F}(a)$ (не связанную с вспомогательным полем $\mathscr{F}$), называемую *препотенциалом*, для которой $h(a) = d\mathscr{F}(a)/da$.

$$
\left.\left. - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\bar{\lambda}\gamma^\mu\gamma^\nu u\psi_L\right) f_{\mu\nu} \right]\right\}
$$

$$
+ \frac{1}{16\pi} \mathrm{Im} \left\{ \frac{d^3 h(a)}{d a^3} \left(\bar{\lambda}\lambda_L\right) \left(\bar{\psi}\psi_L\right) \right\}. \tag{29.5.20}
$$

Это выражение инвариантно относительно $SU(2)$ R-симметрии, для которой (ψ, λ) преобразуется как дублет, а $(\mathrm{Im}\,\mathscr{F}, \mathrm{Re}\,\mathscr{F}, D/\sqrt{2})$ как триплет. Дискретное преобразование (29.5.15), (29.5.17) и (29.5.18) является конечным элементом этой $SU(2)$ группы — поворотом на угол π вокруг оси 2.

Из сравнения (29.5.8) и (29.5.20) видно, что в древесном приближении

$$
h(a)_{\text{древ}} = \left[\frac{4\pi i}{e^2} + \frac{\theta}{2\pi}\right] a. \tag{29.5.21}
$$

Достижение Зайберга и Виттена состоит в том, что они вычислили функцию $h(a)$ точно.

Первым шагом в этом расчете является наблюдение, что существуют различные линейные преобразования величин a и $dh(a)/da$, дающие физически эквивалентные теории. Это является следствием замечательного свойства эффективной теории при низких энергиях, связанного с кратко обсуждавшейся в разделе 27.9 дуальностью. Чтобы продемонстрировать это свойство, вернемся к плотности лагранжиана (29.5.13), выраженной через $N = 1$ суперполя, используя теперь соотношения (29.5.19), требуемые $N = 2$ суперсимметрией

$$
\mathscr{L}_{\text{эфф}} = \frac{1}{8\pi} \mathrm{Im}\left[\Phi^* h(\Phi)\right]_D - \frac{1}{8\pi} \mathrm{Im}\left[h'(\Phi)\left(W_L^T \epsilon W_L\right)\right]_{\mathscr{F}}. \tag{29.5.22}
$$

В функциональных интегралах спинорное суперполе напряженностью W_L ограничено суперсимметричным расширением (27.2.20) однородных уравнений Максвелла

$$
\mathrm{Re}\left(\mathscr{D}_L^T \epsilon W_L\right) = 0. \tag{29.5.23}
$$

Чтобы удовлетворить этому условию, обычно требуется, чтобы напряженность W_L имела вид (27.2.15)

$$
W_L = \frac{i}{4}\left(\mathscr{D}_R^T \epsilon \mathscr{D}_R\right) \mathscr{D}_L V, \tag{29.5.24}
$$

где V — ничем не ограниченное действительное суперполе. Вместо этого можно наложить условие (29.5.23), добавляя к действию слагаемое с множителем Лагранжа

$$
\Delta I_{\text{эфф}} = \frac{1}{8\pi} \mathrm{Re} \int d^4 x \left[\widetilde{V}\left(\mathscr{D}_L^T \epsilon W_L\right)\right]_D, \tag{29.5.25}
$$

где $\widetilde{V}$ — ничем не ограниченное действительное суперполе. (Числовой множитель $1/8\pi$ фиксирует такую нормировку $\widetilde{V}$, которая позднее окажется удобной.) Тогда в функциональных интегралах можно проинтегрировать по $\widetilde{V}$ и по W_L без ограничений на любое из них, кроме требования, что $\widetilde{V}$ — действительное суперполе, а W_L — действительное левое спинорное суперполе, удовлетворяющее условию левокиральности $\mathscr{D}_{R\alpha}W_{L\beta} = 0$. Интегрирование по частям в суперпространстве позволяет записать новый член в действии в виде

$$\Delta I_{\text{эфф}} = -\frac{1}{8\pi}\operatorname{Re}\int d^4x\left[\left(\left(\mathscr{D}_L\widetilde{V}\right)^T\varepsilon W_L\right)\right]_D, \tag{29.5.26}$$

или, используя (26.3.31) и то, что поле W_L левокирально, в виде,

$$\Delta I_{\text{эфф}} = \operatorname{Re}\left[\frac{i}{4\pi}\int d^4x\left[\left(\widetilde{W}_L^T\varepsilon W_L\right)\right]_{\mathscr{F}}\right], \tag{29.5.27}$$

где $\widetilde{W}_L$ определяется через $\widetilde{V}$ тем же соотношением, которое раньше выражало W_L через V:

$$\widetilde{W}_L = \frac{i}{4\pi}\left(\mathscr{D}_R^T\varepsilon\mathscr{D}_R\right)\mathscr{D}_L\widetilde{V}. \tag{29.5.28}$$

Но теперь интегрирование по W_L ведется без такого ограничения с действием, квадратичным по W_L:

$$\begin{aligned} I_{\text{эфф}} + \Delta I_{\text{эфф}} = &\operatorname{Im}\int d^4x\left[-\frac{1}{8\pi}h'(\Phi)\left(W_L^T\varepsilon W_L\right) - \frac{1}{4\pi}\left(\widetilde{W}_L^T\varepsilon W_L\right)\right]_{\mathscr{F}} \\ &+ \frac{1}{8\pi}\operatorname{Im}\int d^4x\left[\Phi^* h(\Phi)\right]_D. \end{aligned} \tag{29.5.29}$$

Это интегрирование выполняется, если положить W_L равным тому значению, при котором действие стационарно по W_L:

$$W_L = -\frac{\widetilde{W}_L}{h'(\Phi)}. \tag{29.5.30}$$

Тогда полное эффективное действие принимает вид

$$\tilde{I}_{\text{эфф}} = +\frac{1}{8\pi}\operatorname{Im}\int d^4x\left[\frac{1}{h'(\Phi)}\left(\widetilde{W}_L^T\varepsilon\widetilde{W}_L\right)\right]_{\mathscr{F}} + \frac{1}{8\pi}\operatorname{Im}\int d^4x\left[\Phi^* h(\Phi)\right]_D. \tag{29.5.31}$$

Если теперь определить новое левокиральное скалярное суперполе и новую функцию h,

$$\widetilde{\Phi} \equiv h(\Phi), \quad \tilde{h}(\widetilde{\Phi}) \equiv -\Phi, \tag{29.5.32}$$

то
$$\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{\Phi}}\frac{dh}{d\Phi} = -\frac{d\Phi}{d\tilde{\Phi}}\frac{d\tilde{\Phi}}{d\Phi} = -1, \tag{29.5.33}$$

так что действие (29.5.31) может быть записано в виде

$$\tilde{I}_{\text{эфф}} = -\frac{1}{8\pi}\operatorname{Im}\int d^4x\left[\tilde{h}'(\tilde{\Phi})\left(\tilde{W}_L^T\varepsilon\tilde{W}_L\right)\right]_{\mathscr{F}} + \frac{1}{8\pi}\operatorname{Im}\int d^4x\left[\tilde{\Phi}^*\tilde{h}(\tilde{\Phi})\right]_D. \tag{29.5.34}$$

Из метода, позволившего получить это выражение, следует, что теория, основанная на таком эффективном действии, эквивалентна исходной эффективной теории поля. Поэтому $N=2$ *эффективная теория поля со значением скалярного поля a и значением h-функции $h(a)$ физически эквивалентна теории со значением скалярного поля** $a_D \equiv h(a)$ *и h-функцией* $\tilde{h}(a_D) \equiv -a$. Это версия дуальности, применимая в данном контексте.

Существует другое преобразование функции $h(\Phi)$, которое также приводит к эквивалентному лагранжиану. Его можно скомбинировать с преобразованием (29.5.32) и получить более широкую группу преобразований дуальности. Предположим, что $h(\Phi)$ сдвигается на линейное слагаемое с действительным коэффициентом:

$$h(\Phi) \to h(\Phi) + b\Phi, \tag{29.5.35}$$

где b — действительная константа. Тогда первый член в эффективном лагранжиане (29.5.22) сдвигается на $b\operatorname{Im}\{[\Phi^*\Phi]_D\}/8\pi$, что равно нулю, потому что D-член $\Phi^*\Phi$ действителен. Поэтому изменение эффективного лагранжиана (29.5.22) дается сдвигом второго слагаемого

$$\mathscr{L}_{\text{эфф}} \to \mathscr{L}_{\text{эфф}} - \frac{b}{8\pi}\operatorname{Im}\left[\left(W_L^T\varepsilon W_L\right)\right]_{\mathscr{F}}, \tag{29.5.36}$$

или, согласно (27.2.13),

$$\mathscr{L}_{\text{эфф}} \to \mathscr{L}_{\text{эфф}} - \frac{b}{8\pi}\left[i\left(\bar{\lambda}\not{\partial}\gamma_5\lambda\right) + \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f_{\mu\nu}f_{\rho\sigma}\right]. \tag{29.5.37}$$

Первый член в скобках справа является пространственно-временной производной и поэтому не дает вклад в эффективное действие. Второй член в скобках можно также записать как пространственно-временную производную $(1/2)\partial_\mu(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu f_{\rho\sigma})$, если $f_{\mu\nu}$ может быть представлено в виде $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Однако, как уже обсуждалось в разделе 23.3, калибровочное

---

*Нижний индекс D обозначает дуальность и не имеет ничего общего с D-членом суперполя.

преобразование, использованное, чтобы направить φ_A вдоль оси 3, должно быть где-то сингулярно. Поэтому $f_{\mu\nu}$ нельзя везде записать только через A_μ. Следовательно, член в действии вида

$$-\frac{\theta}{64\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f_{\mu\nu}f_{\rho\sigma} \tag{29.5.38}$$

может влиять на физические величины. В частности, Виттен [11] показал, что в теории магнитных монополей, описанной в разделе 23.3, электрический заряд магнитного монополя с минимальным магнитным зарядом в присутствии такого члена равен $e\theta/2\pi$. Однако, как уже упоминалось в разделе 27.9, в этой теории существуют также дионы — частицы, обладающие как магнитными зарядами, так и зарядами, кратными любому целому числу e. Поэтому полная система зарядов монополей и дионов периодична по θ с периодом 2π. На самом деле все физические величины имеют такую периодичность, потому что величина θ в эффективной теории при низких энергиях унаследована от величины θ, входящей в лагранжиан (29.5.1) исходной теории (см. (29.5.21)), а в разделе 23.5 показано, что все физические величины периодичны по этому θ. Из лагранжиана (29.5.37) видно, что преобразование (29.5.35) изменяет θ на $2\pi b$. Поэтому, взяв b произвольным положительным или отрицательным целым числом, получаем эквивалентное эффективное действие.

Такого типа преобразование тесно связано с точной инвариантностью исходной теории. Лагранжиан (29.5.1) инвариантен относительно непрерывной R-симметрии, под действием преобразований которой

$$\theta_L \to \exp(i\alpha)\theta_L, \quad W_{AL} \to \exp(i\alpha)W_{AL}, \quad \Phi_A \to \exp(2i\alpha)\Phi_A. \tag{29.5.39}$$

Эта симметрия нарушается аномалией: и λ_{AL}, и ψ_{AL} имеют квантовые числа $R=+1$, и, конечно, λ_{AL} и ψ_{AL} имеют квантовые числа $R=-1$. Поэтому, согласно (23.5.21) и (23.5.23), мера интеграла по фермионным полям изменяется при преобразовании (29.5.39) на множитель $\exp(2i\alpha N\nu)$, где ν — целое число, топологическое число конфигурации векторного поля, а N определяется выражением

$$\mathrm{Tr}\,(t_At_B) = \frac{1}{2}N\delta_{AB}.$$

(Множитель $\exp(2i\alpha N\nu)$ совпадает с тем, что приведен в разделе 23.5, несмотря на то, что здесь имеются два поля ψ_A и λ_A в одном и том же представлении калибровочной группы, потому что это — майорановские поля, в отличие от дираковских полей, использованных в разделе 23.5.) В этом случае генераторы $(t_A)_{BC} = -i\varepsilon_{ABC}$, т. е. $N=4$, и поэтому мера остается инвариантной, когда $\exp(8i\alpha)=1$. Другими словами, непрерывная R-симметрия нарушается инстантонами до подгруппы $\mathbb{Z}_8$, порождаемой преобразованием

$$\psi_{AL} \to \sqrt{i}\psi_{AL}, \quad \lambda_{AL} \to \sqrt{i}\lambda_{AL}, \quad \varphi_A \to i\varphi_A. \tag{29.5.40}$$

Эта симметрия должна привести к эффективной теории при низких энергиях. Однако, отсюда *не следует*, что эффективный лагранжиан (29.5.20) инвариантен относительно дискретного преобразования (29.5.40), требующего, чтобы $-ih(ia) = h(a)$ для всех a. Это условие удовлетворяется в древесном приближении (29.5.21), но (как будет видно позже) оно нарушается даже в однопетлевом порядке. В эффективной теории $\mathbb{Z}_8$ R-симметрия реализуется условием, что эта теория с h-функцией $-ih(ia)$ *эквивалентна* теории с h-функцией $h(a)$, т. е. $-ih(ia)$ должна быть связана с $h(a)$ некоторой комбинацией преобразований (29.5.32) и (29.5.35) с целым b.

Мы видели, что физическое содержание теории не изменяется в результате двух типов преобразований: преобразования $\Phi \to \tilde{\Phi} = h(\Phi)$, $h(\Phi) \to \tilde{h}(\tilde{\Phi}) = -\Phi$, которое можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ h(\Phi) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ h(\Phi) \end{pmatrix}, \tag{29.5.41}$$

и преобразования $h(\Phi) \to h(\Phi) + b\Phi$, $\Phi \to \Phi$, которое можно записать как

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ h(\Phi) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ h(\Phi) \end{pmatrix}, \tag{29.5.42}$$

где b — произвольное целое число. Комбинируя эти преобразования, можно построить обобщенные преобразования дуальности

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ h(\Phi) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} n & m \\ k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ h(\Phi) \end{pmatrix}, \tag{29.5.43}$$

где n, m, k и l — любые целые числа, удовлетворяющие условию, что матрица в (29.5.43) должна, подобно матрицам в (29.5.41) и (29.5.42), иметь определитель, равный 1:

$$nl - mk = 1. \tag{29.5.44}$$

Поэтому эти преобразования образуют группу $SL(2, \mathbb{Z})$.

Физический смысл преобразования дуальности может стать понятным, если рассмотреть центральный заряд алгебры $N = 2$ суперсимметрии. Как показано в разделе 25.5, собственное значение Z_{12} этого центрального заряда в любом одночастичном состоянии устанавливает нижнюю границу $M \geqslant |Z_{12}|/2$ на массу состояния. Равенство выполняется для частиц, принадлежащих коротким мультиплетам. В разделе 27.9 было показано, что Z_{12}

в исходной $SU(2)$ калибровочной теории с $N=2$ суперсимметрией дается выражением (27.9.22):

$$Z_{12} = 2\sqrt{2}v[iq - \mathcal{M}],$$

где q и $\mathcal{M}$ — заряд и магнитный момент частицы, v — вакуумное среднее от нормированного обычным образом нейтрального скалярного поля. В обозначениях, принятых в этом разделе, множитель e включен в нормировку поля a, поэтому здесь

$$Z_{12} = 2\sqrt{2}a[iq - \mathcal{M}]/e. \tag{29.5.45}$$

Эта теория содержит частицы, типа массивных элементарных скаляров, спиноров и векторных бозонов, которые имеют заряд e и нулевой магнитный заряд. Поэтому такие частицы являются собственными состояниями Z_{12} с собственным значением

$$Z_{12}^{\text{элемент. заряд}} = 2\sqrt{2}ia. \tag{29.5.46}$$

Как уже было показано, теория со скалярным полем a и h-функцией $h(a)$ эквивалентна теории со скалярным полем $na + mh(a)$ и h-функцией $ka + lh(a)$. Поэтому для всех целых n и m теория со скалярным полем a и h-функцией $h(a)$ должна *также* содержать частицу, которая похожа на массивную частицу зарядом e и нулевым магнитным зарядом в варианте теории со скалярным полем $na + mh(a)$ и h-функцией $ka + lh(a)$, т. е. она имеет центральный заряд

$$Z_{12} = 2\sqrt{2}i\,[na + mh(a)]. \tag{29.5.47}$$

Сравнение этого выражение с (29.5.45) показывает, что в варианте теории со скалярным полем a и h-функцией $h(a)$ появляется частица, для которой заряд q и магнитный заряд $\mathcal{M}$ имеют вид

$$q/e = n + m\mathrm{Re}[h(a)/a], \quad \mathcal{M}/e = m\mathrm{Im}[h(a)/a]. \tag{29.5.48}$$

Это — дион, обладающий как зарядом, так и магнитным зарядом. Заметим, что формула (29.5.48) для заряда этой частицы подтверждает ранее полученный Виттеном результат относительно заряда магнитных монополей: прибавление слагаемого ba к функции $h(a)$ изменяет заряд монополя с $m=1$ на величину $be = e\Delta\theta/2\pi$.

Если использовать результат, полученный в древесном приближении (29.5.21) для $h(a)$ в (29.5.48), то можно видеть, что в этом приближении магнитные заряды в такой теории оказываются кратными величине $4\pi/e$. Это же значение величины магнитного заряда получено в разделе 23.3 (вспомним, что магнитный заряд g, использованный там, равен $\mathcal{M}/4\pi$), но этот результат полуклассический и изменяется за счет квантовых поправок. Заметим, что преобразование дуальности (29.5.41) с $n=0$ и $m=1$ преобразует элементарную частицу с зарядом e и нулевым магнитным зарядом монополя в неэлементарную частицу с магнитным зарядом $\mathrm{Im}[h(a)/a]$, который в древесном приближении равен $4\pi/e$.

Бета-функция для электрического заряда в исходной $N=2$ суперсимметричной $SU(2)$ калибровочной теории в рамках теории возмущений дается однопетлевым результатом (27.9.50), где первый инвариант Казимира полагается равным $C_1 = 2e$, а число гипермультиплетов берется при $H=0$:

$$\beta_{\text{пертурбативное}}(e) = -\frac{e^3}{4\pi^2}. \tag{29.5.49}$$

Здесь a выбирается в качестве масштаба перенормировки, поэтому бегущий заряд $e(a)$ удовлетворяет уравнению

$$a\frac{d}{da}e(a) = \beta(e(a)). \tag{29.5.50}$$

Используя формулу теории возмущений (29.5.49), получаем

$$[e^{-2}(a)]_{\text{пертурбативное}} = \frac{1}{2\pi^2}\ln\left(\frac{a}{\Lambda}\right), \tag{29.5.51}$$

где Λ — постоянная интегрирования. В принятом здесь формализме, когда множитель e входит в определение калибровочного поля, величина $e^{-2}(a)$ возникает как коэффициент $h'(a)/4\pi i$ перед членом $-\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$ в низкоэнергетическом эффективном лагранжиане (29.5.20), поэтому функция $h(a)$ в теории возмущений имеет вид*

$$[h(a)]_{\text{пертурбативное}} = \frac{2i}{\pi}\left[a\ln\left(\frac{a}{\Lambda}\right) - a\right] = 4\pi i a\left[[e^{-2}(a)]_{\text{пертурбативное}} - \frac{1}{2\pi^2}\right]. \tag{29.5.52}$$

Это хорошее приближение** для достаточно больших $|a|$, когда (29.5.51) дает малое значение $e(a)$. В этом случае (29.5.48) дает магнитный заряд монополей и дионов в виде

$$\mathcal{M}_{\text{пертурбативное}}/e = 4\pi m a\left[[e^{-2}(a)]_{\text{пертурбативное}} - \frac{1}{2\pi^2}\right], \tag{29.5.53}$$

---

*Аддитивная константа, возникающая при интегрировании $h'(a)$, не оказывает влияния на низкоэнергетическое эффективное действие, выведенное из (29.5.22), потому что $[\Phi^*]_D$ производная. Эта константа может быть фиксирована из требования $\mathbb{Z}_8$-симметрии, обсужденной ранее. Выражение (29.5.52) удовлетворяет условию $-ih(ia) = h(a) - 1$, которое является частным случаем преобразования (29.5.35) с $b=-1$, не изменяющим физическое содержание теории. Однако этого не было бы, если константа добавляется к (29.5.52).

**В этом случае есть непертурбативные поправки[12] к $\beta(e)$, возникающие за счет инстантонов, но при $e \to 0$ они быстро обращаются в ноль.

где m — произвольное целое число. Заметим, что если в правой части полуклассической формулы $\mathcal{M}/e = 4\pi m/e^2$ заменить e на бегущий заряд $e(a)$, то получится *другое* выражение.

Для достаточно больших значений $|a|$ функция (29.5.52) также удовлетворяет необходимому условию совместимости: коэффициент $\mathrm{Im}h'(a)/4\pi$ кинематических членов $-\frac{1}{2}(\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi)$, $-\frac{1}{2}(\overline{\lambda}\partial\!\!\!/\lambda)$, $-\partial_\mu a^*\partial^\mu a$ и $-\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$ должен быть *положительным*. Из того же условия следует, что выражение (29.5.52) не может быть хорошим приближением для всех a, потому что при достаточно малых $|a|$ значение $\mathrm{Im}h'(a)$ становится отрицательным.

Выражение (29.5.52) показывает, что если a сделает полный оборот против часовой стрелки по окружности достаточно большого радиуса $|a|$, где справедлива теория возмущений, то $h(a)$ сдвигается на величину $-4a$. Это означает, что функция $h(a)$ должна иметь одну или более сингулярностей при конечных значениях a.

Вероятность того, что функция $h(a)$ имеет только одну особенность, исключается легко. В этом случае $h'(a)$ не будет иметь положительную мнимую часть для всех несингулярных значений a, что, как уже было показано, является необходимым условием положительности коэффициентов кинематических членов в эффективном лагранжиане. Действительно, единственная сингулярность должна была бы быть при $a = 0$, потому что, в силу $\mathbb{Z}_8$-симметрии, если $h(a)$ сингулярна в точке a, то она сингулярна и в точке ia. Но тогда функция $h(a) - h_{\text{пертурбативное}}(a)$ была бы аналитичной везде, кроме бесконечности и, возможно, при $a = 0$, но она обращается в нуль при $|a| \to \infty$ и, в частности, не изменяется при движении по большому кругу a. Поэтому она может быть самое большее полиномом по $1/a$ без постоянного члена. Если полином не равен нулю, то $h'(a)$ ведет себя как некоторая отрицательная степень a при $a \to 0$; у нее не будет положительной мнимой части. Если же полином обращается в нуль, то $h'(a)$ будет равна $h'_{\text{пертурбативное}}(a)$, у которой также нет положительной мнимой части при $a \to 0$.

При исследовании структуры сингулярностей функции $h(a)$ полезно следить за дуальностью, рассматривая a и $a_D = h(a)$ одинаковым образом и выражая их как функции комплексной переменной u. Зайберг и Виттен положили значение u равным среднему значению калибровочно-инвариантной величины $\frac{1}{2}\sum_A \varphi_A\varphi_A$, меняющей знак при $\mathbb{Z}_8$-преобразованиях $\varphi_A \to \pm i\varphi_A$ и, конечно, при преобразовании $a \equiv \varphi_3 \to \pm ia$, т. е.

$$a(-u) = \pm ia(u). \tag{29.5.54}$$

Здесь знак не имеет физического смысла, потому что a и $-a$ связаны конечным $SU(2)$ калибровочным преобразованием. (Там, где это необходимо, можно договориться, что верхний и нижний знаки берутся для $\mathrm{Re}\, u > 0$ и $\mathrm{Re}\, u < 0$ соответственно.) Для больших значений $|a|$ можно доверять теории возмущений, и поэтому для $|u| \to \infty$

$$a \to \sqrt{2u}, \quad a_D \to \frac{i}{\pi}\left[\sqrt{2u}\ln\left(\frac{2u}{\Lambda^2}\right) - 2\sqrt{2u}\right]. \qquad (29.5.55)$$

Заметим, что когда u двигается против часовой стрелки по кругу большого фиксированного радиуса $|u|$, логарифм $\ln(2u/\Lambda^2)$ сдвигается на $2i\pi$, а $\sqrt{2u}$ меняет знак, поэтому изменения a и a_D даются *матрицей монодромии*

$$\begin{pmatrix} a \\ a_D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a_D \end{pmatrix}. \qquad (29.5.56)$$

Следовательно, функции $a(u)$ и $a_D(u)$ должны иметь две или более особых точки при конечных значениях величин u_n переменной u, так что комбинированный эффект от обхода каждой сингулярности против часовой стрелки такой же, как в (29.5.56).

Рассмотрим ситуацию, когда имеются две особых точки. (Это как раз случай, рассмотренный Зайбергом и Виттеном во второй работе, упомянутой в [10].) При преобразовании $\mathbb{Z}_8$-симметрии, когда $a_A \to ia_A$, переменная $u \to -u$. Поэтому сингулярности должны возникать в паре значений переменной u, скажем, при значениях u_0 и $-u_0$. В результате движения в комплексной плоскости u от несингулярной базовой точки P против часовой стрелки вокруг особых точек $\pm u_0$ и обратно к P должна получиться эквивалентная теория. Следовательно, такое движение должно иметь иметь форму преобразования дуальности, которое в общем случае зависит от P, а вектор (a, a_D) умножается на $SL(2,\mathbb{Z})$ *матрицу монодромии* $M_\pm$, как в (29.5.43). Контур с обходом против часовой стрелки по окружности большого фиксированного радиуса u может быть деформирован в контур, начинающийся в P, затем идущий против часовой стрелки вокруг $+u_0$, назад к P, потом против часовой стрелки вокруг $-u_0$ и опять назад к P (рис. 29.1.). Поскольку при такой деформации интеграл не изменяется, произведение матриц монодромии *в этом порядке* (справа налево) должно быть равно матрице в (29.5.56):

$$M_+ M_- = M_\infty \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (29.5.57)$$

Сингулярности возникают, когда a и a_D принимают значения, при которых какая-то частица имеет нулевую массу. Например, в формуле (29.5.52) для $h(a)$ имеется особенность при $a = 0$, потому что в теории возмущений именно при этом значении a элементарные заряженные частицы становятся

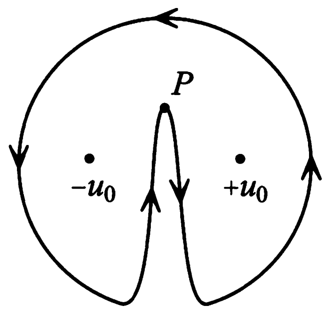

Рис. 29.1. Деформация контура обхода сингулярностей в комплексной плоскости u против часовой стрелки по большому кругу с радиусом $|u|$. Новый контур начинается в базовой точке P, обходит против часовой стрелки особенность в точке $u = +u_0$, возвращается к точке P, затем против часовой стрелки обходит вторую особую точку $u = -u_0$ и возвращается назад к точке P

безмассовыми. Возможность существования одной особой точки при $a = 0$ уже нами исключена, поэтому должны возникать особенности при $\pm u_0$ из-за обращения в нуль масс других частиц.

Самым поразительным в работе Зайберга и Виттена является осознание того факта, что эти частицы находятся среди неэлементарных магнитных монополей или дионов, обнаруженных в исходной $SU(2)$ суперсимметричной теории. Полуклассический расчет, сделанный в разделе 23.3, показывает, что стабильные монополи и дионы имеют магнитное квантовое число $m = \pm 1$ и произвольное целое электрическое число n. Они принадлежат гипермультиплетам, каждый из которых состоит из пары майорановских спиноров и пары комплексных скаляров. Это «короткие» мультиплеты с массами, определяемыми значением БПС, которые, согласно (27.9.24) и (29.5.47), равны

$$M = |Z_{12}|/2 = \sqrt{2}\,|Na + h(a)|\,, \tag{29.5.58}$$

где $N = \pm n$. Самый простой путь вычислить, что происходит, когда эта масса стремится к нулю, состоит в том, чтобы рассмотреть более знакомую задачу: что происходит, когда масса гипермультиплета обычных заряженных частиц стремится к нулю? Затем надо использовать дуальность, чтобы перейти к случаю легкого монополя. Бета-функция для $U(1)$ калибровочной константы связи дается формулой (27.9.45) с $C_1 = 0$, $C_2^f = C_2^s = 2$. т. е. равна

$$\beta(e) = +\frac{e^3}{8\pi^2}.$$

Тогда решение уравнения ренормгруппы имеет вид

$$e^{-2}(a) = -\frac{1}{4\pi^2}\ln\left(\frac{a}{\text{constant}}\right).$$

При выводе (29.5.52) было показано, что

$$h'(a) = 4\pi i e^{-2}(a) = -\frac{i}{\pi}\ln\left(\frac{a}{\text{constant}}\right).$$

Поскольку это выражение дает положительное значение $e^2(a)$, малое при $a \to 0$, результат *был бы* приемлемым, если бы теория действительно содержала гипермультиплет обычных заряженных частиц, массы которых в этом пределе стремятся к нулю. Вместо этого предполагается, что имеется гипермультиплет монополей или дионов, массы которых стремятся к нулю. В этом случае можно применить преобразование дуальности (29.5.43), переводящее a в $Na + h(a)$,

$$\begin{pmatrix} a \\ h(a) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{h}(\hat{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ h(a) \end{pmatrix}. \tag{29.5.59}$$

Отсюда следует, что когда u приближается к u_0, где $\hat{a} = Na + h(a) \to 0$, то

$$\frac{d\hat{h}(\hat{a})}{d\hat{a}} \to -\frac{i}{\pi}\ln\left(\frac{\hat{a}}{\text{constant}}\right), \tag{29.5.60}$$

или в другой форме

$$\frac{da}{d\left(h(a) + Na\right)} \to +\frac{i}{\pi}\ln\left(\frac{h(a) + Na}{\text{constant}}\right). \tag{29.5.61}$$

Решение этого уравнения

$$a(u) = a_0 + \frac{i}{\pi}\left(h(u) + Na(u)\right)\ln\left(\frac{h(u) + Na(u)}{\Lambda_0}\right), \tag{29.5.62}$$

где a_0 и Λ_0 — постоянные интегрирования. Предполагается также, что $h + Na \to 0$ для $u \to u_0$. Поэтому главные члены можно записать в виде

$$h(u) + Na(u) \to c_0(u - u_0). \tag{29.5.63}$$

Таким образом, главный член решения (29.5.62) имеет вид

$$a(u) \to a_0 + \frac{ic_0}{\pi}(u - u_0)\ln\left(\frac{c_0(u - u_0)}{\Lambda_0}\right). \tag{29.5.64}$$

Когда точка u_0 обходится все время по кругу против часовой стрелки, величина $h(a)+Na$ не изменяется, а a сдвигается на $-2(h(a)+Na)$. Поэтому матрица монодромии для этой сингулярности имеет вид

$$M_+ = \begin{pmatrix} 1-2N & -2 \\ 2N^2 & 1+2N \end{pmatrix}. \tag{29.5.65}$$

Аналогично, если сингулярность в $-u_0$ связана с обращением в нуль массы монополя или диона с магнитным квантовым числом $\pm'1$ (штрих отличает этот знак от знака при u_0) и электрическим квантовым числом n', тогда в этой точке $h(u)+N'(u)a \to 0$ и

$$a \to a_0' + \frac{i}{\pi}\left(h(u)+N'a(u)\right)\ln\left(\frac{h(u)+N'a(u)}{\Lambda_0'}\right), \tag{29.5.66}$$

где $N' \equiv \pm' n'$, а a_0' и Λ_0' — новые постоянные интегрирования. Главные члены равны

$$h(u)+N'a(u) \to c_0'(u+u_0), \tag{29.5.67}$$

$$a \to a_0' + \frac{ic_0'}{\pi}(u+u_0)\ln\left(\frac{c_0'(u+u_0)}{\Lambda_0'}\right). \tag{29.5.68}$$

Матрица монодромии в этой особой точке имеет вид

$$M_- = \begin{pmatrix} 1-2N' & -2 \\ 2N'^2 & 1+2N' \end{pmatrix}. \tag{29.5.69}$$

Тогда нетрудно видеть, что условие (29.5.57) на эти матрицы удовлетворяется тогда и только тогда, когда

$$N' = N-1. \tag{29.5.70}$$

Несущественно, какое значение N берется, потому что его можно сдвинуть на четное целое число $2M$, обходя M раз по бесконечно удаленной окружности. Его можно также сдвинуть на единицу, сделав отражение $u \leftrightarrow -u$. Зайберг и Виттен выбрали $N=0$, так что $N'=-1$. Тогда для $u \to u_0$ получаем

$$h(u) \to c_0(u-u_0), \tag{29.5.71}$$

$$a(u) \to a_0 + \frac{ic_0}{\pi}(u-u_0)\ln\left(\frac{u-u_0}{\Lambda_0}\right), \tag{29.5.72}$$

и для $u \to -u_0$

$$h(u) - a(u) \to c_0'(u+u_0), \tag{29.5.73}$$

$$a(u) \to a_0' + \frac{ic_0'}{\pi}(u+u_0)\ln\left(\frac{u+u_0}{\Lambda_0'}\right). \tag{29.5.74}$$

Теперь наложим условие сохранения $\mathbb{Z}_8$-симметрии (29.5.54). Можно вычислить поле $a(u)$ для $u \to -u_0$, записав его в виде $-ia(-u)$ и используя (29.5.72). Тогда для $u \to -u_0$ имеем

$$a(u) \to -ia_0 + \frac{c_0}{\pi}\ln\left(\frac{-c_0(u+u_0)}{\Lambda_0}\right). \tag{29.5.75}$$

Сравнение этого выражения с (29.5.74) показывает, что $c_0' = ic_0$. Поэтому формула (29.5.73) для $u \to -u_0$ принимает вид

$$h(u) - a(u) \to ic_0(u+u_0). \tag{29.5.76}$$

По определению, поле a включает множитель калибровочной константы e, которому можно придать любое значение с помощью соответствующего выбора точки перенормировки, в которой вычисляется e. Зайберг и Виттен выбрали масштаб a и u (фиксируя $u = a^2/2$ на бесконечности) таким образом, что $u_0 = 1$, т. е. особые точки находятся при $u = \pm 1$. При таком условии они получили решения (определенные в комплексной плоскости с разрезом от -1 до $+1$):

$$a_{SW}(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^{1} dx\sqrt{\frac{u-x}{1-x^2}}, \tag{29.5.77}$$

$$h_{SW}(u) = \frac{i\sqrt{2}}{\pi}\int_{1}^{u} dx\sqrt{\frac{u-x}{x^2-1}}. \tag{29.5.78}$$

Математические методы, использованные для получения этих результатов, выходят за рамки этой книги, но, к счастью, несложно проверить, что они правильные.

Сначала проверим, что $a_{SW}(u)$ и $h_{SW}(u)$ имеют сингулярное поведение в окрестности $u = \pm 1$ того же типа (29.5.71), (29.5.72), (29.5.75) и (29.5.76), что и правильное решение. Для $u \to 1$ из (29.5.77) получаем

$$a_{SW}(u) \to \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+1}} + \frac{u-1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x)(u-x)}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} + \frac{u-1}{2\pi}\ln\left(\frac{u-1}{2+u-2\sqrt{2}\sqrt{1+u}}\right) \to$$

$$\to \frac{4}{\sqrt{\pi}} - \frac{u-1}{2\pi}\ln(4(u-1)), \tag{29.5.79}$$

а из (29.5.78)

$$h_{SW}(u) \to \frac{i}{\pi}\int_1^u dx\sqrt{\frac{u-x}{x-1}} = \frac{i(u-1)}{2}. \tag{29.5.80}$$

Формулы (29.5.79) и (29.5.80) согласуются с предыдущими результатами (29.5.71) и (29.5.72), если взять $c_0 = i$ и $a_0 = 4/\sqrt{\pi}$. Функция (29.5.77) удовлетворяет свойству $\mathbb{Z}_8$ отражения (29.5.54), поэтому $a_{SW}(u)$ автоматически ведет себя как (29.5.75) при $u \to -1$. Из формул (29.5.77) и (29.5.78) сразу же следует (с учетом правильных знаков перед квадратными корнями, определяемых разрезом от $u = -1$ до $u = +1$), что $h_{SW}(u) - a_{SW}(u)$ пропорциональна $(u+1)$ для u вблизи -1.

Затем, поскольку $a_{SW}(u)$ и $h_{SW}(u)$ имеют такую же структуру сингулярностей при $u \to \pm 1$, как $a(u)$ и $h(u)$, они имеют такую же монодромию (формулы (29.5.59) и (29.5.69) с $N = 0$ и $N' = -1$): при обходе точки $+1$ имеем

$$\begin{pmatrix} a_{SW} \\ h_{SW} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{SW} \\ h_{SW} \end{pmatrix}, \tag{29.5.81}$$

а при обходе точки -1

$$\begin{pmatrix} a_{SW} \\ h_{SW} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{SW} \\ h_{SW} \end{pmatrix}. \tag{29.5.82}$$

Рассмотрим теперь величину

$$f(u) \equiv a(u)h_{SW}(u) - a_{SW}(u)h(u). \tag{29.5.83}$$

Она $SL(2,\mathbb{Z})$-инвариантна, поэтому имеет тривиальную монодромию: когда u обходит любую из точек $+1$ или -1, она возвращается к тому же значению. Функции $a(u)$, $h(u)$, $a_{SW}(u)$ и $h_{SW}(u)$ имеют только логарифмические особенности при ± 1, но поскольку $f(u)$ имеет тривиальную монодромию, она не имеет таких особых точек, и поэтому она аналитична во всех конечных точках.

Для вычисления целой функции $f(u)$ проверим сначала, что главные члены в асимптотиках функций $a_{SW}(u)$ и $h_{SW}(u)$ совпадают с главными членами асимптотик $a(u)$ и $h(u)$ соответственно. Для $u \to \infty$ из (29.5.77) получаем

$$a_{SW}(u) \to \frac{\sqrt{2u}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{2u}, \tag{29.5.84}$$

а из (29.5.78)

$$h_{SW}(u) \to \frac{i\sqrt{2u}}{\pi} \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \to \frac{i\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{u}\ln u. \tag{29.5.85}$$

Это совпадает с асимптотическим поведением (29.5.55) для функций $a(u)$ и $h(u)$.

Из этого, однако, следует только, что $f(u)/u\ln u \to 0$ для $u \to \infty$. Заметим, что симметрия относительно отражений (29.5.54) для $a(u)$ и ее аналог для $a_{SW}(u)$ означает, что следующие после главных члены в обеих функциях имеют порядок $\sqrt{u}/u^2$. Кроме того, следующие после главных члены в $h(u)$ и $h_{SW}(u)$ имеют порядок $\sqrt{u}$. Из этого следует, что можно вычислить главные члены в асимптотике $f(u)$, положив $a(u) = a_{SW}(u) = \sqrt{2u}$, так что $f(u) = O(U)$ для $u \to \infty$. Поскольку $f(u)$ — целая функция, это означает, что $f(u)$ линейна по u. Но $f(u)$ обращается в нуль при $u = +1$, где $h(u)$ и $h_{SW}(u)$ порядка $O(u-1)$. Функция $f(u)$ обращается в нуль и при $u = -1$, где $a(u) - h(u)$ и $a_{SW}(u) - h_{SW}(u)$ — порядка $O(u-1)$. Поэтому она должна быть равна нулю везде. Из этого следует, что

$$\frac{a_{SW}(u)}{a(u)} = \frac{h_{SW}(u)}{h(u)} \equiv g(u). \tag{29.5.86}$$

Теперь надо рассмотреть свойства функции $g(u)$. Поскольку $h_{SW}(u)$ и $h(u)$ аналитичны во всех конечных точках, кроме $u = -1$, а $a_{SW}(u) - h_{SW}(u)$ и $a(u) - h(u)$ аналитичны во всех конечных точках, кроме $u = +1$, то $g(u)$ (которую можно записать в форме $[a_{SW}(u) - h_{SW}(u)]/[a(u) - h(u)]$) аналитична везде. (Функции $a(u)$ или $h(u)$ не имеют нулей при $u \neq \pm 1$. Поскольку нуль $a(u)$ или $h(u)$ был бы связан с точкой, где масса заряженной частицы или монополя обращается в нуль, а, согласно предположению, этого не может быть для любого $u \neq \pm 1$, то оставим в покое нули этих функций.) Тот факт, что главные члены в асимптотиках функций $a_{SW}(u)$ и $h_{SW}(u)$ при $u \to \infty$ функций $a_{SW}(u)$ и $h_{SW}(u)$ точно такие же, как главные члены в асимптотиках $a(u)$ и $h(u)$ соответственно, означает, что $g(u) \to 1$ при $u \to \infty$. Отсюда следует, что целая функция $g(u)$ должна быть равна единице для всех u, и поэтому

$$a(u) = a_{SW}(u), \quad h(u) = h_{SW}(u), \tag{29.5.87}$$

что и требовалось показать.

Задачи

1. Чему равен индекс Виттена для модели в задаче 4 из главы 26 при $a \neq 0$? При $a = 0$? Может ли суперсимметрия нарушаться в этой модели эффектами высших порядков при $a = 0$? Объясните.

2. Рассмотрите перенормируемую суперсимметричную теорию с $SO(N_c)$ калибровочной симметрией, N_f левокиральными скалярными суперполями Φ_n в N-векторном представлении. Что можно сказать о структуре непертурбативного вильсоновского лагранжиана, когда голый суперпотенциал обращается в нуль? Что произойдет в случае, когда голый суперпотенциал равен $\sum_n \Phi_n \Phi_n$?

3. Каково соотношение между компонентами напряженности полей спинорного поля суперполя W_α и дуального ему суперполя $\widetilde{W}_\alpha$ в теории с лагранжианом (29.5.22)?

Список литературы

1. E. Witten, *Nucl. Phys.* **B185**, 513 (1981). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersymmetry*, S. Ferrara, ed. (North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapore, 1987).

1a. J. Hughes and J. Polchinski, *Nucl. Phys.* **B278**, 147 (1986); J. Hughes, J. Liu, and J. Polchinski, *Phys. Lett.* **B180**, 370 (1986); J. A. Bagger and A. Galperin, *Phys. Lett.* **B336**, 25 (1994); *Phys. Rev.* **D55**, 1091 (1997); *Phys. Lett.* **B412**, 296 (1997); I. Antoniadis, H. Partouche, and T. R. Taylor, *Phys. Lett.* **B372**, 83 (1996); S. Ferrara, L. Girardello, and M. Porrati, *Phys. Lett.* **B376**, 275 (1996).

2. E. Witten, *Nucl. Phys.* **B202**, 253 (1982). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersymmetry* [1].

3. A. C. Davis, M. Dine, and N. Seiberg, *Phys. Lett.* **125B**, 487 (1983); I. Affleck, M. Dine, and N. Seiberg, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1026 (1983); *Phys. Lett.* **137B**, 187 (1984), перепечатано в сб.: *Supersymmetry* [1]; *Nucl. Phys.* **B241**, 493 (1984); *Nucl. Phys.* **B52**, 1677 (1984); *Phys. Lett.* **140B**, 59 (1984).

4. N. Seiberg, *Phys. Lett.* **B318**, 469 (1993).

5. V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B229**, 381 (1983); *Nucl. Phys.* **B260**, 157 (1985); G. C. Rossi

and G. Veneziano, *Phys. Lett.* **138B**, 195 (1984), перепечатано в сб.: *Supersymmetry* [1]; S. F. Cordes, *Nucl. Phys.* **B273**, 629 (1986). Обзор см.: M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, hep-th/9902018, будет опубликовано.

6. E. Witten, *J. High Energy Phys.* **9802**, 006 (1998).

7. V. G. Kac and A. V. Smilga, hep-th/9902029, будет опубликовано.

8. I. Affleck, M. Dine, and N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B256**, 557 (1985).

9. N. Seiberg, *Phys. Rev.* **D49**, 6857 (1994).

10. N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B426**, 19 (1994); erratum, *Nucl. Phys.* **B430**, 485 (1994). Расширение на $N = 2$-теорию с гипермультиплетами материи дано в работе N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B431**, 484 (1994). Обзор см.: K. Intrilligator and N. Seiberg, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **45BC**, 1 (1996); напечатано также в сб.: *Summer School in High Energy Physics and Cosmology*, Trieste, 1995, E. Gava, ed. (World Scientific, Singapore, 1997), и в сб.: QCD and Beyond: Proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder Colorado, 1995, D. E. Soper, ed. (World Scientific, Singapore, 1996).

11. E. Witten, *Phys. Lett.* **86B**, 283 (1979).

12. N. Seiberg, *Phys. Lett.* **B206**, 75 (1988).

30

Супердиаграммы

Введение диаграмм Фейнмана в конце 1940-х годов дало огромные преимущества при расчетах, благодаря явному сохранению лоренц-инвариантности на каждом этапе вычислений по теории возмущений. Для того, чтобы добиться этого, было необходимо, чтобы обмен всеми спиновыми состояниями любой виртуальной частицы описывался единственным пропагатором. К счастью, удалось сделать еще шаг вперед и развить формализм супердиаграмм, в котором суперсимметрия, как и лоренц-инвариантность, явно сохраняются на каждом шаге [1]. Для этого необходимо описывать единым суперпропагатором обмен всеми частицами, соответствующими данному суперполю.

Проблема состоит в том, что левокиральные суперполя Φ, по которым мы интегрируем, подчиняются дифференциальному уравнению связи $\mathscr{D}_R \Phi = 0$. Аналогичная проблема существует в электродинамике, где тензор напряженности поля подчиняется дифференциальному уравнению связи — однородному уравнению Максвелла. В электродинамике с этой проблемой справляются, выражая тензор напряженности поля через векторный потенциал и совершая функциональное интегрирование по векторному потенциалу вместо интегрирования по тензору напряженности поля. Действуя во многом аналогично, мы наложим левокиральную связь, выразив левокиральные суперполя через киральные потенциальные суперполя, по которым производится интегрирование в функциональных интегралах. В этом формализме мы сталкиваемся с проблемами, похожими на те, которые возникают в связи с калибровочной инвариантностью в электродинамике, и обходимся с ними тем же способом.

Наиболее важный результат, который был получен с помощью формализма супердиаграмм — это теорема об отсутствии перенормировки для суперпотенциала [2]. Мы уже доказали эту теорему в разделе 27.6, используя гораздо более простую неявную технику, разработанную Зайбергом, которая может быть расширена и для описания непертурбативных эффектов. Интересно, однако, посмотреть, как эти удивительные сокращения эффектов перенормировки возникают в реальных вычислениях по теории возмущений.

30.1. Потенциальные суперполя

Рассмотрим теорию левокиральных суперполей $\Phi(x,\theta)$ и комплексно им сопряженных, но для простоты без калибровочных суперполей. Все вакуумные средние хронологически упорядоченных произведений компонентных полей могут быть вычислены из вакуумных средних хронологически упорядоченных произведений этих суперполей. Мы можем попытаться вычислить такие вакуумные средние, исходя из функционального интеграла

$$\Big\langle T\big\{\Phi_{n_1}(x_1,\theta_1),\Phi_{n_2}(x_2,\theta_2),\cdots\big\}\Big\rangle = \int\Big[\prod_{n,x,\theta} d\Phi_n(x,\theta)\Big]\exp\Big(iI[\Phi]\Big)$$
$$\times\,\Phi_{n_1}(x_1,\theta_1)\,\Phi_{n_2}(x_2,\theta_2)\cdots, \tag{30.1.1}$$

где $I[\Phi]$ — действие

$$I[\Phi] = \frac{1}{2}\int d^4x\Big[\sum_n \Phi_n^*(x,\theta)\Phi(x,\theta)\Big]_D + 2\,\mathrm{Re}\int d^4x\Big[f(\Phi)\Big]_{\mathscr{F}}. \tag{30.1.2}$$

(Множитель 1/2 вводится в первом слагаемом, как и в уравнении (26.4.3), чтобы придать компонентным полям в Φ общепринятую нормировку.) Но мы *не можем* просто прочитать фейнмановские правила для супердиаграмм из выражения (30.1.1), потому что функциональный интеграл по суперполям Φ_n должен подчиняться левокиральному условию $\mathscr{D}_R\Phi_n = 0$.

Аналогичная проблема возникает в электродинамике. Как обсуждалось в разделе 12.3, при энергиях, меньших массы электрона, взаимодействия мягких фотонов друг с другом описываются эффективным действием вида

$$I[f] = -\frac{1}{4}\int d^4x\Big[f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + c_1(f_{\mu\nu}f^{\mu\nu})^2 + c_2(\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma})^2\Big].$$

Но мы не можем прочитать фейнмановские правила из этой формулы, без учета того, что на функциональный интеграл наложена связь однородными уравнениями Максвелла

$$\partial_\mu f_{\nu\rho} + \partial_\nu f_{\rho\mu} + \partial_\rho f_{\mu\nu} = 0.$$

Как всем известно, вопрос с этой связью решается путем введения 4-потенциала A_μ с $f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, так что однородные уравнения Максвелла при этом удовлетворяются автоматически, и интегрирования по $A_\mu(x)$, а не по $f_{\mu\nu}(x)$.

Аналогично можно применить трюк, уже использованный в разделе 26.6 для вывода полевых уравнений для суперполей, и ввести некиральное потенциальное суперполе $S_n(x,\theta)$ с

$$\Phi_n = \mathscr{D}_R^2 S_n, \tag{30.1.3}$$

где

$$\mathscr{D}_R^2 \equiv \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \mathscr{D}_{R\alpha} \mathscr{D}_{R\beta}, \tag{30.1.4}$$

так что Φ_n автоматически удовлетворяет левокиральному условию $\mathscr{D}_{R\alpha}\Phi_n = 0$. Вместо выражения (30.1.1) имеем теперь функциональный интеграл

$$\begin{aligned}\Big\langle T\big\{\Phi_{n_1}(x_1,\theta_1),\Phi_{n_2}(x_2,\theta_2),\cdots\big\}\Big\rangle = \int \Big[\prod_{n,x,\theta} dS_n(x,\theta)\Big] \exp\Big(iI\big[\mathscr{D}_R^2 S\big]\Big) \\ \times \mathscr{D}_R^2 S_{n_1}(x_1,\theta_1)\mathscr{D}_R^2 S_{n_2}(x_2,\theta_2)\cdots .\end{aligned} \tag{30.1.5}$$

Выражая действие (30.1.2) через S_n, можно вспомнить, что D-член суперпроизводной не дает вклад в действие, поэтому можно передвинуть оператор $(\mathscr{D}_R^2)^* = \mathscr{D}_L^2$, действующий на S_n^* в первом слагаемом (30.1.2), так, чтобы он действовал вместо этого на S_n, что приводит к

$$I\big[\mathscr{D}_R^2 S\big] = \frac{1}{2}\int d^4x \Big[\sum_n S_n^* \mathscr{D}_L^2 \mathscr{D}_R^2 S_n\Big]_D + 2\,\mathrm{Re}\int d^4x \Big[f(\mathscr{D}_R^2 S)\Big]_{\mathscr{F}}. \tag{30.1.6}$$

Оператор $\mathscr{D}_R^2$ в любом из множителей $\mathscr{D}_R^2 S$ в любом слагаемом в $f(\mathscr{D}_R^2 S)$ может рассматриваться как действующий на все слагаемое, ибо $\mathscr{D}_R$ дает нуль при действии на любой другой множитель $\mathscr{D}_R^2 S$ в этом слагаемом. Следовательно, можно записать

$$f(\mathscr{D}_R^{|!2} S) = \mathscr{D}_R^2 \tilde{f}(S), \tag{30.1.7}$$

где $\tilde{f}(S)$ получается из $f(\mathscr{D}_R^2 S)$ отбрасыванием *любого одного* оператора $\mathscr{D}_R^2$ в каждом слагаемом. Например, для суперполя одного типа, если $f(\Phi) = \sum_r c_r \Phi^r$, то

$$\tilde{f}(S) = \sum_r c_r S(\mathscr{D}_R^2 S)^{r-1}.$$

Используя уравнения (30.1.6), (30.1.7) и (26.3.31), можно записать все действие в виде D-члена:

$$I\big[\mathscr{D}_R^2 S\big] = \frac{1}{2}\int d^4x \sum_n \Big[S_n^* \mathscr{D}_L^2 \mathscr{D}_R^2 S_n\Big]_D + 2\,\mathrm{Re}\int d^4x \Big[\tilde{f}(S)\Big]_D. \tag{30.1.8}$$

Формула (26.6.5) показывает, что это может быть также записано как интеграл по суперпространству:

$$I[\mathscr{D}_R^2 S] = -\frac{1}{4}\int d^4x \int d^4\theta \sum_n S_n^* \mathscr{D}_L^2 \mathscr{D}_R^2 S_n - \mathrm{Re}\int d^4x \int d^4\theta \tilde{f}(S). \qquad (30.1.9)$$

Это то действие, которое мы будем использовать при выводе формализма супердиаграмм с помощью функционального интеграла.

30.2. Суперпропагаторы

Обычно пропагатор может быть получен непосредственно из части действия второго порядка по полям. Если мы запишем эту квадратичную часть для комплексного поля φ_i (где i — составной индекс, включающий пространственно-временные координаты, а также индексы спина и сорта частиц) как

$$I_{\text{квадр}}[\varphi] = -\sum_{ij} D_{ij}\varphi_i^*\varphi_j, \qquad (30.2.1)$$

где «матрица» D_{ij} эрмитова, то, как объяснено в разделе 9.4, пропагатор равен просто $\Delta = D^{-1}$. С этим выражением возникает проблема, когда квадратичная часть действия инвариантна относительно (линеаризованного) калибровочного преобразования

$$\varphi_i \to \varphi_i + \xi_i, \qquad (30.2.2)$$

для некоторого класса «векторов» ξ. В этом случае

$$\sum_i D_{ij}\xi_j = 0, \qquad (30.2.3)$$

и, очевидно, мы не можем обратить «матрицу» D_{ij}. В электродинамике проблема возникает потому, что плотность лагранжиана инвариантна относительно калибровочного преобразования $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda$. Мы имеем здесь ту же проблему: так как действие на самом деле является функционалом от $\mathscr{D}_R^2 S_n$, а не от самих S_n, оно инвариантно относительно преобразования

$$S_n \to S_n + \mathscr{D}_R X_n, \qquad (30.2.4)$$

для любых суперполей X_n.

В электродинамике заряженных частиц проблемы, возникающие из-за калибровочной инвариантности, обычно решаются при помощи выбора калибровки, используя, например, метод Фаддеева–Попова–де Витта, описанный в разделе 15.5. Но проблемы, возникающие здесь из-за инвариантности относительно преобразования (30.2.2), более похожи на проблемы эффективной полевой теории для фотонов при энергиях ниже порога рождения заряженных частиц, где теория калибровочно-инвариантна просто потому, что действие содержит только калибровочно-инвариантные поля. В таких теориях можно действовать проще. В дополнение к собственному вектору ξ_i «матрицы» D_{ij} с нулевым собственным значением (для простоты взятом в единственном направлении) мы можем найти набор ортонормированных собственных векторов $u_{\nu i}$ с собственными значениями $d_\nu \neq 0$:

$$\sum_j D_{ij} u_{\nu i} = d_\nu u_{\nu i}, \qquad \sum_i u^*_{\nu i} u_{\nu' i} = \delta_{\nu\nu'}, \qquad \sum_i u^*_{\nu i} \xi_i = 0. \tag{30.2.5}$$

Мы можем ввести новый набор переменных интегрирования φ' и φ'_ν:

$$\varphi_i = \varphi' \xi_i + \sum_\nu \varphi'_\nu u_{\nu i}. \tag{30.2.6}$$

Интеграл того типа, который встречается при вычислении квантовых средних значений с помощью диаграмм Фейнмана, может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \int \left[\prod_i d\varphi_i d\varphi_i^*\right] \exp\left(iI_{\text{квадр}}[\varphi]\right)\varphi_a \cdots \varphi_b^* &= \mathcal{J} \int d\varphi' d\varphi'^* \\ &\times \int \left[\prod_\nu d\varphi'_\nu d\varphi'^*_\nu\right] \exp\left(-i\sum_\nu d_\nu |\varphi'_\nu|^2\right) \left[\varphi'\xi_a + \sum_\nu \varphi'_\nu u_{\nu a}\right] \cdots \\ &\times \left[\varphi'\xi_b + \sum_\nu \varphi'_\nu u_{\nu b}\right]^* \cdots, \end{aligned} \tag{30.2.7}$$

где $\mathcal{J}$ — якобиан преобразования (30.2.6). Интеграл по φ' и φ'^*, конечно, плохо определен, потому что эти поля не входят в аргумент показательной функции. Но это не имеет значения, если действие включает только калибровочно-инвариантные поля, так как тогда φ_a, φ_b и т. д. будут сворачиваться с «токами» J_a, J_b и т. д., для которых

$$\sum_a \xi_a J_a = 0. \tag{30.2.8}$$

Поэтому можно записать (30.2.7) как

$$\begin{aligned} \int \left[\prod_i d\varphi_i d\varphi_i^*\right] \exp\left(iI_{\text{квадр}}[\varphi]\right)\varphi_a \cdots \varphi_b^* &= \mathscr{C} \int \left[\prod_\nu d\varphi'_\nu d\varphi'^*_\nu\right] \\ &\times \exp\left(-i\sum_\nu d_\nu |\varphi'_\nu|^2\right) \left[\sum_\nu \varphi'_\nu u_{\nu a}\right] \cdots \left[\sum_\nu \varphi'_\nu u_{\nu b}\right]^* \cdots \\ &+ \xi\text{-члены}, \end{aligned} \tag{30.2.9}$$

где «ξ-члены» обозначает слагаемые, пропорциональные одному или нескольким множителям ξ_a, ξ_b и т. д., которые исчезают, в соответствии с (30.2.8), после свертки с «токами» J, а $\mathscr{C}$— бесконечная константа $\mathscr{J}\int d\varphi'$. Интеграл по φ'_ν тогда дает

$$\int\left[\prod_i d\varphi_i d\varphi_i^*\right]\exp\left(iI_{\text{квадр}}[\varphi]\right)\varphi_a\cdots\varphi_b^*\cdots\propto\sum_{\text{пары}}\left[-i\Delta_{ab}\right]\cdots$$
$$+\xi\text{-члены},\tag{30.2.10}$$

где сумма по спариваниям является суммой по всем способам спаривания индексов полей φ и φ^*, а Δ_{ab} — пропагатор

$$\Delta_{ab}=\sum_\nu\frac{u_{\nu a}u_{\nu b}^*}{d_\nu}.\tag{30.2.11}$$

Вместо прямого вычисления суммы (30.2.11) можно использовать определяющее ее свойство

$$\sum_c D_{ac}\Delta_{cb}=\sum_\nu u_{\nu a}u_{\nu b}^*\equiv\Pi_{ab},\tag{30.2.12}$$

где Π — проекционный оператор на пространство, ортогональное ξ:

$$\Pi^2=\Pi,\qquad \Pi\xi=0.\tag{30.2.13}$$

Решение (30.2.12) единственно только с точностью до ξ-членов, но они не играют роли, если поля φ_i появляются в действии только в калибровочно-инвариантных комбинациях.

Например, в электродинамике можно записать кинематическую часть действия как

$$I_{\text{квадр}}[A]=-\frac{1}{4}\int d^4x f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}=+\frac{1}{2}\int d^4x A^\mu(\Box\delta_\mu^\nu-\partial_\mu\partial^\nu)A_\nu.$$

Дифференциальный оператор $-\Box\delta_\mu^\nu+\partial^\nu\partial_\mu$ необратим потому, что он имеет нулевое собственное значение с собственными векторами вида $\xi^\mu=\partial^\mu\Lambda$. Проекционная матрица на пространство, ортогональное этим векторам, имеет вид

$$\Pi_\mu{}^\nu(x,y)=[\delta_\mu{}^\nu-\partial_\mu\partial^\nu\Box^{-1}]\delta^4(x-y),$$

где $\Box^{-1}\delta^4(x-y)$ — любое решение уравнения $\Box[\Box^{-1}\delta^4(x-y)]=\delta^4(x-y)$. Определяющее уравнение для пропагатора есть

$$(-\Box\delta_\mu^\lambda+\partial_\mu\partial^\lambda)\Delta_\lambda{}^\nu(x,y)=\Pi_\mu{}^\nu(x,y)$$

с решением

$$\Delta_\lambda{}^\nu(x,y) = \delta^\nu_\mu \Delta_F(x-y) + \partial_\mu \partial^\nu\text{-члены},$$

где $\Delta_F(x-y)$ — обычный фейнмановский пропагатор (6.2.16), удовлетворяющий соотношению $\Box\Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y)$. (Множитель 1/2 в действии не появляется в определяющем уравнении для пропагатора, так как A_μ — действительное поле. Происхождение $-i\varepsilon$ в знаменателе интеграла Фурье в (6.2.16) объяснено в формализме функциональных интегралов в разделе 9.2.)

Рассмотрение первого слагаемого в выражении (30.1.9) показывает, что определяющее уравнение для суперпропагатора потенциальных суперполей имеет вид

$$\frac{1}{4}\mathscr{D}_L^2\mathscr{D}_R^2\Delta^S_{nm}(x,\theta;x',\theta') = \mathscr{P}\,\delta^4(x-x')\delta^4(\theta-\theta')\delta_{nm}, \tag{30.2.14}$$

где $\mathscr{P}$ — суперпространственный дифференциальный оператор, удовлетворяющий условиям для проекционного оператора

$$\mathscr{P}^{\,2} = \mathscr{P}\,, \qquad \mathscr{P}\,\mathscr{D}_R = 0, \tag{30.2.15}$$

а $\delta^4(\theta-\theta')$ — фермионная дельта-функция, введенная в формуле (26.6.8). Решением является

$$\mathscr{P} = \frac{-1}{16\Box}\mathscr{D}_L^2\mathscr{D}_R^2. \tag{30.2.16}$$

(Очевидно, что $\mathscr{P}\,\mathscr{D}_R = 0$. Чтобы проверить, что $\mathscr{P}^{\,2} = \mathscr{P}$, мы должны использовать формулу (26.6.12), которая показывает, что $\mathscr{D}_R^2\mathscr{D}_L^2\mathscr{D}_R^2 = -16\Box\mathscr{D}_R^2$.) Решение уравнения (30.2.14) имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta^S_{nm}(x,\theta;x',\theta') &= -\frac{1}{4\Box}\delta^4(x-x')\delta^4(\theta-\theta')\delta_{nm} = \\ &= \frac{1}{4}\Delta_F(x-x')\delta^4(\theta-\theta')\delta_{nm} + \mathscr{D}R\text{-члены}.\end{aligned} \tag{30.2.17}$$

Это суперпропагатор, отвечающий линии, созданной потенциальным суперполем $S^*_m(x',\theta')$ и уничтоженной потенциальным суперполем $S_n(x,\theta)$, который мы должны использовать при вычислении супердиаграмм для действия (30.1.9). Чтобы увидеть связь с обычными пропагаторами, представляет интерес рассмотреть суперпропагатор линии, создаваемой левокиральным суперполем $\Phi^*_m(x',\theta')$ и уничтожаемой левокиральным суперполем $\Phi_n(x,\theta)$. Эти киральные суперполя получаются при действии $\mathscr{D}_R^2$ на $S_n(x,\theta)$ и действии $\mathscr{D}'_R{}^{2*} = \mathscr{D}'_L{}^2$ на $S^*_n(x',\theta')$, таким образом, пропагатор для левокиральных суперполей есть

$$\Delta^\Phi_{nm}(x,\theta;x',\theta') = \frac{1}{4}\mathscr{D}_R^2\mathscr{D}'_L{}^2\Delta_F(x-x')\delta^4(\theta-\theta')\delta_{nm}. \tag{30.2.18}$$

Например, слагаемое в суперпропагаторе нулевого порядка по θ и θ' имеет вид

$$\left[\Delta^{\Phi}_{nm}(x,\theta;x',\theta')\right]_{\theta=\theta'=0} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_R}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta'_L}\right)\Delta_F(x-x')\delta^4(\theta-\theta')\delta_{nm}. \quad (30.2.19)$$

Чтобы преобразовать это, вспомним уравнение (26.6.8) для фермионной дельта-функции:

$$\delta^4(\theta-\theta') = \frac{1}{4}\left((\theta_L-\theta'_L)^{\mathrm{T}}\varepsilon(\theta_L-\theta'_L)\right)\left((\theta_R-\theta'_R)^{\mathrm{T}}\varepsilon(\theta_R-\theta'_R)\right),$$

из которого мы находим $(\partial/\partial\theta_R)^2(\partial/\partial\theta'_L)^2\delta^4(\theta-\theta') = 4$. Следовательно, выражение (30.2.19) дает

$$\left[\Delta^{\Phi}_{nm}(x,\theta;x',\theta')\right]_{\theta=\theta'=0} = \Delta_F(x-x')\delta_{nm}, \quad (30.2.20)$$

что совпадает с обычным пропагатором для скалярных компонент .

30.3. Вычисления с супердиаграммами

Рассмотрим теперь, как использовать результаты предыдущих разделов для вычисления квантового эффективного действия $\Gamma[S,S^*]$ для набора классических потенциальных суперполей $S_n(x,\theta)$ и им сопряженных. Следуя предписанию, обсуждавшемуся в разделе 16.1, это действие может быть определено как сумма по всем связным одночастично неприводимым супердиаграммам, состоящим из вершин, к которым прикреплены направленные внутренние и внешние линии. Для каждой внешней линии типа n, начинающейся или заканчивающейся в вершине x,θ, мы включаем c-числовой множитель $S_n(x,\theta)$ или $S^*_n(x,\theta)$ соответственно (но без пропагатора). Вершина, помеченная x,θ с N входящими или N выходящими линиями, помеченными $n_1,n_2,\ldots,n_N$, дает множитель, равный i, умноженному на коэффициент при слагаемом $S_1S_2\cdots S_N$ в суперпотенциале $\tilde{f}(S)$ или, соответственно, умноженному на комплексно сопряженный коэффициент. Внутренняя линия любого типа, выходящая из вершины x,θ и входящая в вершину x',θ', дает множитель в виде пропагатора, заданного уравнениями (30.2.10) и (30.2.17) как

$$-\frac{i}{4}\delta^4(\theta-\theta')\Delta_F(x-x'). \quad (30.3.1)$$

Более того, как показано в (30.1.7), суперпроизводная $\mathscr{D}^2_R$ действует на пропагаторы или на S-множители внешних линий всех внутренних или внешних линий, кроме одной, входящих в любую вершину, а суперпроизводная $\mathscr{D}_L^2$ действует на пропагаторы или S-множители внешних линий всех внутренних или внешних линий кроме одной, исходящих из любой вершины. Произведение этих множителей должно быть проинтегрировано по всем x и θ; квантовое эффективное действие есть сумма этих интегралов для всех одночастично неприводимых диаграмм.

В результате интегрирования по частям в суперпространстве операторы $\mathscr{D}_L^2$ и(или) $\mathscr{D}_R^2$, сопутствующие каждому пропагатору (скажем, тому, который соединяет вершины x, θ и x', θ'), могут быть перенесены к другим пропагаторам или множителям внешних линий. В результате остается множитель, вносимый этой внутренней линией, пропорциональный множителю $\delta^4(\theta - \theta')$. Интегрирование по θ' уничтожает эту дельта-функцию и позволяет всюду заменить θ' на θ. (В случаях, когда несколько внутренних линий соединяют одну и ту же пару вершин, нужно использовать свойство фермионных дельта-функций: $[\delta^4(\theta - \theta')]^2 = 0$.) Продолжая тем же образом, мы возвращаемся к единственному четырехмерному θ-интегралу, со всеми $\mathscr{D}$, действующими на множители внешних линий S_n и S_m^*. Это означает, что хотя и не всегда локальное по пространственным координатам квантовое эффективное действие $\Gamma[S, S^*]$ *локально по фермионным координатам.*

Структура этого функционала определяется его инвариантностью относительно «калибровочных» преобразований (30.2.4). Из нее следует, что на каждый из множителей внешних линий S_n или S_n^* должен действовать оператор $\mathscr{D}_R^2$ или $\mathscr{D}_L^2$ соответственно. Возможны два исключения. Они состоят в том, что слагаемое, содержащее только входящие или только исходящие внешние линии, в которых операторы $\mathscr{D}_R^2$ или $\mathscr{D}_L^2$ действуют на все, кроме одного, множители, отвечающие внешним линиям S_n или S_n^* соответственно, и не содержащее других суперпроизводных, все еще инвариантно относительно преобразования (30.2.4), даже хотя это слагаемое не может быть записано как θ-интеграл от функционала только одних Φ_n и(или) Φ_n^*. Это происходит потому, что изменение подобной амплитуды под действием такого преобразования может проистекать только за счет изменений в том множителе S_n или S_n^*, отвечающем внешним линиям, на который *не* действует оператор $\mathscr{D}_R^2$ или $\mathscr{D}_L^2$, и это изменение устраняется, если воспользоваться интегрированием по частям и передвинуть один из других операторов $\mathscr{D}_R^2$ или $\mathscr{D}_L^2$ так, чтобы они действовали на этот множитель. Как мы видели в разделе 30.1, такое слагаемое в $\Gamma[S, S^*]$ — это $\mathscr{F}$-член функционала от Φ_n или Φ_n^*, и, следовательно, он дает поправку к суперпотенциалу или ему комплексно сопряженному. Не считая этих исключений, каждое слагаемое в $\Gamma[S, S^*]$ может быть записано в виде четырехмерного θ-интеграла от функционала только от Φ_n и(или) Φ_n^*, и поэтому дает поправку к D-члену эффективного действия.

Заметим также, что слагаемое квантового эффективного действия, в котором на все, кроме одного, множители внешней линии S_n или S_n^*, действуют $\mathscr{D}_R^2$ или $\mathscr{D}_L^2$ соответственно, *а также* дополнительные операторы $\mathscr{D}_R^2$ или $\mathscr{D}_L^2$ (как, например, в комбинациях $\mathscr{D}_R^2\mathscr{D}_L^2\mathscr{D}_R^2 S_n$ или $\mathscr{D}_L^2\mathscr{D}_R^2\mathscr{D}_L^2 S_n^*$), также может быть записано путем интегрирования по частям как слагаемое, в котором один из дополнительных операторов $\mathscr{D}_R^2$ или $\mathscr{D}_L^2$ действует на не продифференцированный ранее множитель внешней линии S_n или S_n^*. Следовательно, такое слагаемое может быть выражено как четырехмерный θ-интеграл функционала только от Φ_n и(или) Φ_n^*, и поэтому оно создает еще одну поправку к D-члену действия. Единственные слагаемые в $\Gamma[S,S^*]$, которые не могут быть записаны таким образом, это те, которые имеют E входящих внешних линий и *только* $E-1$ операторов $\mathscr{D}_R^2$, действующих на множители внешних линий S_n, или E^* входящих внешних линий и *только* E^*-1 операторов $\mathscr{D}_L^2$, действующих на множители внешних линий S_n^*. Поэтому мы можем сказать, дает ли супердиаграмма вклад в суперпотенциал или ему сопряженный, просто подсчитав количествооператоров $\mathscr{D}_R^2$ или $\mathscr{D}_L^2$, вносимых супердиаграммами в соответствующее слагаемое в $\Gamma[S,S^*]$.

Подсчитаем эти суперпроизводные. Рассмотрим связную диаграмму с V_n вершинами с n входящими линиями, V_n^* вершинами с n исходящими линиями, I внутренних линиями, E внешними входящими линиями и E^* внешними исходящими линиями. Эти числа связаны соотношениями:

$$I+E=\sum_n nV_n, \qquad I+E^*=\sum_n nV_n^*. \tag{30.3.2}$$

Полное количество операторов $\mathscr{D}_R^2$ и $\mathscr{D}_L^2$ тогда равно

$$N_R=\sum_n V_n(n-1)=I+E-V=L+V^*+E-1, \tag{30.3.3}$$

и

$$N_L=\sum_n V_n^*(n-1)=I+E^*-V^*=L+V+E^*-1, \tag{30.3.4}$$

где $V=\sum_n V_n$ — полное число вершин с входящими линиями, $V^*=\sum_n V_n^*$ — полное число вершин с исходящими линиями, $L=I-V-V^*+1$ — число петель. Мы видим, что у диаграммы с любыми петлями $N_R\geqslant E$ и $N_L\geqslant E^*$, так что есть по крайней мере достаточное количество операторов $\mathscr{D}_R^2$ для того, чтобы преобразовать все S_n в $\Phi_n=\mathscr{D}_R^2 S_n$ и их производные, операторов $\mathscr{D}_L^2$ для того, чтобы преобразовать все S_n^* в $\Phi_n^*=\mathscr{D}_L^2 S_n^*$ и их производные. *Следовательно, любая диаграмма с петлями вносит вклад только в четырехмерный θ-интеграл, другими словами, только в D-член функционала левокиральных суперполей Φ_n и им сопряженных.*

Единственный способ получить вклад в $\mathscr{F}$-член или ему сопряженный — иметь ровно $N_R=E-1$ операторов $\mathscr{D}_R^2$ или ровно $N_L=E^*-1$

операторов $\mathscr{D}_L^2$ соответственно. Таким образом, согласно формулам (30.3.3) и (30.3.4), такая диаграмма должна иметь $L = 0$ и $V^* = 0$ или $V = 0$ соответственно. Другими словами, пока мы рассматриваем одночастично неприводимые диаграммы, мы можем получить $\mathscr{F}$-член только из диаграммы с единственной вершиной с входящими линиями, и ему сопряженный член — только из диаграммы с единственной вершиной с исходящими линиями. Следовательно, мы снова видим, что *в любом порядке теории возмущений нет ни конечной, ни бесконечной перенормировки $\mathscr{F}$-членов.*

Задачи

1. Используйте выражение (30.2.18) для вычисления пропагаторов спинорных и вспомогательных компонент кирального суперполя.

2. Рассмотрим суперсимметричнную теорию единственного левокирального суперполя Φ с лагранжианом

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}[\Phi^*\Phi]_D + 2\,\mathrm{Re}\Big(g[\Phi^3]_{\mathscr{F}}\Big),$$

где g — произвольная комплексная константа. Используйте формализм супердиаграмм для вычисления однопетлевого вклада в квантовое эффективное действие. Выразите ответ в виде интеграла по координатам и одной грассмановой координате θ.

3. Чему равен суперпропагатор калибровочного суперполя $V(x,\theta)$ в суперсимметричной абелевой калибровочной теории с кинематическим членом (27.3.17)?

Список литературы

1. A. Salam and J. Strathdee, *Phys. Rev.* **D11**, 1521 (1975); *Nucl. Phys.* **B86**, 142 (1975); D. M. Capper, *Nuovo Cimento* **25A**, 259 (1975); R. Delbourgo, *Nuovo Cimento* **25A**, 646 (1975); D. M. Capper and G. Leibrandt, *Nucl. Phys.* **B85**, 492 (1975); F. Krause, M. Scheunert, J. Honerkamp, and M. Schlindwein, *Phys. Lett.* **53B**, 60 (1974); K. Fujikawa and W. Lang, *Nucl. Phys.* **B88**, 61 (1975); J. Honerkamp, M. Schlindwein, F. Krause, and M. Scheunert, *Nucl. Phys.* **B95**, 397, (1975); S. Ferrara and O. Piguet, *Nucl. Phys.* **B93**, 261 (1975); R. Delbourgo, *J. Phys.* **G1**, 800 (1975). Этот формализм был распространен на супергравитацию в работе: W. Siegel, *Phys. Lett.* **B84**, 197 (1979).
2. M. T. Grisaru, W. Siegel, and M. Roček, *Nucl. Phys.* **B159**, 429 (1979).

31

Супергравитация

Гравитация существует, поэтому, если в суперсимметрии заключена какая-либо истина, любая реалистичная суперсимметричная теория должна быть в конечном счете расширена до суперсимметричной теории материи и гравитации, известной как *супергравитация*. Суперсимметрия без супергравитации не может являться окончательным выбором, хотя и может быть хорошим приближением при энергиях много меньше планковской.

Имеются два лидирующих подхода к построению теории супергравитации. В первом подходе супергравитация может быть представлена как теория искривленного суперпространства [1]. Этот подход аналогичен построению суперсимметричных калибровочных теорий в разделах 27.1–27.3; гравитационное поле возникает как компонента суперполя, обладающего как физическими, так и нефизическими компонентами, подобными нефизическим C, M, N и ω компонентам калибровочного суперполя V. Процесс вывода полной нелинейной теории супергравитации очень сложен и до сих пор не избавлен от очевидно произвольных шагов. В том или ином пункте вывода оказывается необходимым просто постулировать определенный набор ограничений на суперполе гравитона.

В этой главе мы будем следовать второму подходу, который менее элегантен, но более прозрачен [2]. Сначала в разделах 31.1–31.5 мы рассматриваем случай слабого гравитационного поля [3], анализируя супергравитацию с помощью тех же методов рассмотрения суперполя в плоском пространстве, которые использованы в гл. 26 и 27 при изучении обычных суперсимметричных теорий. Следуя по этому пути, можно определить физические компоненты гравитационного суперполя (включая вспомогательные поля, аналогичные D-компоненте калибровочного суперполя V). Приближение слабого поля позволяет получить некоторые важнейшие следствия теории супергравитации, включая общую формулу для массы гравитино — в разделе 31.3, результаты для масс калибрино и параметров A и B, получаемые при нарушении суперсимметрии аномалиями, — в разделе 31.4.

В разделе 31.6 мы добавляем члены высшего порядка по G в преобразования суперсимметрии для физических полей и в лагранжиан, который описывает их взаимодействия, так, чтобы преобразования суперсимметрии и общекоординатные преобразования образовывали замкнутую алгебру, а лагранжиан был инвариантен относительно таких преобразований. Этот подход в некоторых отношениях аналогичен рассмотрению суперсимметричных калибровочных теорий в разделе 27.8; мы рассматриваем только физические компоненты гравитационного суперполя и получаем правила преобразования, включающие ковариантные производные вместо простых. Данный подход был использован при выводе важнейшего приложения теории супергравитации за пределами приближения слабого поля — эффективного низкоэнергетического лагранжиана в теориях вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии. Это приложение является темой раздела 31.7.

31.1. Суперполе метрики

Супергравитация с необходимостью включает как спинорные, так и тензорные поля, так что нам придется использовать для описания гравитационного поля тетраду $e^a{}_\mu(x)$, а не метрику, которая связана с тетрадой уравнением

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab}\, e^a{}_\mu(x) e^b{}_\nu(x). \tag{31.1.1}$$

Индексы μ, ν и т. д. нумеруют общие координаты, а индексы a, b и т. д. нумеруют координаты в локально инерциальной системе, в которой η_{ab} — обычная диагональная матрица с элементами $+1$, $+1$, $+1$, -1. В тетрадном формализме действие предполагается инвариантным относительно преобразований симметрии двух различных видов: общекоординатных преобразований $x^\mu \to x'^\mu(x)$, при которых тетрада $e^a{}_\mu(x)$ преобразуется в $e'^a{}_\mu(x')$ по формуле

$$e'^a{}_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e^a{}_\nu(x), \tag{31.1.2}$$

и локальных преобразований Лоренца, при которых

$$e^a{}_\mu(x) \to \Lambda^a{}_b(x) e^b{}_\mu(x), \tag{31.1.3}$$

где $\Lambda^a{}_b(x)$ — произвольная действительная матрица, удовлетворяющая условиям

$$\eta_{ab}\Lambda^a{}_c(x)\Lambda^b{}_d(x) = \eta_{cd}. \tag{31.1.4}$$

Элементарный обзор этого формализма дан в приложении к этой главе.

Для слабого гравитационного поля тетрада близка к единичной матрице. В таком поле ее удобно представить как

$$e^a{}_\mu(x) = \delta^a_\mu + 2\kappa\varphi^a{}_\mu(x), \tag{31.1.5}$$

где величины $\varphi^a{}_\mu(x)$ малы. Как будет видно в разделе 31.2, если мы хотим, чтобы объект $\varphi^a{}_\mu$ являлся стандартным образом нормированным полем, то константа κ должна выражаться через ньютоновскую константу G как $\kappa = \sqrt{8\pi G}$. Близость тетрады к единичной матрице сохраняется при малых координатных преобразованиях

$$x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu(x), \tag{31.1.6}$$

а также при малых локальных преобразованиях Лоренца

$$\Lambda^a{}_b(x) = \delta^a_b + \omega^a{}_b(x), \tag{31.1.7}$$

где $\xi^\mu(x)$ и $\omega^a{}_b(x)$ — величины того же порядка, что и $\varphi^a{}_\mu(x)$, причём согласно уравнению (31.1.4) для $\omega_{ab}(x) \equiv \eta_{ac}\omega^c{}_b(x)$, должны выполняться условия

$$\omega_{ab}(x) = -\omega_{ba}(x). \tag{31.1.8}$$

Комбинация преобразований (31.1.2) и (31.1.3) теперь приобретает вид

$$\varphi_{\mu\nu}(x) \to \varphi_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2\kappa}\left[-\frac{\partial\xi_\mu(x)}{\partial x^\nu} + \omega_{\mu\nu}(x)\right]. \tag{31.1.9}$$

Мы перестали различать общекоординатные индексы μ, ν и т. д. и локальные лоренцевские индексы a, b и т. д., поднимая и опуская индексы обоих сортов с помощью $\eta^{\mu\nu}$ и $\eta_{\mu\nu}$. Используя метрику (31.1.1), можно переписать предположение о слабости поля (31.1.5) как

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + 2\kappa\, h_{\mu\nu}(x), \tag{31.1.10}$$

где

$$h_{\mu\nu}(x) \equiv \varphi_{\mu\nu}(x) + \varphi_{\nu\mu}(x), \tag{31.1.11}$$

а закон преобразования (31.1.9) приобретает вид

$$h_{\mu\nu}(x) \to h_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2\kappa}\left[\frac{\partial\xi_\mu(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\xi_\nu(x)}{\partial x^\mu}\right]. \tag{31.1.12}$$

Используя алгебру суперсимметрии, мы показали в разделе 25.4, что у гравитона имеется фермионный суперпартнер — гравитино со спиральностями $\pm 3/2$. Мы видели в разделе 5.9, что зарядово самосопряженная безмассовая частица со спиральностями ± 1 может участвовать в низкоэнергетических взаимодействиях, только если она описывается действительным полем $A_\mu(x)$, взаимодействия которого инвариантны относительно калибровочных преобразований $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$. Аналогично, зарядово самосопряженная безмассовая частица со спиральностями $\pm 3/2$ может участвовать в низкоэнергетических взаимодействиях, только если она описывается майорановским полем $\psi_\mu(x)$ с дополнительным векторным индексом μ, инвариантным относительно калибровочного преобразования

$$\psi_\mu(x) \to \psi_\mu(x) + \partial_\mu \psi(x), \tag{31.1.13}$$

где $\psi(x)$ — произвольное майорановское поле [3a]. Теперь нужно выяснить, как поля $\varphi_{\mu\nu}(x)$ и $\psi_\mu(x)$ с такими трансформационными свойствами могут быть объединены в суперполе.

Мы установили в разделе 27.1, что калибровочное поле $V_\nu(x)$ может рассматриваться как V_ν-компонента действительного скалярного суперполя $V(x,\theta)$, определенная в уравнении (26.2.10) как коэффициент при $i(\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\nu\theta)/2$. Аналогично мы хотели бы объединить поле тетрады $\varphi_{\mu\nu}(x)$ и поле гравитино $\psi_\mu(x)$ в *векторное* суперполе $H_\mu(x,\theta)$, известное как *суперполе метрики*. Возникает вопрос: как $\varphi_{\mu\nu}(x)$ и $\psi_\mu(x)$ связаны с компонентами этого суперполя?

Чтобы прояснить этот вопрос, отметим что суперсимметрия требует, чтобы «калибровочные» преобразования (31.1.9) и (31.1.13) были частными случаями преобразования всего суперполя метрики

$$H_\mu(x,\theta) \to H_\mu(x,\theta) + \Delta_\mu(x,\theta). \tag{31.1.14}$$

Более того, *слабое* гравитационное поле $h_{\mu\nu}$ взаимодействует с тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, который, как мы нашли в разделе 26.7, является линейной комбинацией компонент действительного векторного суперполя Θ^μ. Таким образом, мы ожидаем, что взаимодействие полного суперполя H_μ с материей имеет вид

$$I_{\rm int} = 2\kappa \int d^4x \left[H_\mu \Theta^\mu\right]_D. \tag{31.1.15}$$

(Далее в этом разделе мы проверим правильность коэффициента 2κ, если Θ^μ нормирован как в разделе 26.7.) Как было показано в разделе 26.7, суперток Θ^μ должен удовлетворять условиям

$$\gamma^\mu \mathscr{D}\Theta_\mu = \mathscr{D}X, \tag{31.1.16}$$

где X — действительное киральное скалярное суперполе (сумма левокирального скалярного суперполя и ему комплексно сопряженного), а $\mathscr{D}$ — четырехкомпонентная суперпроизводная (26.2.26). Отсюда следует, что это взаимодействие инвариантно относительно преобразования вида (31.1.14), где Δ_μ имеет вид

$$\Delta_\mu = \left(\bar{\mathscr{D}}\gamma_\mu \Xi\right), \tag{31.1.17}$$

а $\Xi(x,\theta)$ — суперполе, удовлетворяющее явно суперсимметричному условию

$$\left(\bar{\mathscr{D}}\mathscr{D}\right)\left(\bar{\mathscr{D}}\Xi\right) = 0. \tag{31.1.18}$$

Это можно увидеть, если вспомнить что, как было показано в разделе 26.7, условие киральности для X позволяет записать его в виде

$$X = \left(\bar{\mathscr{D}}\mathscr{D}\right)\Omega, \tag{31.1.19}$$

где Ω, в общем случае, является нелокальным суперполем. Используя (31.1.16), находим

$$\begin{aligned} \int d^4x\left[\Theta^\mu\left(\bar{\mathscr{D}}\gamma_\mu\Xi\right)\right]_D &= -\int d^4x\left[\left((\bar{\mathscr{D}}\Theta^\mu)\gamma_\mu\Xi\right)\right]_D = -\int d^4x\left[\left((\bar{\mathscr{D}}X)\Xi\right)\right]_D \\ &= +\int d^4x\left[\Omega\left(\bar{\mathscr{D}}\mathscr{D}\right)\left(\bar{\mathscr{D}}\Xi\right)\right]_D = 0, \end{aligned}$$

так что взаимодействие (31.1.15) инвариантно относительно преобразования $H_\mu \to H_\mu + (\bar{\mathscr{D}}\gamma_\mu\Xi)$. (Мы также можем получить этот результат, не используя представление (31.1.19) для X, заметив, что, как следует из уравнения (26.2.25), D-член произведения кирального суперполя, подобного X, удовлетворяющего уравнениям (26.3.1) и (26.3.2), и линейного суперполя, подобного $(\bar{\mathscr{D}}\Xi)$, удовлетворяющего уравнению (26.3.45), является пространственно-временной производной.)

В конце этого раздела мы покажем, что из уравнений (31.1.17) и (31.1.18) вытекают следующие условия на компоненты суперполя Δ_μ:

$$V^\Delta_{\mu\nu}(x) + V^\Delta_{\nu\mu}(x) = \frac{\partial v_\mu(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial v_\nu(x)}{\partial x^\mu} - 2\eta_{\mu\nu}\frac{\partial v^\lambda(x)}{\partial x^\lambda}, \tag{31.1.20}$$

$$\lambda^\Delta_\mu(x) - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma^\rho\lambda^\Delta_\rho(x) - \frac{1}{3}\gamma_\mu\partial^\rho\omega^\Delta_\rho(x) = \partial_\mu\chi(x), \tag{31.1.21}$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\kappa\sigma}\partial_\kappa V^\Delta_{\nu\mu}(x) = D^{\Delta\sigma}(x) + \partial^\sigma\partial^\rho C^\Delta_\rho(x), \tag{31.1.22}$$

$$\partial^\mu M^\Delta_\mu(x) = \partial^\mu N^\Delta_\mu(x) = 0, \tag{31.1.23}$$

где $v_\mu(x)$ — вещественное векторное поле, а $\chi(x)$ — майорановское спинорное поле. (Мы ввели здесь обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей главы; следуя уравнению (26.3.9), компоненты C^S, ω^S, M^S, N^S, V^S_ν, λ^S и D^S произвольного суперполя $S(x,\theta)$ определяются разложением

$$
\begin{aligned}
S(x,\theta) = {} & C^S(x) - i\left(\bar\theta\gamma_5\omega^S(x)\right) - \frac{i}{2}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)M^S(x) - \frac{1}{2}\left(\bar\theta\theta\right)N^S(x) \\
& + \frac{i}{2}\left(\bar\theta\gamma_5\gamma^\nu\theta\right)V^S_\nu(x) - i\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)\left(\bar\theta\left[\lambda^S(x) + \frac{1}{2}\not\partial\omega^S(x)\right]\right) \\
& - \frac{1}{4}\left(\bar\theta\gamma_5\theta\right)^2\left(D^S(x) + \frac{1}{2}\Box C^S(x)\right).
\end{aligned}
\tag{31.1.24}
$$

Кроме того, $V^\Delta_{\mu\nu}(x)$ — V_ν-компонента суперполя Δ_μ.) Это приводит к определению полей

$$
\varphi_{\mu\nu}(x) \equiv V^H_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}V^{H\lambda}{}_\lambda(x), \tag{31.1.25}
$$

$$
\frac{1}{2}\psi_\mu(x) \equiv \lambda^H_\mu(x) - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma^\rho\lambda^H_\rho(x) - \frac{1}{3}\gamma_\mu\partial^\rho\omega^H_\rho(x), \tag{31.1.26}
$$

$$
b^\sigma(x) \equiv D^{H\sigma}(x) + \frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\kappa\sigma}\partial_\kappa V^H_{\nu\mu}(x) + \partial^\sigma\partial^\rho C^H_\rho(x). \tag{31.1.27}
$$

(Как будет показано в разделе 31.3, множитель $1/2$ в левой части уравнения (31.1.26) вводится для того, чтобы поле ψ_μ было нормировано стандартным образом.) Из уравнений (31.1.20) и (31.1.21) следует, что преобразование (31.1.14) индуцирует на $\varphi_{\mu\nu}(x)$ и $\psi_\mu(x)$ калибровочные преобразования (31.1.9) и (31.1.13) с параметрами

$$
\xi_\mu = -2\kappa\, v_\mu, \quad \omega_{\mu\nu} = \kappa\left[-\frac{\partial v_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\mu} + V^\Delta_{\mu\nu} - V^\Delta_{\nu\mu}\right], \quad \psi = 2\chi, \tag{31.1.28}
$$

а из уравнения (31.1.22) следует, что $b_\mu(x)$ является инвариантным. Кроме того, уравнение (31.1.23) показывает, что преобразование (31.1.14) индуцирует добавки к $M^H_\mu(x)$ и $N^H_\mu(x)$, которые оставляют инвариантными поля

$$
s \equiv \partial^\mu M^H_\mu(x), \qquad p \equiv \partial^\mu N^H_\mu(x). \tag{31.1.29}
$$

Наконец, поскольку суперсимметрия не накладывает на $C^\Delta_\mu(x)$, $V^\Delta_{\mu\nu}(x) - V^\Delta_{\nu\mu}(x)$ и $\omega^\Delta_\mu(x)$ никаких условий, преобразование (31.1.14) позволяет придать компонентам $C^H_\mu(x)$, $V^H_{\mu\nu}(x) - V^H_{\nu\mu}(x) = \varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\nu\mu}$ и $\omega^H_\mu(x)$ любые удобные значения. В частности, по аналогии с калибровкой Весса–Зумино для калибровочных суперполей, рассмотренных в разделе 27.1, можно положить все компоненты $C^H_\mu(x)$, $V^H_{\mu\nu}(x) - V^H_{\nu\mu}(x) = \varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\nu\mu}$ и $\omega^H_\mu(x)$ равными нулю. Поля $h_{\mu\nu}(x)$ и $\psi_\mu(x)$ идентифицируются по их трансформационным свойствам как поля гравитона и гравитино соответственно, тогда как $b_\mu(x)$, $s(x)$ и $p(x)$ являются вспомогательными полями [4], что важно для понимания взаимодействия суперполя гравитона с материей.

Попутно заметим, что число независимых компонент симметричного тензора $h_{\mu\nu}$ по модулю калибровочных преобразований (31.1.12) равно $10-4=6$, что вместе со вспомогательными полями s, p и b_μ дает всего $6+6=12$ независимых физических бозонных полей, в то время как число компонент майорановского спинорного поля ψ_μ по модулю калибровочных преобразований (31.1.13) равно $16-4=12$. Это удовлетворяет введенному в конце раздела 26.2 условию, что в любом супермультиплете полей, реализующем представление алгебры суперсимметрии, должно содержаться равное число независимых бозонных и фермионных полевых компонент.

Вернемся к взаимодействию материи и гравитации. В общем случае, проинтегрированный D-член произведения двух суперполей Θ^μ и H_μ дается уравнением (26.2.25) в виде

$$\begin{aligned}\int d^4x\Big[\Theta^\mu H_\mu\Big]_D = \int d^4x\Big[&-\partial_\mu C^{H\sigma}\partial^\mu C^\Theta_\sigma + C^{H\sigma}D^\Theta_\sigma + D^{H\sigma}C^\Theta_\sigma \\ &-\Big(\bar\omega^{H\sigma}\big[\lambda^\Theta_\sigma + \frac{1}{2}\not\partial\omega^\Theta_\sigma\big]\Big) - \Big(\big[\bar\lambda^{H\sigma} + \frac{1}{2}\bar\omega^{H\sigma}\overleftarrow{\not\partial}\big]\omega^\Theta_\sigma\Big) \\ &+ M^{H\sigma}M^\Theta_\sigma + N^{H\sigma}N^\Theta_\sigma - V^{H\kappa\sigma}V^\Theta_{\kappa\sigma}\Big]. \end{aligned} \tag{31.1.30}$$

Используя уравнения (31.1.25)–(31.1.27), можно выразить $V^H_{\mu\nu}$, λ^H_μ и D^H_μ через $\varphi_{\mu\nu}$, ψ_μ и b_μ соответственно, и найти

$$\begin{aligned} I_{\rm int} &= 2\kappa\int d^4x\Big[\Theta^\mu H_\mu\Big]_D \\ &= 2\kappa\int d^4x\Big[C^{H\sigma}\Big[\Box C^\Theta_\sigma - \partial_\sigma\partial^\rho C^\Theta_\rho + D^\Theta_\sigma\Big] + b^\sigma C^\Theta_\sigma \\ &\quad + \Big(\bar\omega^{H\sigma}\Big[-\lambda^\Theta_\sigma - \not\partial\omega^\Theta_\sigma + \partial_\sigma\gamma^\rho\omega^\Theta_\rho\Big]\Big) - \Big(\bar\psi^\sigma\omega^\Theta_\sigma\Big) + \Big(\bar\psi^\sigma\gamma_\sigma\gamma^\rho\Omega^\Theta_\rho\Big) \\ &\quad + M^{H\sigma}M^\Theta_\sigma + N^{H\sigma}N^\Theta_\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\kappa\sigma}\varphi_{\nu\mu}\partial_\kappa C^\Theta_\sigma - \varphi^{\lambda\sigma}\Big[V^\Theta_{\lambda\sigma} - \eta_{\lambda\sigma}V^{\Theta\rho}{}_\rho\Big]\Big]. \end{aligned} \tag{31.1.31}$$

Мы видели в разделе 26.7, что закон сохранения (31.1.16) приводит к условиям (26.7.44), (26.7.39) и (26.7.35):

$$D^\Theta_\mu = -\Box C^\Theta_\mu + \partial_\mu \partial^\nu C^\Theta_\nu,$$
$$\lambda^\Theta_\nu = -\partial\!\!\!/ \omega^\Theta_\nu + \partial_\nu \gamma^\mu \omega^\Theta_\mu,$$
$$0 = V^\Theta_{\mu\nu} - V^\Theta_{\nu\mu} + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\sigma C^{\Theta\rho},$$

из которых соответственно следует, что все коэффициенты в уравнении (31.1.31) при $C^{H\sigma}$, $\bar{\omega}^{H\sigma}$ и антисимметричной части $\varphi^{\mu\nu}$ равны нулю. Кроме того, можно записать оставшиеся члены в (31.1.31) через ток суперсимметрии (26.7.20), тензор энергии-импульса (26.7.42), $\mathcal{R}$-ток (26.7.51):

$$S^\mu_{\text{новый}} = -2\omega^{\Theta\mu} + 2\gamma^\mu\gamma^\nu\omega^\Theta_\nu,$$
$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}V^\Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}V^\Theta_{\nu\mu} + \eta_{\mu\nu}V^{\Theta\lambda}{}_\lambda,$$
$$\mathcal{R}^\mu = 2C^{\Theta\mu},$$

и плотности $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, определённые уравнениями

$$M^\Theta_\mu = \partial_\mu \mathcal{M}, \qquad N^\Theta_\mu = \partial_\mu \mathcal{N}, \tag{31.1.32}$$

и задаваемые уравнениями (26.7.33) и (26.7.34) как

$$\mathcal{N} = -A^X, \qquad \mathcal{M} = B^X. \tag{31.1.33}$$

Здесь X — действительное киральное суперполе, появляющееся в правой части закона сохранения (31.1.16). (Индекс «новый» у тока суперсимметрии будет объяснен в этой главе.) Взаимодействие первого порядка между материей и компонентами суперполя метрики теперь записывается в следующем виде

$$2\kappa \int d^4x \left[\Theta^\mu H_\mu\right]_D = \kappa \int d^4x \left[\mathcal{R}_\sigma b^\sigma + \frac{1}{2}\bar{S}^\sigma \psi_\sigma - 2\mathcal{M}s - 2\mathcal{N}p + T^{\kappa\sigma}h_{\sigma\kappa}\right]. \tag{31.1.34}$$

Мы замечаем, что поле гравитино взаимодействует с током суперсимметрии во многом подобно тому, как гравитационное поле взаимодействует с тензором энергии-импульса.

Теперь можно проверить правильность выбора постоянного множителя, появляющегося в этом взаимодействии. При обычном определении $T^{\mu\nu}$ вариация действия материи при изменении метрики $\delta g_{\mu\nu}$ имеет вид [5]

$$\delta I_M = \frac{1}{2}\int d^4x \sqrt{\operatorname{Det} g}\, T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.$$

Взаимодействие материи и слабого гравитационного поля, задаваемого (31.1.10), теперь записывается как

$$\kappa \int d^4x T^{\mu\nu}(x) h_{\mu\nu}(x),$$

что совпадает с зависящей от $h_{\mu\nu}$ частью в уравнении (31.1.34) и подтверждает правильность нормировки взаимодействия (31.1.15).

* * *

Проверим теперь, что из уравнений (31.1.17) и (31.1.18) следуют условия (30.1.20)–(30.1.23). Суперполе $\Upsilon \equiv \left(\bar{\mathscr{D}}\Xi\right)$ имеет компоненты

$$\begin{aligned}
C^{\Upsilon} &= -i\,\mathrm{Tr}\,(\varepsilon\omega^{\Xi}),\\
\omega^{\Upsilon} &= -i\gamma_5\,\partial\!\!\!/ C^{\Xi} + M^{\Xi} - i\gamma_5 N^{\Xi} + V\!\!\!/^{\Xi},\\
M^{\Upsilon} &= -\mathrm{Tr}\,(\varepsilon\gamma_5\lambda^{\Xi}),\\
N^{\Upsilon} &= i\,\mathrm{Tr}\,(\varepsilon\lambda^{\Xi}),\\
V_\nu^{\Upsilon} &= -\mathrm{Tr}\,(\varepsilon\gamma_5\lambda_\nu\lambda^{\Xi}) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\varepsilon\gamma_5[\gamma_\nu, \partial\!\!\!/]\lambda^{\Xi}),\\
\lambda^{\Upsilon} &= -\partial\!\!\!/ M^{\Xi} - i\gamma_5\,\partial\!\!\!/ N^{\Xi} - i\gamma_5(D^{\Xi} + \Box C^{\Xi}) - \partial_\nu V^{\Xi\nu},\\
D^{\Upsilon} &= i\,\mathrm{Tr}\,(\varepsilon\,\partial\!\!\!/\lambda^{\Xi}) + i\,\mathrm{Tr}\,(\varepsilon\Box\omega^{\Xi}),
\end{aligned}$$

а условие (31.1.18) дает

$$M^{\Upsilon} = N^{\Upsilon} = D^{\Upsilon} + \Box C^{\Upsilon} = \partial^\lambda V_\lambda^{\Upsilon} = \lambda^{\Upsilon} + \partial\!\!\!/\omega^{\Upsilon} = 0.$$

Из равенства нулю M^{Υ} и N^{Υ} следует, что λ^{Ξ} является линейной комбинацией вида

$$\lambda^{\Xi}\varepsilon = f_\mu\gamma^\mu + g_\mu\gamma_5\gamma^\mu + k_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \tag{31.1.35}$$

Равенство нулю $\partial^\lambda V_\lambda^{\Upsilon}$ и $D^{\Upsilon} + \Box C^{\Upsilon}$ тогда дает

$$\partial_\mu f^\mu = \partial_\mu g^\mu = 0. \tag{31.1.36}$$

Кроме того, из равенства нулю $\lambda^{\Upsilon} + \partial\!\!\!/\omega^{\Upsilon}$ вытекает, что

$$D^{\Xi} = \frac{i}{2}\gamma_5[\gamma^\nu, \partial\!\!\!/]V_\nu^{\Xi}. \tag{31.1.37}$$

Компоненты $\Delta_\mu(x, \theta)$ имеют вид

$$C_\mu^{\Delta} = i\,\mathrm{Tr}\,(\varepsilon\gamma_5\gamma_\mu\omega^{\Xi}), \tag{31.1.38}$$

$$\omega_\mu^\Delta = i\,\partial\!\!\!/\gamma_\mu C^\Xi + \gamma_5\gamma_\mu M^\Xi - i\gamma_\mu N^\Xi + \gamma_5\gamma^\rho\gamma_\mu V_\rho^\Xi, \tag{31.1.39}$$

$$M_\mu^\Delta = -\mathrm{Tr}\,(\epsilon\gamma_\mu\lambda^\Xi), \tag{31.1.40}$$

$$N_\mu^\Delta = i\,\mathrm{Tr}\,(\epsilon\gamma_5\gamma_\mu\lambda^\Xi), \tag{31.1.41}$$

$$V_{\mu\nu}^\Delta = \mathrm{Tr}\,(\epsilon\gamma_\nu\gamma_\mu\lambda^\Xi) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\epsilon[\gamma_\nu, \partial\!\!\!/]\gamma_\mu\omega^\Xi), \tag{31.1.42}$$

$$\lambda_\mu^\Delta = \gamma_5\,\partial\!\!\!/\gamma_\mu M^\Xi + i\,\partial\!\!\!/\gamma_\mu N^\Xi - i\gamma_\mu(D^\Xi + \Box C^\Xi) + \gamma_5\gamma_\mu\partial^\nu V_\nu^\Xi, \tag{31.1.43}$$

$$D_\mu^\Delta = i\,\mathrm{Tr}\,(\epsilon\,\partial\!\!\!/\gamma_5\lambda^\Xi) + i\Box\mathrm{Tr}\,(\epsilon\gamma_5\gamma_\mu\omega^\Xi). \tag{31.1.44}$$

Симметричная часть уравнения (31.1.42) дает условие (31.1.20) при

$$v_\mu = -\mathrm{Tr}\,(\epsilon\gamma_\mu\omega^\Xi) + \text{constant}\,. \tag{31.1.45}$$

Линейная комбинация уравнений (31.1.39) и (31.1.43) дает условие (31.1.21) при

$$\chi = 2\gamma_5 M^\Xi + 2iN^\Xi + \text{constant}\,. \tag{31.1.46}$$

Затем мы используем антисимметричную часть уравнения (31.1.42) вместе с уравнениями (31.1.37), (31.1.38) и тождествами

$$[\gamma_\nu, \gamma_\rho]\gamma_\mu - [\gamma_\mu, \gamma_\rho]\gamma_\nu = 2\eta_{\mu\rho}\gamma_\nu - 2\eta_{\nu\rho}\gamma_\mu + 2i\epsilon_{\nu\rho\mu\lambda}\gamma_5\gamma^\lambda,$$
$$\epsilon^{\nu\mu\kappa\sigma}[\gamma_\nu, \gamma_\mu] = 2i\gamma_5[\gamma^\kappa, \gamma^\sigma],$$

и находим условие (31.1.22). Наконец, уравнения (31.1.40) и (31.1.41) вместе с (31.1.35) и (31.1.36) приводят к условию (31.1.23).

31.2. Гравитационное действие

Чтобы найти подходящее гравитационное действие, следует построить суперполе, инвариантное относительно обобщенного калибровочного преобразования $H_\mu \to H_\mu + \Delta_\mu$. В качестве исходного пункта вспомним, что поле b_μ, определенное уравнением (31.1.27), инвариантно относительно этого преобразования. Делая последовательные преобразования суперсимметрии, видим, что b_μ — C-компонента «эйнштейновского» суперполя E_μ, с компонентами

$$C_\mu^E = b_\mu, \tag{31.2.1}$$

$$\omega_\mu^E = \frac{3}{2}L_\mu - \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma^\nu L_\nu, \tag{31.2.2}$$

$$M_\mu^E = \partial_\mu s, \qquad N_\mu^E = \partial_\mu p, \tag{31.2.3}$$

$$V_{\mu\nu}^E = -\frac{3}{2}E_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}E^\rho{}_\rho + \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\mu\sigma\rho}\partial^\sigma b^\rho, \tag{31.2.4}$$

$$\lambda_\mu^E = \partial_\mu\gamma^\nu\omega_\nu^E - \not\partial\omega_\mu^E, \tag{31.2.5}$$

$$D_\mu^E = \partial_\mu\partial^\nu b_\nu - \Box b_\mu, \tag{31.2.6}$$

где $E_{\mu\nu}$ — линеаризованный тензор Эйнштейна

$$E_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\partial_\nu h^\lambda{}_\lambda + \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\lambda h_{\lambda\nu} - \\ - \partial_\nu\partial^\lambda h_{\lambda\mu} - \eta_{\mu\nu}\Box h^\lambda{}_\lambda + \eta_{\mu\nu}\partial^\lambda\partial^\rho h_{\lambda\rho}\Big), \tag{31.2.7}$$

а

$$L^\nu \equiv i\varepsilon^{\nu\mu\kappa\rho}\gamma_5\gamma_\mu\partial_\kappa\psi_\rho. \tag{31.2.8}$$

Последнее выражение, как будет показано в разделе 31.3, является левой частью волнового уравнения для свободного безмассового поля спина $3/2$. Например, применяя преобразования суперсимметрии (26.2.11), (26.2.15) и (26.2.17) для компонент C^H, V_μ^H и D^H к уравнениям (31.2.1) и (31.1.27), находим

$$\delta C^{E\sigma} = i\Big(\bar{\alpha}\gamma_5\Big[\not\partial\lambda^{H\sigma} - \frac{1}{2}i\varepsilon^{\nu\mu\kappa\sigma}\gamma_5\gamma_\mu\partial_\kappa\lambda_\nu^H + \partial^\sigma\partial^\kappa\omega_\kappa{}^H\Big]\Big).$$

Сравнение этого преобразования с законом преобразования (26.2.11) для компоненты C^E показывает, что

$$\omega^{E\sigma} = \not\partial\lambda^{H\sigma} - \frac{1}{2}i\varepsilon^{\nu\mu\kappa\sigma}\gamma_5\gamma_\mu\partial_\kappa\lambda_\nu^H + \partial^\sigma\partial^\kappa\omega_\kappa{}^H.$$

Мы можем использовать уравнение (31.1.26), чтобы выразить λ_μ^H через ψ_μ и ω_μ^H:

$$\lambda_\mu^H = \psi_\mu - \gamma_\mu\gamma^\rho\psi_\rho - \gamma_\mu\partial^\rho\omega_\rho^H,$$

и выяснить, что ω_σ^H может быть выражено только через ψ_σ:

$$\omega_\sigma^E = \not\partial\psi_\sigma - \partial_\sigma\gamma^\rho\psi_\rho - \frac{1}{2}i\varepsilon_{\nu\mu\kappa\sigma}\gamma_5\gamma^\mu\partial^\kappa\psi^\nu.$$

Применяя тождество

$$\eta_{\mu\nu}\gamma_\lambda - \eta_{\mu\lambda}\gamma_\nu = i\varepsilon_{\mu\lambda\nu\rho}\gamma_5\gamma^\rho - \frac{1}{2}i\gamma_\mu\gamma^\sigma\varepsilon_{\sigma\lambda\nu\rho}\gamma_5\gamma^\rho,$$

получаем уравнение (31.2.2) для ω^E_μ. Продолжая выкладки аналогичным образом, можно найти остальные формулы (31.2.3)–(31.2.6) для компонент E_μ и убедиться, что эти компоненты образуют вещественное суперполе.

Теперь мы можем построить квадратичное действие для суперполя метрики, инвариантное как относительно суперсимметрии, так и относительно расширенных калибровочных преобразований $H_\mu \to H_\mu + \Delta_\mu$, выбрав следующую плотность лагранжиана:

$$\mathscr{L}_E = \frac{4}{3}\left(E_\mu H^\mu\right)_D = E_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu L^\mu - \frac{4}{3}(s^2 + p^2 - b_\mu b^\mu). \tag{31.2.9}$$

Множитель $4/3$ выбран, чтобы придать кинематическому лагранжиану для поля гравитона стандартный знак и нормировку: помимо членов, включающих $\partial^\mu h_{\mu\nu}$ или $h^\lambda{}_\lambda$, это сумма лагранжианов Клейна–Гордона для компонент $h_{\mu\nu}$. Нормировка поля гравитино обсуждается в следующем разделе.

Чтобы убедиться в инвариантности первых двух членов окончательного выражения (31.2.9) при калибровочных преобразованиях (31.1.12) и (31.1.13), заметим, что $E_{\mu\nu}$ и L_μ явно инвариантны при этих преобразованиях, а действие симметрично по отношению к возникающим в этих слагаемых парам множителей $h_{\mu\nu}$ и ψ_μ. Отсутствие в (31.2.9) производных от s, p и b_μ показывает, что эти поля являются вспомогательными. Уравнения поля требуют обращения их в нуль для чистой гравитации, но не в случае взаимодействия гравитации с материей.

Перед переходом к взаимодействию материи и гравитации, прервем изложение, чтобы определить, какое значение следует придать нормировочной константе κ в уравнениях (31.1.5) и (31.1.10). Действие Эйнштейна–Гильберта для чисто гравитационного поля имеет вид

$$I_{\text{грав}} = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\ \sqrt{g}R, \tag{31.2.10}$$

где G — ньютоновская гравитационная постоянная, $g(x)$ — определитель метрического тензора $g_{\mu\nu}(x)$, а $R(x)$ — скалярная кривизна, вычисленная по $g_{\mu\nu}(x)$. Чтобы вычислить $I_{\text{грав}}$ для слабого гравитационного поля $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\kappa h_{\mu\nu}$, вспомним, что при произвольной вариации $\delta g_{\mu\nu}(x)$ гравитационного поля [6]

$$\delta I_{\text{грав}} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\ \sqrt{g}\left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\,R\right]\,\delta g_{\mu\nu}, \tag{31.2.11}$$

где $R^{\mu\nu}(x)$ — тензор Риччи, вычисленный по $g_{\mu\nu}(x)$. В случае слабого поля $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\kappa h_{\mu\nu}$ тензор Риччи записывается как [7]

$$R^{\mu\nu} = \kappa\left(\Box h^{\mu\nu} - \partial_\lambda\partial^\mu h^{\lambda\nu} - \partial_\lambda\partial^\nu h^{\lambda\mu} + \partial^\mu\partial^\nu h^\lambda{}_\lambda\right). \tag{31.2.12}$$

Таким образом, для слабого поля

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 2\kappa E^{\mu\nu}, \tag{31.2.13}$$

поэтому из уравнения (31.2.10) следует

$$\delta I_{\text{грав}} = \frac{\kappa^2}{4\pi G}\int d^4x E^{\mu\nu}\,\delta h_{\mu\nu}.$$

С другой стороны, принимая во внимание симметричность квадратичного функционала $\int d^4x E_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$ относительно содержащихся в нем двух множителей h, получаем

$$\delta\int d^4x E^{\mu\nu}\,h_{\mu\nu} = 2\int d^4x E^{\mu\nu}\,\delta h_{\mu\nu}.$$

Поэтому, для того, чтобы член $E_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$ в уравнении (31.2.9) привел к обычной гравитационной плотности лагранжиана, необходимо выбрать

$$\kappa = \sqrt{8\pi G}. \tag{31.2.14}$$

Объединим теперь эйнштейновскую плотность лагранжиана (31.2.9) с взаимодействием (31.1.34) между гравитацией и материей и лагранжианом материи $\mathscr{L}_M$, чтобы образовать полный лагранжиан

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \mathscr{L}_M + E_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu L^\mu - \frac{4}{3}(s^2+p^2-b_\mu b^\mu)\\ + 2\kappa\left[\frac{1}{2}\mathscr{R}_\sigma b^\sigma + \frac{1}{4}\bar{S}^\sigma\psi_\sigma - \mathscr{M}s - \mathscr{N}p + \frac{1}{2}T^{\kappa\sigma}h_{\sigma\kappa}\right].\end{aligned} \tag{31.2.15}$$

Уравнения поля для вспомогательных полей дают

$$s = -6\kappa\mathscr{M}/8, \qquad p = -6\kappa\mathscr{N}/8, \qquad b_\mu = -6\kappa\mathscr{R}_\mu/16. \tag{31.2.16}$$

Воспользуемся этим, чтобы устранить вспомогательные поля. Теперь плотность лагранжиана (31.2.15) принимает вид

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_M + E_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu L^\mu + \frac{3}{4}\kappa^2(\mathscr{M}^2+\mathscr{N}^2 - \frac{1}{4}\mathscr{R}_\mu\mathscr{R}^\mu) + \frac{1}{2}\kappa\bar{S}^\sigma\psi_\sigma + \kappa T^{\kappa\sigma}h_{\sigma\kappa}. \tag{31.2.17}$$

Источники полей ψ_μ и $h_{\mu\nu}$ имеют порядок κ, поэтому мы можем приписать этим полям тот же порядок, благодаря чему все члены, за исключением $\mathscr{L}_M$, в (31.2.17) оказываются порядка κ^2.

Только скалярные поля s и p могут иметь ненулевые вакуумные средние в древесном приближении, создавая плотность энергии вакуума порядка G:

$$\rho_{\text{VAC}} = -\mathscr{L}_{\text{VAC}} = -\mathscr{L}_{M\ \text{VAC}} - \frac{3}{4}\kappa^2(\mathscr{M}^2+\mathscr{N}^2). \tag{31.2.18}$$

Отрицательный знак члена первого порядка по G в вакуумной плотности энергии — характерное различие между супергравитацией и обычной суперсимметрией.

Например, в теории одного левокирального суперполя Φ с суперпотенциалом $f(\Phi)$ вакуумная энергия нулевого порядка определяется как $-\mathcal{L}_{M\ \mathrm{VAC}} = |df(\varphi)/d\varphi|^2$, при этом уравнения (31.1.33) и (26.7.27) дают

$$\mathcal{M} + i\mathcal{N} = -\frac{1}{3}\left[\varphi\frac{df(\varphi)}{d\varphi} - 3f(\varphi)\right].$$

Таким образом, полная вакуумная энергия до первого порядка по G равна

$$\rho_{VAC} = \left|\frac{df(\varphi)}{d\varphi}\right|^2 - \frac{8\pi G}{3}\left|\varphi\frac{df(\varphi)}{d\varphi} - 3f(\varphi)\right|^2, \tag{31.2.19}$$

где φ — скалярная компонента Φ. Это верно при определении метрики, когда тензор энергии-импульса задан уравнением (26.7.42), так что, в частности, $T^\lambda{}_\lambda$ обращается в нуль при $f = 0$. Для других определений вакуумная энергия изменилась бы на величину порядка $8\pi G|\varphi|^2|df(\varphi)/d\varphi|^2$. Однако эта неоднозначность не важна при вычислении минимального значения вакуумной энергии. Рассмотрение уравнения (31.2.19) показывает, что если функция $f(\varphi)$ стационарна в некоторой точке φ_0, то ρ_{VAC} имеет локальный минимум для $|\varphi - \varphi_0|$ и $|df/d\varphi|$ первого порядка по G. В любой такой точке вакуумная энергия до первого порядка по G определяется выражением

$$\rho_{\mathrm{VAC}} = -24\pi G|f(\varphi_0)|^2. \tag{31.2.20}$$

Существует алгебраическая причина, по которой вакуумные состояния с ненарушенной суперсимметрией в теориях супергравитации не могут иметь положительную плотность энергии. Решения полевых уравнений Эйнштейна для однородной ненулевой вакуумной плотности энергии ρ_V принимают форму пространства де Ситтера для $\rho_V > 0$ и пространства анти-де-Ситтера для $\rho_V < 0$. Эти пространства могут быть описаны как поверхности

$$x_5^2 \pm \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = R^2, \tag{31.2.21}$$

в псевдоевклидовом пятимерном пространстве с элементом длины

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu \pm dx_5^2. \tag{31.2.22}$$

Верхний знак берется для пространства де Ситтера, а нижний — для пространства анти-де-Ситтера. Пространственно-временная симметрия этих пространств — уже не группа Пуанкаре, состоящая из трансляций и преобразований Лоренца, а группа $O(4,1)$ для пространства де Ситтера и $O(3,2)$ для пространства анти-де-Ситтера, где $O(n,m)$ — группа линейных преобразований, оставляющих неизменной диагональную метрику, содержащую n положительных и m отрицательных элементов на главной диагонали. Ненарушенная суперсимметрия в теориях с де-ситтеровским или анти-де-ситтеровским вакуумным состоянием имеет поэтому в качестве группы пространственно-временных симметрий простую группу $O(4,1)$ или $O(3,2)$ соответственно в качестве группы пространственно-временных симметрий. Все суперсимметрии с простыми пространственно-временными симметриями были классифицированы Намом [7a]. Существуют простые $O(3,2)$ суперсимметрии, также как и N-расширенные $O(3,2)$ суперсимметрии, но для $O(4,1)$ существует только $N=2$ суперсимметрия. Мы рассматриваем здесь $N=1$ теории супергравитации. Таким образом, эти теории могут иметь вакуумные состояния с ненарушенной суперсимметрией и $\rho_V<0$, что дает пространственно-временную симметрию $O(3,2)$, но не могут иметь вакуумные состояния с ненарушенной суперсимметрией и $\rho_V>0$, что приводило бы к пространственно-временной симметрии $O(4,1)$.

На первый взгляд может показаться, что возможность вакуумных полевых конфигураций с отрицательной плотностью энергии угрожает стабильности нашей Вселенной. В общем случае $f(\varphi)$ имеет несколько стационарных точек, в которых эта функция принимает различные значения. Даже если мы подберем параметры функции $f(\varphi)$ так, что $f(\varphi)$ равняется нулю в одной из этих стационарных точек, ответственной за практически плоское пространство нашей Вселенной, любая другая стационарная точка с ненулевым значением $f(\varphi)$ даст *меньшую* вакуумную энергию, создавая возможность коллапса в состояние с отрицательной плотностью энергии и метрикой, имеющей анти-де-ситтеровскую форму вместо плоской.

К счастью, значение (31.2.20) недостаточно для того, чтобы компенсировать положительную энергию, которая должна переходить в поверхностное натяжение при образовании пузыря пространства анти-де-Ситтера в плоском пространстве, так что переход от обычного плоского пространства к пространству анти-де-Ситтера является энергетически невыгодным. Коулмен и де Луччиа [8] применили уравнения общей теории относительности к пузырю с отрицательной внутренней плотностью энергии $-\varepsilon$ и положительным поверхностным натяжением S в плоском пространстве с нулевой плотностью энергии. Они показали, что любой такой пузырь, который не связан с гравитационными сингулярностями, будет иметь положительную энергию, если

$$\varepsilon \leqslant 6\pi G S^2. \tag{31.2.23}$$

Поверхностное натяжение — это энергия поверхности пузыря на единицу площади, задаваемая в нулевом порядке по G интегралом плотности энергии, взятым поперек стенки пузыря:

$$S_1 = \int_{r_-}^{r^+} dr \left[\left| \frac{d\varphi}{dr} \right|^2 + \left| \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \right|^2 \right], \tag{31.2.24}$$

где r_- и r_+ взяты на небольшом расстоянии от стенки пузыря внутри и снаружи. Это выражение может быть переписано как

$$S_1 = \int_{r_-}^{r^+} dr \left[\left| \frac{d\varphi}{dr} + \xi \left(\frac{df(\varphi)}{d\varphi} \right)^* \right|^2 - 2\mathrm{Re} \left(\xi^* \frac{d\varphi}{dr} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \right) \right],$$

где ξ — произвольный фазовый множитель $|\xi| = 1$. Интеграл от второго члена очевиден: поскольку мы предполагаем, что $\varphi(r_+)$ принимает значение, для которого $f(\varphi)$ стационарно и равно нулю, а $\varphi(r_-)$ принимает некоторое значение φ_0, для которого $f(\varphi)$ стационарно, но не равно нулю, интеграл имеет вид

$$\int_{r_-}^{r^+} dr \frac{d\varphi}{dr} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = -f(\varphi_0).$$

Чтобы максимизировать этот член, выбираем $\xi = f(\varphi_0)/|f(\varphi_0)|$ и получаем неравенство [9]

$$S_1 \geqslant 2|f(\varphi_0)|, \tag{31.2.25}$$

причем равенство достигается, только если (как обычно бывает) существует решение дифференциального уравнения $d\varphi/dr = -\xi(df/d\varphi)^*$ с соответствующими граничными условиями. Таким образом, неравенство (31.2.23) выполняется, если плотность внутренней энергии не меньше, чем $-24\pi G|f(\varphi_0)|^2$, что в точности соответствует значению (31.2.20). Эти вычисления оставляют открытой возможность обусловленной радиационными поправками нестабильности плоского пространства, но читатель не должен беспокоиться: доказано, что в теориях супергравитации, в которых существует вакуумная полевая конфигурация с нулевой вакуумной энергией, энергия любого возмущения полей, ограниченного конечной областью, положительна [10].

* * *

Уравнение (26.7.48) показывает, что тензор энергии-импульса для набора левокиральных суперолей Φ_n содержит член

$$\Delta T^{\mu\nu} = \frac{1}{3} \left(\eta^{\mu\nu} \Box - \partial^\mu \partial^\nu \right) \sum_n |\varphi_n|^2. \tag{31.2.26}$$

Интегрирование по частям соответствующего взаимодействия $\kappa h_{\mu\nu}\Delta T^{\mu\nu}$ дает вклад в действие вида

$$\frac{\kappa}{3}\int d^4x \sum_n |\varphi_n|^2 \left(\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu\right) h_{\mu\nu} = \frac{1}{6}\int d^4x R^{(1)} \sum_n |\varphi_n|^2, \tag{31.2.27}$$

где $R^{(1)}$ — скалярная кривизна в линейном приближении. Этот вклад добавляется к обычному действию Эйнштейна–Гильберта $-\int d^4x\sqrt{g}R/2\kappa^2$ (которое появляется в уравнении (31.2.17) как член $E_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$) и приводит к замене коэффициента в этом члене на

$$-\frac{1}{2\kappa^2} + \frac{1}{6}\sum_n |\varphi_n|^2 = -\frac{1}{2\kappa^2}\left(1 - \frac{\kappa^2}{3}\sum_n |\varphi_n|^2\right). \tag{31.2.28}$$

Чтобы восстановить обычную гравитационную постоянную, мы можем подвергнуть метрику *преобразованию Вейля*, заменяя тетраду $e^a{}_\mu$ на

$$\tilde{e}^a{}_\mu = e^a{}_\mu \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{3}\sum_n |\varphi_n|^2}. \tag{31.2.29}$$

Иначе говоря, мы заменяем метрику $g_{\mu\nu}$ на

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \left(1 - \frac{\kappa^2}{3}\sum_n |\varphi_n|^2\right) g_{\mu\nu}, \tag{31.2.30}$$

или, для слабого поля,

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{6}\sum_n |\varphi_n|^2 \eta_{\mu\nu}. \tag{31.2.31}$$

Тензор Эйнштейна в приближении слабого поля (31.2.7) для новой метрики

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial\nu\tilde{h}^\lambda{}_\lambda + \Box\tilde{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\lambda\tilde{h}_{\lambda\nu} - \partial_\nu\partial^\lambda\tilde{h}_{\lambda\mu} - \eta_{\mu\nu}\Box\tilde{h}^\lambda{}_\lambda + \eta_{\mu\nu}\partial^\lambda\partial^\rho\tilde{h}_{\lambda\rho}\right) \\ &= E_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{6}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\Box\right)\sum_n |\varphi_n|^2.\end{aligned} \tag{31.2.32}$$

Сумма эйнштейновского члена в исходном действии и члена (31.2.27) имеет поэтому вид

$$\begin{aligned}&\int d^4x\left[h_{\mu\nu}E^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{3}\sum_n |\varphi_n|^2\left(\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu\right)h_{\mu\nu}\right] \\ &= \int d^4x\left[\tilde{h}_{\mu\nu}\tilde{E}^{\mu\nu} + \frac{\kappa^2}{12}\left(\partial_\mu\sum_n |\varphi_n|^2\right)\left(\partial^\mu\sum_n |\varphi_n|^2\right)\right],\end{aligned} \tag{31.2.33}$$

так что эффективная гравитационная постоянная теперь действительно является постоянной. Это переопределение метрики порождает также изменение потенциала. Исходная плотность лагранжиана содержала член $-e\sum_n |\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n|^2$, который с помощью новой тетрады переписывается в виде

$$-e\sum_n |\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n|^2 = -\tilde{e}\sum_n |\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n|^2 - \frac{2\kappa^2}{3}\left(\sum_n |\varphi_n|^2\right)\sum_n |\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n|^2.$$

С учетом нового определения метрики, потенциал (31.2.19) заменяется на

$$\rho_{\mathrm{VAC}} = \sum_n \left|\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right|^2 - \frac{\kappa^2}{3}\left|\sum_n \varphi_n \frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n} - 3f(\varphi)\right|^2 + \frac{2\kappa^2}{3}\left(\sum_n |\varphi_n|^2\right)^2 \sum_n \left|\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\right|^2. \tag{31.2.34}$$

Новый член не меняет значения ρ_{VAC} в стационарной точке до порядка κ^2, так что предшествующее обсуждение стабильности вакуума остается без изменений.

31.3. Гравитино

В этом разделе мы будем использовать приближение слабого поля, развитое в разделах 31.1–31.2, чтобы вывести некоторые свойства гравитино. В частности, используя соображения непрерывности при $G \to 0$, мы получим формулу для массы гравитино при спонтанном нарушении суперсимметрии, которая верна до первого порядка по G и во всех порядках по всем остальным взаимодействиям. (Исторически первый вывод этой формулы будет дан в разделе 31.6.)

Сначала нужно проверить, что член $-\frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu L^\mu$ в уравнении (31.2.9) — правильный лагранжиан для свободного поля безмассовой зарядово самосопряженной частицы спина 3/2. Проверенный временем подход к построению подходящего лагранжиана свободного поля для частиц со спином — угадать лагранжиан и затем проверить, что он дает физически удовлетворительные уравнения поля и пропагатор. Этот подход ведет к некоторой неопределенности для частиц спина 3/2, например, то выражение, которое в статьях по суперсимметрии обычно называют лагранжианом Рариты–Швингера, не соответствует первоначально предложенному Раритой и Швингером лагранжиану [11]. Здесь мы будем следовать подходу в духе раздела 6.2: для массивной частицы спина 3/2 сначала выведем выражение пропагатора из требований лоренц-инвариантности, а затем обратим пропагатор, чтобы найти лагранжиан. Мы работаем здесь с массивными гравитино ради простоты, а также потому, что в реальном мире следует принимать во внимание нарушение суперсимметрии. Однако полученные этим путем результаты можно применить и к случаю безмассовых гравитино, заметив, что сохранение тока суперсимметрии делает сингулярности нулевой массы в пропагаторе несущественными.

Спинорное поле ψ^μ с дополнительным векторным индексом принадлежит к представлению $[(\frac{1}{2},0)+(0,\frac{1}{2})]\times(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ однородной группы Лоренца. Чтобы выделить $(1,\frac{1}{2})+(\frac{1}{2},1)$ часть свободного поля, налагаем условие неприводимости

$$\gamma_\mu \psi^\mu = 0. \tag{31.3.1}$$

Из инвариантности относительно вращений и из уравнения (31.3.1) следует, что матричные элементы этого поля между вакуумом и состоянием массивной частицы спина $3/2$, импульсом $\mathbf{q}=0$ и z-компонентой спина s будут удовлетворять условиям

$$\langle 0|\psi^0(0)|s\rangle = 0 \tag{31.3.2}$$

и

$$\sum_{s=-3/2}^{3/2} \langle 0|\psi^i(0)|s\rangle\langle 0|\psi^j(0)|s\rangle^* \propto \delta_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_i\gamma_j \tag{31.3.3}$$

с коэффициентом, который может зависеть от инвариантной относительно вращений матрицы $\beta \equiv i\gamma_0$. Используя обычное дираковское соглашение $\beta\langle 0|\psi^i(0)|s\rangle = \langle 0|\psi^i(0)|s\rangle$ (которое выбирается, чтобы упростить преобразование поля при пространственной инверсии) и стандартный выбор нормировки компоненты с $\beta=+1$, аналогичный (5.5.23), можно записать уравнение (31.3.3) как

$$\sum_{s=-3/2}^{3/2} \langle 0|\psi^i(0)|s\rangle\langle 0|\psi^j(0)|s\rangle^* = (2\pi)^{-3}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\left[\delta_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_i\gamma_j\right]. \tag{31.3.4}$$

Отсюда следует, что пропагатор в пространстве импульсов для частицы спина $3/2$ и массы m_g принимает вид

$$\Delta^{\mu\nu}(q) = \frac{P^{\mu\nu}(q)}{q^2+m_g^2-i\varepsilon}, \tag{31.3.5}$$

где $P^{\mu\nu}(q)$ — лоренц-ковариантный полином от четырехмерного вектора q, который при $\mathbf{q}=0$ и $q^0=m_g$ удовлетворяет условию

$$P^{ij} = \left(\frac{1+\beta}{2}\right)\left[\delta_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_i\gamma_j\right], \qquad P^{i0}=P^{0i}=P^{00}=0. \tag{31.3.6}$$

Если не принимать во внимание возможные члены, равные нулю на массовой поверхности (эффект которых поэтому был бы тот же, что и для прямого ток-токового взаимодействия), то единственная ковариантная функция с такими предельными значениями имеет вид

$$P^{\mu\nu}(q) = \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_g^2}\right)\left(-i\not{q}+m_g\right) - \frac{1}{3}\left(\gamma^\mu - i\frac{q^\mu}{m_g}\right)\left(i\not{q}+m_g\right)\left(\gamma^\nu - i\frac{q^\nu}{m_g}\right). \tag{31.3.7}$$

(Разность между (31.3.7) и любой другой ковариантной функцией с пределом (31.3.6) является ковариантной функцией, все компоненты которой равны нулю в точке $\mathbf{q} = 0$, $q^0 = m_g$, а значит и всюду на массовой поверхности.) Теперь можно записать лагранжиан свободного поля в виде

$$\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{2}\left(\bar{\psi}^\mu D_{\mu\nu}(-i\partial)\psi^\nu\right), \tag{31.3.8}$$

где

$$\Delta^{\mu\nu}(q)D_{\nu\lambda}(q) = \delta^\mu_\lambda. \tag{31.3.9}$$

С помощью прямых, хотя и утомительных, выкладок находим

$$D_{\nu\lambda}(q) = -\varepsilon_{\nu\mu\kappa\lambda}\gamma_5\gamma^\mu q^\kappa - \frac{1}{2}m_g[\gamma_\nu, \gamma_\lambda], \tag{31.3.10}$$

так что плотность лагранжиана (31.3.8) записывается как

$$\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{2}i\varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}\left(\bar{\psi}_\nu\gamma_5\gamma_\mu\partial_\kappa\psi_\lambda\right) + \frac{1}{4}m_g\left(\bar{\psi}_\nu[\gamma^\nu, \gamma^\lambda]\psi_\lambda\right). \tag{31.3.11}$$

При $m_g = 0$ этот результат подтверждает, что член $-\frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu L^\mu$ в уравнении (31.2.9) является правильным стандартным образом нормированным лагранжианом свободного поля безмассовой зарядово самосопряженной частицы спина $3/2$. В пределе $m_g \to 0$ пропагатор, заданный уравнениями (31.3.5) и (31.3.7), сингулярен (что просто отражает показанную в разделе 5.9 невозможность построения поля, преобразующегося по представлению $(1, \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}, 1)$, с помощью операторов рождения и уничтожения для безмассовой частицы со спиральностью $\pm 3/2$. Однако, все члены $P^{\mu\nu}(q)$ в уравнении (31.3.7), которые расходятся при $m_g \to 0$, пропорциональны q^μ и(или) q^ν, а следовательно, не дают вклада, если ток, с которым взаимодействует ψ_μ, сохраняется.

В качестве дальнейшей проверки обоснованности вида лагранжиана (31.3.11), включающей массовый член специфического вида, отметим, что с его помощью получается уравнение поля

$$-i\varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}\gamma_5\gamma_\mu\partial_\kappa\psi_\lambda + \frac{1}{2}m_g[\gamma^\nu, \gamma^\lambda]\psi_\lambda = 0. \tag{31.3.12}$$

Взяв дивергенцию этого уравнения, получаем, что

$$[\partial\!\!\!/, \gamma^\lambda]\psi_\lambda = 0.$$

Кроме того, свертка (31.3.12) с γ_ν показывает, что

$$\gamma_\nu \psi^\nu \propto \varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\mu\partial_\kappa\psi_\lambda \propto [\partial\!\!\!/, \gamma^\lambda]\psi_\lambda = 0,$$

так что условие неприводимости (31.3.1) выполняется для свободного поля (но не обязательно при учете взаимодействий). Из этих двух результатов следует другое условие неприводимости

$$\partial_\lambda\psi^\lambda = \frac{1}{2}\{\partial\!\!\!/, \gamma_\lambda\}\psi^\lambda = \frac{1}{2}[\partial\!\!\!/, \gamma_\lambda]\psi^\lambda = 0.$$

Использование этих условий позволяет записать уравнение поля (31.3.12) в форме уравнения Дирака

$$\left(\partial\!\!\!/ + m_g\right)\psi^\lambda = 0, \tag{31.3.13}$$

что, помимо прочего, показывает, что ψ_μ — свободное поле частицы массой m_g.

Рассмотрим теперь эффекты спонтанного нарушения суперсимметрии в теориях супрергравитации. Нарушенная глобальная суперсимметрия влечет за собой существование безмассовой частицы спина $1/2$ — голдстино, но в теориях супергравитации поле голдстино χ может быть устранено калибровочным преобразованием $\psi_\mu \to \psi_\mu - \partial_\mu\chi$. Поскольку калибровка зафиксирована условием отсутствия голдстино, калибровочная инвариантность больше не обеспечивает безмассовости гравитино, и оно приобретает массу (которая с этого момента обозначается m_g), аналогично тому, как в разделе 21.3 векторные бозоны $W^\pm$ и Z^0 приобретают массы при спонтанном нарушении $SU(2)\times U(1)$ калибровочной симметрии электрослабого взаимодействия.

Как обсуждалось в начале главы 28, если суперсимметрия вообще приложима к доступным наблюдению явлениям, то характерный масштаб энергий, на котором она нарушается, должен быть много меньше планковской массы. В этом случае можно использовать соображения непрерывности, чтобы получить универсальную формулу для массы гравитино m_g. Согласно (31.1.34), поле гравитино ψ_μ взаимодействует с током суперсимметрии S^μ, с константой взаимодействия $\frac{1}{2}\kappa = \frac{1}{2}\sqrt{8\pi G}$, так что обмен виртуальным гравитино с четырехмерным импульсом q в переходе $A+B \to C+D$ добавляет в инвариантную амплитуду член

$$M(A+B \to C+D) = \frac{1}{4}(8\pi G)\langle C|\bar{S}_\mu|A\rangle_N \Delta^{\mu\nu}(q)\langle D|S_\nu|B\rangle_N, \tag{31.3.14}$$

где индекс N означает, что соответствующий одному голдстино полюс при $q^2 = 0$ должен был удален из матричного элемента тока суперсимметрии. Для малого по сравнению с планковской массой масштаба нарушения суперсимметрии имеется диапазон переданных импульсов, которые много больше массы гравитино, но много меньше массы Планка. Для таких импульсов матричный элемент определяется пропорциональными $1/m_g^2$ членами в числителе пропагатора (31.3.7)

$$M(A+B \to C+D) \to \frac{1}{4}(8\pi G)\langle C|\bar{S}_\mu|A\rangle_N \left(\frac{-2i\,\not{q}q^\mu q^\nu}{3m_g^2 q^2}\right)\langle D|S_\nu|B\rangle_N. \quad (31.3.15)$$

Однако для достаточно больших импульсов порядка массы Планка взаимодействие гравитино становится пренебрежимо малым, и матричный элемент должен быть таким же, как если бы он определялся обменом голдстино в теории без гравитонов. Согласно уравнению (29.2.10),

$$M(A+B \to C+D) \to \langle C|\bar{S}_\mu|A\rangle_N \left(\frac{-i\,\not{q}}{q^2}\right)\left(\frac{q^\mu q^\nu}{F^2}\right)\langle D|S_\nu|B\rangle_N, \quad (31.3.16)$$

где F — выбранный действительным параметр, характеризующий величину нарушения суперсимметрии и определенный так, что плотность энергии вакуума равна $F^2/2$. Чтобы согласовать уравнения (31.3.15) и (31.3.16), масса гравитино должна иметь значение

$$m_g = \sqrt{\frac{4\pi G F^2}{3}}. \quad (31.3.17)$$

Эта формула справедлива только в низшем порядке по GF^2, но во всех порядках (и даже непертурбативно) по негравитационным взаимодействиям, ответственным за спонтанное нарушение суперсимметрии.

Для некоторых целей удобно выразить m_g через средние значения $\langle s\rangle$ и $\langle p\rangle$ бесспиновых вспомогательных гравитационных полей. Отметим, что для того, чтобы вакуумное состояние имело нулевую пространственно-временную кривизну, плотность энергии вакуума полей материи $F^2/2$ должна быть скомпенсирована отрицательной вакуумной энергией гравитации и ее взаимодействием с полями из скрытого сектора, которая задается через $\langle s\rangle$ и $\langle p\rangle$ уравнениями (31.2.18) и (31.2.16) в виде $-(4/3)(\langle s\rangle^2 + \langle p\rangle^2)$, так что

$$F^2/2 = (4/3)(\langle s\rangle^2 + \langle p\rangle^2). \quad (31.3.18)$$

Поэтому мы можем переписать уравнение (31.3.17) в виде

$$m_g = \frac{2\kappa}{3}\sqrt{\langle s\rangle^2 + \langle p\rangle^2}. \quad (31.3.19)$$

Иногда бывает полезно ввести комплексную массу гравитино, определенную как

$$\tilde{m}_g \equiv \frac{2\kappa}{3}\Big(\langle s\rangle + i\langle p\rangle\Big), \tag{31.3.20}$$

так что ее модуль совпадает с физической массой гравитино (31.3.19).

31.4. Вызванное аномалиями нарушение суперсимметрии

В разделе 28.3 было сделано предположение, что суперсимметрия может быть нарушена для некоторых суперполей скрытого сектора, которые не несут квантовых чисел группы $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ стандартной модели и взаимодействуют с наблюдаемыми частицами только гравитационно. В этом разделе мы рассмотрим один класс эффектов первого порядка по $\kappa \equiv \sqrt{8\pi G}$, приводящих к нарушению суперсимметрии в минимальной суперсимметричной стандартной модели. Этот класс включает эффекты, создаваемые массой калибрино и параметрами A_{ij} и B в лагранжиане (28.4.1). Другие эффекты нарушения суперсимметрии, такие как квадраты масс скварков и слептонов, — второго порядка по κ, и они будут рассмотрены в разделе 31.7, в котором мы исследуем вызванное гравитацией нарушение суперсимметрии, используя описанный в разделе 31.6 общий формализм супергравитации.

Результат вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии до первого порядка по κ можно получить простой заменой полевых компонент гравитационного супермультиплета во взаимодействии (31.1.34) их средними значениями. Единственные полевые компоненты, у которых может появиться ненулевое вакуумное среднее при спонтанном нарушении суперсимметрии в скрытом секторе суперполей материи — бесспиновые вспомогательные поля s и p. Поэтому, с учетом (31.1.33) находим нарушающее суперсимметрию взаимодействие первого порядка

$$\mathscr{L}^{(1)} = 2\kappa\Big[-A^X\langle p\rangle + B^X\langle s\rangle\Big] = 3\,\mathrm{Im}\Big[\tilde{m}_g^*(A^X + iB^X)\Big], \tag{31.4.1}$$

где $\tilde{m}_g$ — комплексная масса гравитино (31.3.20), а A^X и B^X — A- и B-компоненты характеризующего масштабную инвариантность действительного кирального суперполя X, обсуждавшегося в разделе 26.7.

Мы показали в разделе 26.7, что для перенормируемой теории левокиральных суперполей Φ_n с суперпотенциалом $f(\Phi)$, суперполе X задается выражением

$$X = \frac{2}{3}\,\mathrm{Im}\left[\sum_n \Phi_n \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi_n} - 3f(\Phi)\right]. \tag{31.4.2}$$

Это может быть представлено в форме, которая допускает непосредственное обобщение на более общие теории посредством записи параметров взаимодействия в суперпотенциале через безразмерные параметры и параметр $\mathscr{M}$ размерностью массы. Поскольку суперпотенциал имеет размерность (масса)^3, имеем

$$\mathscr{M}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial \mathscr{M}}+\sum_n \Phi_n\frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi_n}=3f(\Phi). \tag{31.4.3}$$

Поэтому уравнение (31.4.2) может быть записано как

$$X=\frac{2}{3}\,\mathrm{Im}\left[\mathscr{M}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial \mathscr{M}}\right]. \tag{31.4.4}$$

Эту формулу можно обобщить, чтобы учесть вклад в X масштабной зависимости $\mathscr{F}$-члена любого типа в лагранжиане. Член $2\mathrm{Re}[f(\Phi,W)]_{\mathscr{F}}$ в лагранжиане дает вклад в X, задаваемый очевидным обобщением формулы (31.4.4):

$$X=\frac{2}{3}\,\mathrm{Im}\left[\mathscr{M}\frac{\partial f(\Phi,W)}{\partial \mathscr{M}}\right]. \tag{31.4.5}$$

(Свой вклад в X дает также любая зависимость от масштаба массы в D-членах в лагранжиане.) Сравнивая (31.4.5) с (26.3.10) и (26.3.13), видим, что

$$A^X+iB^X=\frac{2\mathscr{M}}{3i}\frac{\partial}{\partial \mathscr{M}}\Big[f(\Phi,W)\Big]_{\theta=0}=\frac{2\mathscr{M}}{3i}\frac{\partial f(\varphi,\lambda_L)}{\partial \mathscr{M}}. \tag{31.4.6}$$

Таким образом, член, нарушающий суперсимметрию в эффективном лагранжиане, в первом порядке по κ задается уравнениями (31.4.1) и (31.4.6) в виде

$$\mathscr{L}_f^{(1)}=-2\,\mathrm{Re}\left[\tilde{m}_g^*\frac{\mathscr{M}\partial f(\varphi,\lambda_L)}{\partial \mathscr{M}}\right]. \tag{31.4.7}$$

Уравнение (31.4.7) приложимо не только к членам в лагранжиане с явной масштабной зависимостью, но и к масштабной зависимости констант взаимодействия, описываемой ренормгруппой [11a]. Эта зависимость от масштаба возникает из квантово-механической аномалии, придающей ненулевое значение следу тензора энергии-импульса, а также дивергенции R-тока, поэтому возникающие таким образом наблюдаемые эффекты нарушения суперсимметрии называют *нарушениями, вызванными аномалиями.*

Рассмотрим, в частности, кинематический член $\mathscr{L}_{\text{калибр}}$ для перенормируемых суперсимметричных калибровочных теорий, заданный уравнениями (27.3.22), (27.3.23)

$$\mathscr{L}_{\text{калибр}}=-\frac{1}{2g^2}\,\mathrm{Re}\sum_{A\alpha\beta}\Big[\varepsilon_{\alpha\beta}W_{A\alpha}W_{A\beta}\Big]_{\mathscr{F}}. \tag{31.4.8}$$

Это выражение не зависит явно от какой-либо характерной массы, но для константы взаимодействия g действует знакомая нам зависимость от масштаба перенормировки $\mathcal{M}$, задаваемая уравнением ренормгруппы

$$\mathcal{M}\frac{dg(\mathcal{M})}{d\mathcal{M}} = \beta\Big(g(\mathcal{M})\Big). \tag{31.4.9}$$

Тогда уравнение (31.4.7) показывает, что калибровочный лагранжиан (31.4.8) порождает нарушающий суперсимметрию член

$$\mathcal{L}^{(1)}_{\text{калибр}} = -\frac{\beta(g)}{g^3}\,\mathrm{Re}\left[\tilde{m}_g^*\sum_{A\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda_{AL\alpha}\lambda_{AL\beta}\right], \tag{31.4.10}$$

где $\lambda_{AL\alpha}$ — левое поле калибрино, нормированное, подобно $W_{A\alpha}$, умножением на калибровочную константу g, так что g не появляется в структурных константах или во взаимодействии калибровочного суперполя с кварковыми суперполями. С учетом этого нормировочного соглашения, масса калибрино равна g^2, умноженному на модуль коэффициента при $\frac{1}{2}\sum_{A\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda_{AL\alpha}\lambda_{AL\beta}$, или

$$m_{\text{калибрино}} = m_g\left|\frac{\beta(g)}{g}\right|. \tag{31.4.11}$$

В этой формуле $m_{\text{калибрино}}$ и g — зависящие от обрезания голые параметры в лагранжиане, подчиняющиеся вильсоновским уравнениям ренормгруппы. В разделе 27.6 мы видели, что $\beta(g)$ возникает исключительно из однопетлевых диаграмм, так что $\beta(g) = bg^3$, где b — константа, поэтому

$$m_{\text{калибрино}} = m_g\,|b|\,g^2. \tag{31.4.12}$$

Физическая масса калибрино отличается от (31.4.12) поправками высших порядков по g, но поскольку мы знаем, что калибрино должны быть много тяжелее, чем характерные массы в квантовой хромодинамике, эти поправки малы как для глюино, так для вино и бино.

Суперсимметрия не допускает наличия каких-либо явно зависящих от масштаба слагаемых в лагранжиане кварковых и глюонных суперполей, таким образом, без учета электрослабого взаимодействия выражение (31.4.12) дает единственный вклад порядка κ в массу глюино. Для трех поколений кварков уравнение (28.2.10) дает $\beta = -3g_s^3/16\pi^2$. Выбирая $g_s^2/4\pi = 0{,}118$, получаем из (31.4.12) массу глюино

$$m_{\text{глюино}} = \frac{3g_s^2 m_g}{16\pi^2} = 2{,}8\times 10^{-2} m_g. \tag{31.4.13}$$

С другой стороны, в лагранжиане хиггсовских суперполей есть масштабно-зависимое взаимодействие, порождаемое μ-членом $-\mu(H_2^{\mathrm{T}} e H_1)$ в (28.1.7), так что в лагранжиане присутствует, член, задаваемый уравнением (31.4.7) как $2\,\mathrm{Re}[\tilde{m}_g^* \mu (\mathscr{H}_2^{\mathrm{T}} e \mathscr{H}_1)]$. Сравнивая с $B\mu$-членом в уравнении (28.4.1), видим, что отсюда

$$B = -\tilde{m}_g^*. \tag{31.4.14}$$

С учетом трех поколений суперполей кварков и лептонов и одной пары суперполей хиггсовского дублета H_1 и H_2 из выражений (28.2.8) и (28.2.9) получаем $b = 11/16\pi^2$ для $U(1)$ калибровочной константы g' и $b = 1/16\pi^2$ для $SU(2)$ калибровочной константы g. Взяв $g'^2/4\pi = 0{,}0102$ и $g^2/4\pi = 0{,}0338$, мы получили бы из уравнения (31.4.11) массы $8{,}9 \times 10^{-3} m_g$ и $2,7 \times 10^{-3} m_g$ для бино и вино соответственно. Однако, массы бино и вино получают также вклад порядка $g'^2 m_g/16\pi^2$ и $g^2 m_g/16\pi^2$ соответственно от диаграмм в которых бино или вино присоединены к петле хиггс-хиггсино, с нарушением суперсимметрии, порождаемым членом $2\,\mathrm{Re}[\tilde{m}_g^* \mu (\mathscr{H}_2^{\mathrm{T}} e \mathscr{H}_1)]$ в лагранжиане. Это дает следующие массы бино и вино [11б]:

$$m_{\text{бино}} = \frac{g'^2 m_g}{16\pi^2} \left| 11 - f\left(\frac{\mu^2}{m_A^2}\right) \right|, \tag{31.4.15}$$

$$m_{\text{вино}} = \frac{g^2 m_g}{16\pi^2} \left| 1 - f\left(\frac{\mu^2}{m_A^2}\right) \right|, \tag{31.4.16}$$

где m_A — масса псевдоскалярной частицы, определяемая уравнением (28.5.21), а

$$f(x) \equiv \frac{2x \ln x}{x - 1}. \tag{31.4.17}$$

Смысл этих результатов будет обсуждаться в разделе 31.7.

Наконец, существует масштабно-зависимый множитель Z_r перенормировки поля, на который умножается кинематическая плотность лагранжиана $[\Phi_r^* e^{-V} \Phi_r]_D$ для любого левокирального суперполя Φ_r. Этот множитель может быть перемещен из кинематических D-членов в суперпотенциальные $\mathscr{F}$-члены включением множителя $Z_r^{1/2}$ в Φ_r. Константы взаимодействия Юкавы h_{rst} (такие как h_{ij}^E, h_{ij}^D и h_{ij}^U в (28.1.7)) в трилинейных суперпотенциальных членах $\sum_{rst} h_{rst} \Phi_r \Phi_s \Phi_t$ умножаются тогда на множитель $Z_r^{-1/2} Z_s^{-1/2} Z_t^{-1/2}$, который зависит от обрезания $\mathscr{M}$. Согласно уравнению (31.4.7), взаимодействие $\mathscr{L}^{(1)}$ дает вклад в плотность лагранжиана:

$$\mathscr{L}^{(1)}_{\text{Юкава}} = -2 \sum_{rst} \gamma_{rst}\, \mathrm{Re}\left[\tilde{m}_g^* h_{rst} \varphi_r \varphi_s \varphi_t\right], \tag{31.4.18}$$

где

$$\gamma_{rst} \equiv \mathcal{M}\frac{\partial \ln h_{rst}(\mathcal{M})}{\partial \mathcal{M}}$$
$$= -\frac{1}{2}\mathcal{M}\frac{\partial \ln Z_r(\mathcal{M})}{\partial \mathcal{M}} - \frac{1}{2}\mathcal{M}\frac{\partial \ln Z_s(\mathcal{M})}{\partial \mathcal{M}} - \frac{1}{2}\mathcal{M}\frac{\partial \ln Z_t(\mathcal{M})}{\partial \mathcal{M}}. \quad (31.4.19)$$

Мы видим, что коэффициенты A^E_{ij}, A^D_{ij} и A^U_{ij} в (28.1.7) равны [11б]

$$A^N_{ij} = \tilde{m}^*_g \gamma^N_{ij} = \tilde{m}^*_g \mathcal{M}\frac{\partial \ln h^N_{ij}}{\partial \mathcal{M}}, \quad (31.4.20)$$

где $N = E$, D или U. Отсюда получаем,что A^D_{ij} и A^U_{ij} — порядка $g_s^2 m_g/8\pi^2$, в то время как A^E_{ij} — порядка $g^2 m_g/8\pi^2$ или $g'^2 m_g/8\pi^2$.

31.5. Локальные преобразования суперсимметрии

В качестве последнего шага перед рассмотрением влияния высших порядков по G на преобразования суперсимметрии, завершим обсуждение законов преобразования физических компонент суперполя гравитона H_μ и других суперполей в низшем порядке по G.

Рассмотрим сперва форму, принимаемую этими преобразованиями при записи через физические поля $h_{\mu\nu}$, ψ_μ, b_μ, s и p в калибровке Весса–Зумино, в которой

$$C^H_\mu = \omega^H_\mu = V^H_{\mu\nu} - V^H_{\nu\mu} = 0. \quad (31.5.1)$$

Используя выражение (31.1.25)–(31.1.27), (31.1.29) и (31.1.11) физических полей через компоненты суперполя H_μ, наряду с общими законами преобразования (26.2.11)–(26.2.17) и «калибровочными» условиями (31.5.1), находим законы преобразования

$$\delta h_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big(\bar{\alpha}[\gamma_\mu\psi_\nu + \gamma_\nu\psi_\mu]\Big), \quad (31.5.2)$$

$$\delta\psi_\mu = \Big[\frac{1}{2}[\gamma^\nu,\gamma^\lambda]\partial_\lambda h_{\mu\nu} + \partial_\mu h^\lambda{}_\lambda + 2i\gamma_5 b_\mu - \frac{2}{3}i\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_5 b^\rho$$
$$+\frac{2}{3}\gamma_\mu s - \frac{2}{3}i\gamma_\mu\gamma_5 p\Big]\alpha, \quad (31.5.3)$$

$$\delta s = \frac{1}{4}\Big(\bar{\alpha}\gamma_\lambda L^\lambda\Big), \quad (31.5.4)$$

$$\delta p = -\frac{1}{4}i\Big(\bar{\alpha}\gamma_5\gamma_\lambda L^\lambda\Big), \quad (31.5.5)$$

$$\delta b_\mu = \frac{3}{4}i\Big(\bar{\alpha}\gamma_5 L_\mu\Big) - \frac{1}{4}i\Big(\bar{\alpha}\gamma_5\gamma_\mu\gamma^\nu L_\nu\Big), \quad (31.5.6)$$

где L_μ задается формулой (31.2.8):

$$L^\mu \equiv i\varepsilon^{\mu\nu\kappa\rho}\gamma_5\gamma_\nu\,\partial_\kappa\psi_\rho.$$

Это преобразование сдвигает также компоненты C^H_μ, ω^H_μ и $V^H_{\mu\nu} - V^H_{\nu\mu}$ от нулевых значений на величины

$$\delta C^H_\mu = 0, \qquad \delta\omega^H_\mu = V^H_{\mu\nu}\gamma^\nu\alpha, \tag{31.5.7}$$

$$\delta[V^H_{\nu\mu} - V^H_{\mu\nu}] = \left(\bar{\alpha}[\gamma_\mu\lambda^H_\nu - \gamma_\nu\lambda^H_\mu]\right). \tag{31.5.8}$$

Мы можем затем вернуться к калибровке (31.5.1), сделав подходящее калибровочное преобразование $H_\mu \to H_\mu + \Delta_\mu$, где Δ_μ — суперполе вида (31.1.17), (31.1.18) с компонентами

$$C^\Delta_\mu = 0, \qquad \omega^\Delta_\mu = -V^H_{\mu\nu}\gamma^\nu\alpha, \tag{31.5.9}$$

$$V^\Delta_{\nu\mu} - V^\Delta_{\mu\nu} = \left(\bar{\alpha}[\gamma_\nu\lambda^H_\mu - \gamma_\mu\lambda^H_\nu]\right). \tag{31.5.10}$$

Пока что это было глобальное преобразование суперсимметрии, при этом параметр α был бесконечно малым постоянным майорановским спинором. По крайней мере в низшем порядке эта симметрия может быть легко расширена до *локального* преобразования суперсимметрии с приданием $\alpha(x)$ произвольной зависимости от x^μ. Согласно уравнению (26.7.11), при таком преобразовании действие для материи получает приращение

$$\delta\int d^4x\mathscr{L}_M = -\int d^4x\left(\bar{S}^\mu(x)\,\partial_\mu\alpha(x)\right). \tag{31.5.11}$$

Из выражения (31.2.17) следует, что это приращение действия компенсируется, если добавить неоднородный член $(2/\kappa)\partial_\mu\alpha(x)$ к правой части выражения (31.5.3), так что изменение поля гравитино принимает вид

$$\begin{aligned}\delta\psi_\mu(x) = (2/\kappa)\partial_\mu\alpha(x) + \Big[\frac{1}{2}[\gamma^\nu,\gamma^\lambda]\,\partial_\lambda h_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu h^\lambda{}_\lambda(x) + 2i\gamma_5 b_\mu(x)\\ - \frac{2}{3}i\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_5 b^\rho(x) + \frac{2}{3}\gamma_\mu s(x) - \frac{2}{3}i\gamma_\mu\gamma_5 p(x)\Big]\alpha(x).\end{aligned} \tag{31.5.12}$$

Полезно переписать выражение (31.5.12) в виде, который делает более ппрозрачным обобщение на произвольные координаты. Отметим сначала, что член $\partial_\mu h^\lambda{}_\lambda\alpha$ в правой части (31.5.12) может быть устранен заменой параметра $\alpha(x)$ на

$$\tilde{\alpha} \equiv (\mathrm{Det}\,g)^{1/4}\alpha \simeq \alpha + \frac{1}{2}\kappa\, h^\lambda{}_\lambda\alpha. \tag{31.5.13}$$

Опуская тильду в нулевом порядке по к, запишем выражение (31.5.12) в виде

$$\delta\psi_\mu(x) = (2/\kappa)\partial_\mu\alpha(x) + \left[\frac{1}{2}[\gamma^\nu,\gamma^\lambda]\,\partial_\lambda h_{\mu\nu}(x) + 2i\gamma_5 b_\mu(x) - \frac{2}{3}i\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_5 b^\rho(x) + \frac{2}{3}\gamma_\mu s(x) - \frac{2}{3}i\gamma_\mu\gamma_5 p(x)\right]\alpha(x). \tag{31.5.14}$$

Мы можем выразить это через ковариантную производную от $\alpha(x)$, которая в общих координатах принимает вид

$$D_\mu\alpha(x) = \partial_\mu\alpha(x) + \frac{1}{2}i\mathcal{J}_{bc}\omega_\mu^{bc}(x)\alpha(x), \tag{31.5.15}$$

где $\mathcal{J}_{bc}$ — матрица (5.4.6), представляющая генератор преобразований Лоренца в представлении Дирака,

$$\mathcal{J}^{bc} \equiv -\frac{i}{4}\left[\gamma^b,\gamma^c\right], \tag{31.5.16}$$

а $\omega_\mu^{bc}(x)$ — спиновая связность

$$\omega_\mu^{bc} = e^b{}_\lambda e^c{}_{\nu;\mu} g^{\lambda\nu} = e^b{}_\lambda \frac{\partial e^c{}_\nu}{\partial x^\mu} g^{\lambda\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} e^b{}_\lambda e^c{}_\rho g^{\lambda\nu}. \tag{31.5.17}$$

Используя приближения слабого поля (31.1.5), (31.1.10) и (31.1.11) вместе с калибровочными условиями $\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\nu\mu}$ и снова пренебрегая в этом приближении различием между локальными лоренцевскими индексами a, b и т. д. и пространственно-временными индексами μ, ν и т. д., получаем

$$D_\mu\alpha(x) \simeq \partial_\mu\alpha(x) + \frac{1}{4}\kappa[\gamma^\nu,\gamma^\lambda]\,\partial_\lambda h_{\mu\nu}(x). \tag{31.5.18}$$

Таким образом, закон локального преобразования суперсимметрии (31.5.12) может быть записан как

$$\delta\psi_\mu(x) = (2/\kappa)D_\mu\alpha(x) + \left[2i\gamma_5 b_\mu(x) - \frac{2}{3}i\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_5 b^\rho(x) + \frac{2}{3}\gamma_\mu s(x) - \frac{2}{3}i\gamma_\mu\gamma_5 p(x)\right]\alpha(x). \tag{31.5.19}$$

Мы видим, что в калибровке Весса–Зумино производные в преобразовании суперсимметрии становятся ковариантными производными. В этом смысле, очерченный здесь подход аналогичен подходу де Вита–Фридмана к суперсимметричным калибровочным теориям, описанном в разделе 27.8.

Преобразование $\psi_\mu(x) \to \psi_\mu(x) + (2/\kappa)\partial_\mu\alpha(x)$ — калибровочное преобразование того же типа, как и (31.1.13), так что действие нулевого порядка для гравитино $-\frac{1}{2}\int d^4x(\bar{\psi}_\mu L^\mu)$ остается инвариантным. Полное действие, получаемое из лагранжиана (31.2.15), поэтому инвариантно в нулевом порядке по κ относительно локальных преобразований суперсимметрии (31.5.2), (31.5.4)–(31.5.6), (31.5.12) (или (31.5.19)), и суперполя материи преобразуются как (26.7.15). Мы заключаем, что *комбинация гравитации и суперсимметрии автоматически приводит к локальной суперсимметрии.*

31.6. Супергравитация во всех порядках

Хотя действие, получаемое из лагранжиана (31.2.15), инвариантно в нулевом порядке по $\kappa \equiv \sqrt{8\pi G}$ относительно локальных преобразований суперсимметрии, построенных в разделах 26.7 и 31.5, оно *не* инвариантно в первом порядке по κ, потому что взаимодействие материи с гравитационным супермультиплетом приводит к появлению членов порядка κ в $\partial_\mu S^\mu$. Чтобы обеспечить инвариантность полного действия, нужно добавить члены высших порядков по κ в лагранжиан и законы суперсимметричных преобразований для компонент супермультиплетов материи и гравитации. Это может быть сделано, если добавить в законы преобразования члены высшего порядка по κ так, чтобы преобразования суперсимметрии вместе с локальными лоренцевскими преобразованиями и общекоординатными преобразованиями образовывали замкнутую алгебру, а затем добавить в действие такие члены, чтобы оно стало инвариантным относительно всех этих преобразований.

Это долгий и утомительный процесс. Мы представим здесь только результаты [12], а затем, в следующем разделе, обратимся к наиболее важным приложениям. Локальное преобразование суперсимметрии для тетрады, поля гравитино и вспомогательных полей принимает вид:

$$\delta e^a{}_\mu = \kappa\left(\bar{\alpha}\gamma^a\psi_\mu\right), \tag{31.6.1}$$

$$\delta\psi_\mu = (2/\kappa)D_\mu\alpha + 2i\gamma_5\left(b_\mu - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\rho b^\rho\right)\alpha + \frac{2}{3}\gamma_\mu(s - i\gamma_5 p)\alpha, \tag{31.6.2}$$

$$\delta s = \frac{1}{4e}\left(\bar{\alpha}\gamma_\mu L^\mu\right) + \frac{\kappa}{2}\left(\bar{\alpha}[i\gamma_5 b^\nu - s\gamma^\nu - ip\gamma_5\gamma^\nu]\psi_\nu\right), \tag{31.6.3}$$

$$\delta p = -\frac{i}{4e}\left(\bar{\alpha}\gamma_5\gamma_\mu L^\mu\right) + \frac{\kappa}{2}\left(\bar{\alpha}[b^\nu + is\gamma_5\gamma^\nu - p\gamma^\nu]\psi_\nu\right), \tag{31.6.4}$$

$$\begin{aligned}\delta b_\mu = {}& \frac{3i}{4e}\left(\bar{\alpha}\gamma_5\left(L_\mu - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\rho L^\rho\right)\right) + \frac{\kappa}{2}b_\nu\left(\bar{\alpha}\gamma^\nu\psi_\mu\right) + \\ & + i\frac{\kappa}{2}\left(\bar{\psi}_\mu\gamma_5(s - i\gamma_5 p)\alpha\right) - \frac{\kappa}{4}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\sigma}b^\nu\left(\bar{\alpha}\gamma_5\gamma^\kappa\psi^\sigma\right).\end{aligned} \tag{31.6.5}$$

Здесь опять D_μ — ковариантная производная, определенная в (31.5.15) и (31.5.16):

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{1}{8}[\gamma_a, \gamma_b]\omega_\mu^{ab}, \tag{31.6.6}$$

но теперь спиновая связность включает члены, билинейные по полю гравитино,

$$\omega_\mu^{ab} = e^a{}_\lambda e^b{}_{\nu;\mu} g^{\lambda\nu} + \frac{\kappa^2}{4}\left[e^b{}_\nu\left(\bar\psi_\mu\gamma^a\psi^\nu\right) + e^a{}_\nu e^b{}_\rho\left(\bar\psi^\nu\gamma_\mu\psi^\rho\right) - e^a{}_\nu\left(\bar\psi_\mu\gamma^b\psi^\nu\right)\right]. \tag{31.6.7}$$

Кроме того, L^μ — ковариантная версия оператора Рариты–Швингера (31.2.8)

$$L^\mu = i\gamma_5\gamma_\nu D_\rho\psi_\sigma\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{31.6.8}$$

γ_μ определяется с помощью обычных матриц Дирака γ_a как

$$\gamma_\mu = e^a{}_\mu\gamma_a, \tag{31.6.9}$$

а e — определитель тетрады

$$e \equiv \sqrt{\mathrm{Det}\, g}. \tag{31.6.10}$$

Легко видеть, что в пределе слабого поля эти правила преобразования сводятся к выражениям (31.5.2), (31.5.19) и (31.5.4)–(31.5.6).

Действие для чистой супергравитации, инвариантное относительно этих преобразований и дающее в пределе слабого поля действие (31.2.9), имеет вид

$$I_{\text{супергр}} = \int d^4x\left[-\frac{e}{2\kappa^2}R - \frac{1}{2}\left(\bar\psi_\mu L^\mu\right) - \frac{4e}{3}\left(s^2 + p^2 - b_\mu b^\mu\right)\right], \tag{31.6.11}$$

где R — скалярная кривизна, вычисленная по спиновой связности (31.6.7). В отсутствие материи действие было бы стационарным для $s = p = b_\mu = 0$, упрощаясь до вида

$$I_{\text{супергр}} = \int d^4x\left[-\frac{e}{2\kappa^2}R - \frac{1}{2}\left(\bar\psi_\mu L^\mu\right)\right].$$

Преобразование полей материи теперь также более сложно. Для компонент произвольного скалярного супермультиплета оно записывается как

$$\delta C = i\left(\bar\alpha\gamma_5\omega\right), \tag{31.6.12}$$

$$\delta\omega = [-i\gamma_5 \not{D} C - M + i\gamma_5 N + \not{V}]\alpha, \tag{31.6.13}$$

$$\delta M = -\left(\bar\alpha[\lambda + \not{\mathscr{D}}\omega]\right) + \frac{2\kappa}{3}\left(\bar\alpha[s - i\gamma_5 p + i\gamma_5 \not{b}]\omega\right), \tag{31.6.14}$$

$$\delta N = i\left(\bar\alpha\gamma_5[\lambda + \not{\mathscr{D}}\omega]\right) + \frac{2i\kappa}{3}\left(\bar\alpha[s - i\gamma_5 p + i\gamma_5 \not{b}]\gamma_5\omega\right), \tag{31.6.15}$$

$$\delta V_a = \left(\bar\alpha\gamma_a\lambda\right) + \left(\bar\alpha\mathscr{D}_a\omega\right) + \frac{\kappa}{3}\left(\bar\alpha[s - i\gamma_5 p + i\gamma_5 \not{b}]\gamma_a\omega\right), \tag{31.6.16}$$

$$\delta\lambda = -\frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b]\alpha F_{ab} + iD\gamma_5\alpha, \tag{31.6.17}$$

$$\delta D = i\left(\bar\alpha\gamma_5 \not{\mathscr{D}}\lambda\right), \tag{31.6.18}$$

где ковариантные производные определяются следующим образом

$$\mathscr{D}_a C = e_a{}^{\mu}\left[\partial_\mu C - \frac{i\kappa}{2}\left(\bar\psi_\mu\gamma_5\omega\right)\right], \tag{31.6.19}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_a\omega = e_a{}^{\mu}\Big[&\partial_\mu\omega + \frac{1}{8}\omega_\mu^{cb}[\gamma_c, \gamma_b]\omega - i\kappa b_\mu\gamma_5\omega \\ &- \frac{\kappa}{2}\left(\not{V} - i\gamma_5\not{\partial}C - M + i\gamma_5 N\right)\psi_\mu\Big],\end{aligned} \tag{31.6.20}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_a\lambda = e_a{}^{\mu}\Big[&\partial_\mu\lambda + \frac{1}{8}\omega_\mu^{cb}[\gamma_c, \gamma_b]\lambda \\ &+ i\kappa\, b_\mu\gamma_5\lambda + \frac{\kappa}{8}[\gamma^b, \gamma^c]\psi_\mu F_{bc} - \frac{i\kappa}{2}\gamma_5 D\psi_\mu\Big],\end{aligned} \tag{31.6.21}$$

$$F_{ab} = e_a{}^{\mu}e_b{}^{\nu}\left[\partial_\mu V_\nu + \frac{\kappa}{2}\partial_\mu\left(\bar\psi_\mu\omega\right) - \frac{\kappa}{2}\left(\bar\psi_\mu\gamma_\nu\lambda\right)\right] - a \leftrightarrow b, \tag{31.6.22}$$

и $V_\mu \equiv e^a{}_\mu V_a$. Правила умножения произвольных скалярных мультиплетов остаются такими же, как (26.2.19)–(26.2.25), за исключением того, что ∂_μ заменяется всюду на $\mathscr{D}_a$, так что компоненты супермультиплета $S = S_1 S_2$ теперь имеют вид

$$C = C_1 C_2, \tag{31.6.23}$$

$$\omega = C_1\omega_2 + C_2\omega_1, \tag{31.6.24}$$

$$M = C_1 M_2 + C_2 M_1 + \frac{1}{2}i\left(\overline{\omega_1}\gamma_5\omega_2\right), \tag{31.6.25}$$

$$N = C_1 N_2 + C_2 N_1 - \frac{1}{2}\left(\overline{\omega_1}\omega_2\right), \tag{31.6.26}$$

$$V^a = C_1 V_2^a + C_2 V_1^a - \frac{1}{2}i\left(\overline{\omega_1}\gamma_5\gamma^a\omega_2\right), \tag{31.6.27}$$

$$\begin{aligned}\lambda = C_1\lambda_2 + C_2\lambda_1 &- \frac{1}{2}\gamma^a\omega_1\mathscr{D}_a C_2 - \frac{1}{2}\gamma^a\omega_2\mathscr{D}_a C_1 + \frac{1}{2}i\not{V}_1\gamma_5\omega_2 \\ &+ \frac{1}{2}i\not{V}_2\gamma_5\omega_1 + \frac{1}{2}(N_1 - i\gamma_5 M_1)\omega_2 + \frac{1}{2}(N_2 - i\gamma_5 M_2)\omega_1,\end{aligned} \tag{31.6.28}$$

$$D = -\mathscr{D}_a C_1 \mathscr{D}^a C_2 + C_1 D_2 + C_2 D_1 + M_1 M_2 + N_1 N_2 - \left(\overline{\omega_1}[\lambda_2 + \frac{1}{2}\not{\mathscr{D}}\omega_2]\right) - \left(\overline{\omega_2}[\lambda_1 + \frac{1}{2}\not{\mathscr{D}}\omega_1]\right) - V_{1a} V_2^a. \quad (31.6.29)$$

Так же, как и в плоском пространстве, существуют суперсимметричные ограничения, которые могут быть наложены на эти произвольные супермультиплеты. Одно из таких ограничений — действительность. Изучение выражений (31.6.12)–(31.6.22) наряду с (26.A.20)–(26.A.21) показывает, что если C, M, N, V_a, D, ω и λ образуют супермультиплет S, то C^*, M^*, N^*, V_a^*, D^*, $\beta\varepsilon\gamma_5\omega^*$ и $\beta\varepsilon\gamma_5\lambda^*$ также образуют супермультиплет, называемый S^*. В частности, *действительный* мультиплет, — это такой мультиплет, для которого $S = S^*$, при этом C, M, N, V_a и D — действительны, а ω и λ — майорановские спиноры.

Мы можем также наложить суперсимметричные условия киральности. Допустим, мы положили

$$\lambda = 0, \qquad D = 0, \qquad V_\nu + \frac{1}{2}\kappa\left(\bar{\psi}_\nu\omega\right) = \partial_\nu Z, \quad (31.6.30)$$

для некоторого поля Z. Тогда выражение (31.6.22) дает $F_{ab} = 0$, так что из выражения (31.6.17) следует, что $\delta\lambda = 0$, в то время как из выражения (31.6.21) следует $\mathscr{D}_a\lambda = 0$, и из выражения (31.6.18) получается, что $\delta D = 0$. Поэтому условия $\lambda = D = 0$ сохраняются при локальных преобразованиях суперсимметрии. Проделав еще некоторые выкладки, можно показать, что

$$\delta\left[V_\nu + \frac{1}{2}\kappa\left(\bar{\psi}_\nu\omega\right)\right] = \partial_\nu\left(\bar{\alpha}\omega\right), \quad (31.6.31)$$

так что оставшееся условие, что $V_\nu + \frac{1}{2}\kappa\left(\bar{\psi}_\nu\omega\right)$ является пространственно-временным градиентом, также суперсимметрично. Супермультиплет полевых компонент, удовлетворяющих условиям (31.6.30), называется *киральным* супермультиплетом. Как и в случае глобальной суперсимметрии, компоненты кирального суперполя принято обозначать A, B, ψ, F и G, где

$$C = A, \qquad \omega = -i\gamma_5\psi, \qquad M = G, \qquad N = -F, \qquad Z = B. \quad (31.6.32)$$

Киральный супермультиплет действителен, если A, B, F и G действительны, а ψ — майорановский спинор. Такой действительный киральный супермультиплет может быть записан как сумма левокирального супермультиплета Φ с компонентами, которые принято обозначать

$$\varphi \equiv \frac{A + iB}{\sqrt{2}}, \qquad \psi_L \equiv \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi, \qquad \mathscr{F} \equiv \frac{F - iG}{\sqrt{2}}, \quad (31.6.33)$$

и комплексно сопряженного ему правокирального супермультиплета. Из этих обозначений и уравнений (31.6.12)–(31.6.15) и (31.6.31) видно, что компоненты левокирального супермультиплета имеют следующие трансформационные свойства

$$\delta\varphi = \sqrt{2}\left(\bar{\alpha}\psi_L\right), \tag{31.6.34}$$

$$\delta\psi_L = \sqrt{2}(\not{\partial}\varphi)\alpha_R - \kappa\gamma^\mu\left(\bar{\psi}_\mu\psi_L\right)\alpha_R + \sqrt{2}\mathscr{F}\alpha_L, \tag{31.6.35}$$

$$\delta\mathscr{F} = \sqrt{2}\left(\bar{\alpha}\not{\mathscr{D}}\psi_L\right) - \frac{2\kappa}{3}\left(\bar{\alpha}[s - ip - i\not{b}]\psi_L\right), \tag{31.6.36}$$

где $\mathscr{D}_a\psi$ задается выражениями (31.6.20) и (31.6.32). Правила умножения левокиральных супермультиплетов те же, что и соответствующие правила (26.3.27)–(26.3.29) в случае глобальной суперсимметрии: произведением левокиральных супермультиплетов Φ_1 и Φ_2 является левокиральный супермультиплет, обозначаемый $\Phi_1\Phi_2$, с компонентами

$$\varphi = \varphi_1\varphi_2, \tag{31.6.37}$$

$$\psi_L = \varphi_1\psi_{2L} + \varphi_2\psi_{1L}, \tag{31.6.38}$$

$$\mathscr{F} = \varphi_1\mathscr{F}_2 + \varphi_2\mathscr{F}_1 - \left(\psi_{1L}^{\mathrm{T}}\epsilon\psi_{2L}\right). \tag{31.6.39}$$

Теперь нужно показать, как можно строить действия, инвариантные относительно локальных преобразований суперсимметрии, общекоординатных преобразований и локальных преобразований Лоренца. Уравнения (31.6.18) и (31.6.21) показывают, что изменение D-компоненты произвольного супермультиплета S при преобразовании суперсимметрии не является обычной пространственно-временной производной. Таким образом, интеграл от D-компоненты не может быть правильным слагаемым в действии. Вместо этого, на основе произвольного суперполя S можно построить плотность, интеграл которой *является* суперсимметричным:

$$\begin{aligned}[S]_D = e\Bigg[&D^S - \frac{i\kappa}{2}\left(\bar{\psi}^\mu\gamma_\mu\gamma_5\lambda^S\right) + \frac{4\kappa}{3}[-sN^S + pM^S - b^\mu V_\mu^S] \\ &- \frac{i\kappa}{3}\left(\overline{\omega^S}\gamma_5\not{V}\right) - \frac{\kappa^2}{4}\epsilon^{\mu\rho\sigma\tau}V_\sigma^S\left(\bar{\psi}_\rho\gamma_\tau\psi_\mu\right) \\ &- \frac{\kappa^2}{8}\epsilon^{\mu\rho\sigma\tau}\left(\overline{\omega^S}\psi_\sigma\right)\left(\bar{\psi}_\rho\gamma_\tau\psi_\mu\right)\Bigg] - \frac{2\kappa^2}{3}C^S\mathscr{L}_{\text{супергр}},\end{aligned} \tag{31.6.40}$$

где $\mathscr{L}_{\text{супергр}}$ — супергравитационный лагранжиан в выражении (31.6.11):

$$\mathscr{L}_{\text{супергр}} = -\frac{e}{2\kappa^2}R - \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}_\mu L^\mu\right) - \frac{4e}{3}\left(s^2 + p^2 - b_\mu b^\mu\right). \tag{31.6.41}$$

Аналогично, выражения (31.6.36) и (31.6.20) показывают, что приращение $\mathscr{F}$-компоненты левокирального суперполя X при преобразовании суперсимметрии не является пространственно-временной производной, так что к $\mathscr{F}$-компоненте должны быть прибавлены определенные члены, чтобы получить плотность, интеграл от которой суперсимметричен:

$$[X]_{\mathscr{F}} = e\left[\mathscr{F}^X + \frac{\kappa}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}_{\mu R}\gamma^{\mu}\psi_L^X\right) + \frac{\kappa^2}{4}\left(\bar{\psi}_{\mu R}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]\psi_{\nu R}\right)\varphi^X \right.$$
$$\left. + 2\kappa(s - ip)\varphi^X\right]. \qquad (31.6.42)$$

Некоторые супермультиплеты представляют особый физический интерес. Один из них — действительный некиральный супермультиплет $\imath$ с единственной ненулевой компонентой $C = 1$. Согласно выражению (31.6.40), для этого супермультиплета

$$[\imath]_D = -\frac{2\kappa^2}{3}\mathscr{L}_{\text{супергр}}, \qquad (31.6.43)$$

что не дает ничего нового.

Более интересный пример представляет собой *левокиральный* супермультиплет $\mathbf{I}$ с единственной ненулевой компонентой $\varphi = 1$. Согласно выражению (31.6.42), для этого супермультиплета

$$\mathrm{Re}[\mathbf{I}]_{\mathscr{F}} = e\left[\frac{\kappa^2}{4}\left(\bar{\psi}_{\mu}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]\psi_{\nu}\right) + 4\kappa s\right]. \qquad (31.6.44)$$

Если член $c\int d^4x\,\mathrm{Re}[\mathbf{I}]_{\mathscr{F}}$ появляется в действии с действительным коэффициентом c, то сумма этого члена и супергравитационного действия (31.6.11) стационарна по отношению к вариациям вспомогательных полей при

$$s = 3c\kappa/2, \qquad p = b^{\mu} = 0, \qquad (31.6.45)$$

поэтому после устранения вспомогательных полей действие будет содержать постоянный космологический член

$$3\kappa^2c^2\int d^4x\,e, \qquad (31.6.46)$$

соответствующий плотности энергии вакуума $-3\kappa^2c^2$. Такой член необходим, чтобы вакуумное состояние было лоренц-инвариантным при спонтанном нарушении суперсимметрии. Чтобы компенсировать положительную плотность вакуумной энергии $F^2/2$, связанную с нарушением суперсимметрии, нам следует положить

$$3\kappa^2 c^2 = F^2/2. \tag{31.6.47}$$

Обращаясь снова к выражению (31.6.44) и сравнивая его с (31.3.11), видим, что отсюда масса гравитино [13]

$$m_g = c\kappa^2 = \frac{F\kappa}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{4\pi G F^2}{3}}, \tag{31.6.48}$$

в соответствии с предыдущим результатом (31.3.17).

В качестве иллюстрации использования этих формул и получая попутно результаты, которые понадобятся в следующем разделе, вычислим бозонную часть лагранжиана*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{супергр}} + \frac{1}{2}\Big[K(\Phi,\Phi^*)\Big]_D + 2\,\mathrm{Re}\Big[f(\Phi)\Big]_{\mathcal{F}}; \tag{31.6.49}$$

здесь $\mathcal{L}_{\text{супергр}}$ — бозонная часть супергравитационного лагранжиана (31.6.41), $K(\Phi,\Phi^*)$ — действительная функция набора левокиральных супермультиплетов Φ_n и им комплексно сопряженных, а $f(\Phi)$ — функция только от Φ_n. Чисто бозонные члены в правилах умножения (31.6.23), (31.6.25)–(31.6.27) и (31.6.29) те же самые, что и для глобальной суперсимметрии, так что можно использовать либо эти правила, либо суперпространственный формализм главы 26, чтобы вычислить, что супермультиплет $K(\Phi,\Phi^*)$ имеет следующие бозонные компоненты

$$C^K = K(\varphi,\varphi^*), \tag{31.6.50}$$

$$M^K = -2\,\mathrm{Im}\sum_n \left(\frac{\partial K(\varphi,\varphi^*)}{\partial \varphi_n}\mathcal{F}_n\right) + \cdots, \tag{31.6.51}$$

$$N^K = -2\,\mathrm{Re}\sum_n \left(\frac{\partial K(\varphi,\varphi^*)}{\partial \varphi_n}\mathcal{F}_n\right) + \cdots, \tag{31.6.52}$$

$$V^K_\mu = 2\,\mathrm{Im}\sum_n \left(\frac{\partial K(\varphi,\varphi^*)}{\partial \varphi_n}\partial_\mu\varphi_n\right) + \cdots, \tag{31.6.53}$$

$$D^K = 2\sum_{nm} \frac{\partial^2 K(\varphi,\varphi^*)}{\partial \varphi_n \partial \varphi_m^*}\left(-g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\varphi_n\,\partial_\nu\varphi_m^* + \mathcal{F}_n\mathcal{F}_m^*\right) + \cdots, \tag{31.6.54}$$

*Часто член $\mathcal{L}_{\text{супергр}}$ опускают, вместо этого супергравитационный лагранжиан вводится путем включения постоянного члена $-3/\kappa^2$ в $K(\varphi,\varphi^*)$. Мы не будем следовать этой практике; здесь, при стандартной нормировке скалярных полей, членом главного порядка по κ в $K(\varphi,\varphi^*)$ является $\sum_n |\varphi_n|^2$.

где точки заменяют члены, включающие фермионные поля. Аналогично, правила умножения левокиральных суперполей (31.6.37)–(31.6.39) те же самые, что и для глобальной суперсимметрии, так что можно использовать либо эти правила, либо суперполевой формализм главы 26, чтобы вычислить, что левокиральный супермультиплет $f(\Phi)$ имеет бозонные компоненты

$$\varphi^f = f(\varphi), \tag{31.6.55}$$

$$\mathscr{F}^f = \sum_n \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_n}\mathscr{F}_n + \cdots, \tag{31.6.56}$$

где точки снова заменяют члены, включающие фермионы. Подстановка этих результатов в выражения (31.6.40) и (31.6.42) дает бозонные члены плотности лагранжиана (31.6.49) в виде:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{бозон}} = {} & \left[-\frac{e}{2\kappa^2}R - \frac{4e}{3}\left(s^2+p^2-b_\mu b^\mu\right)\right]\left[1-\frac{\kappa^2}{3}K(\varphi,\varphi^*)\right] \\ & - e\sum_{nm}\frac{\partial^2 K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n\,\partial\varphi_m^*}\left(-g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\varphi_n\,\partial_\nu\varphi_m^* + \mathscr{F}_n\mathscr{F}_m^*\right) \\ & + \frac{4\kappa e}{3}\,\mathrm{Re}\sum_n \frac{\partial K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi_n}\left(\mathscr{F}_n(s+ip) + ib^\mu\partial_\mu\varphi_n\right) \\ & + 2e\,\mathrm{Re}\left(\sum_n \frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_n}\mathscr{F}_n + 2\kappa(s-ip)f(\varphi)\right).\end{aligned} \tag{31.6.57}$$

Теперь следует устранить вспомогательные поля, придав им значения, при которых лагранжиан стационарен*. Это дает вспомогательные поля

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_n = {} & \frac{\kappa^2}{3N}\sum_m\left(\mathscr{G}^{-1}\right)_{mn}\frac{\partial K}{\partial\varphi_m^*}\left(-\sum_{kl}\left(\mathscr{G}^{-1}\right)_{kl}\frac{\partial K}{\partial\varphi_l}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi_k}\right)^* + 3f^*\right) \\ & - \sum_m\left(\mathscr{G}^{-1}\right)_{mn}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi_m}\right)^*,\end{aligned} \tag{31.6.58}$$

$$s - ip = \frac{\kappa}{2N}\left(-\sum_{lk}\left(\mathscr{G}^{-1}\right)_{kl}\frac{\partial K}{\partial\varphi_l}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi_k}\right)^* + 3f^*\right), \tag{31.6.59}$$

*Хотя обычно принято следовать этой процедуре, строго говоря, она не вполне корректна, т. к. даже когда лагранжиан квадратичен по вспомогательным полям, коэффициенты при членах второго порядка по вспомогательным полям зависят от других полей. Вследствии этого, при взятии функционального интеграла по вспомогательным полям появляются определители коэффициентов при квадратичных членах, что эквивалентно добавлению в лагранжиан членов, пропорциональных $\delta^4(0) = (2\pi)^{-4}\int d^4k\,1$. Такие члены могут быть устранены с помощью размерной регуляризации, при которой $\int d^4k\,1 = 0$.

$$b_\mu = \frac{\kappa}{2(1-\kappa^2 K/3)} \operatorname{Im}\left(\sum_n \frac{\partial K}{\partial \varphi_n} \partial_\mu \varphi_n\right), \tag{31.6.60}$$

где

$$N \equiv 1 - \frac{\kappa^2}{3} K + \frac{\kappa^2}{3} \sum_{kl} \left(\mathscr{G}^{-1}\right)_{kl} \frac{\partial K}{\partial \varphi_l} \frac{\partial K}{\partial \varphi_k^*},$$

а $\mathscr{G}(\varphi, \varphi^*)$ — келерова метрика

$$\mathscr{G}_{nm}(\varphi, \varphi^*) \equiv \frac{\partial^2 K(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi_n \partial \varphi_m^*}. \tag{31.6.61}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (31.6.57) получаем бозонный лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\text{бозон}} = &-\frac{e}{2\kappa^2} R \left[1 - \frac{\kappa^2}{3} K\right] - e \sum_{nm} \mathscr{G}_{nm} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_n \partial_\nu \varphi_m^* \\ &+ \frac{e\kappa^2}{3N} \left| \sum_{mn} \left(\mathscr{G}^{-1}\right)_{nm} \frac{\partial f}{\partial \varphi_m} \frac{\partial K}{\partial \varphi_n^*} - 3f \right|^2 \\ &- \frac{e\kappa^2}{3(1-\kappa^2 K/3)} \operatorname{Im}\left[\sum_n \frac{\partial K}{\partial \varphi_n} \partial_\mu \varphi_n\right] \operatorname{Im}\left[\sum_n \frac{\partial K}{\partial \varphi_n} \partial_\nu \varphi_n\right] g^{\mu\nu} \\ &- e \sum_{mn} \left(\mathscr{G}^{-1}\right)_{nm} \frac{\partial f}{\partial \varphi_m} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_n}\right)^*. \end{aligned} \tag{31.6.62}$$

Как уже отмечалось в разделе 31.2 для случая слабого поля лагранжиан (31.6.62) имеет то неудобное свойство, что член Эйнштейна–Гильберта $-eR/2\kappa^2$ умножается на $(1-\kappa^2 K(\varphi, \varphi^*)/3)$, из-за чего эффективная гравитационная постоянная меняется от точки к точке. Чтобы исправить это, произведем преобразование Вейля, определяя новую метрику

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \left(1 - \kappa^2 K/3\right) g_{\mu\nu}. \tag{31.6.63}$$

Эйнштейновский лагранжиан записывается через новую метрику как

$$e g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \left(1 - \frac{\kappa^2}{3} K\right)^{-1} \tilde{e} \tilde{g}^{\mu\nu} \left(\widetilde{R}_{\mu\nu} + \frac{3}{2} \partial_\mu \ln\left(1 - \frac{\kappa^2}{3} K\right) \partial_\nu \ln\left(1 - \frac{\kappa^2}{3} K\right)\right),$$

где $\widetilde{R}_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, вычисленный с использованием метрики $\tilde{g}_{\mu\nu}$ вместо $g_{\mu\nu}$, а $\tilde{e} \equiv \sqrt{\operatorname{Det} \tilde{g}}$. Прямое вычисление дает теперь следующую форму бозонного лагранжиана (31.6.62)

$$\mathscr{L}_{\text{бозон}} = -\frac{\tilde{e}}{2\kappa^2} \tilde{g}^{\mu\nu} \widetilde{R}_{\mu\nu}$$

$$
\begin{aligned}
&-\tilde{e}\tilde{g}^{\mu\nu}\sum_{nm}\partial_\mu\varphi_n\partial_\nu\varphi_m^*\left[\left(1-\frac{\kappa^2}{3}K\right)^{-1}\frac{\partial^2 K}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m^*}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\kappa^2}{3}\left(1-\frac{\kappa^2}{3}K\right)^{-2}\frac{\partial K}{\partial\varphi_n}\frac{\partial K}{\partial\varphi_m^*}\right]\\
&+\frac{\tilde{e}\kappa^2}{3N}\left(1-\frac{\kappa^2}{3}K\right)^{-2}\left|\sum_{mn}\left(\mathscr{G}^{-1}\right)_{nm}\frac{\partial f}{\partial\varphi_m}\frac{\partial K}{\partial\varphi_n^*}-3f\right|^2\\
&-\tilde{e}\left(1-\frac{\kappa^2}{3}K\right)^{-2}\sum_{mn}\left(\mathscr{G}^{-1}\right)_{nm}\frac{\partial f}{\partial\varphi_m}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi_n}\right)^*.
\end{aligned}
\tag{31.6.64}
$$

Преобразование Вейля не только устраняет множитель $(1-\kappa^2 K/3)$ из лагранжиана Эйнштейна–Гильберта; оно также устраняет члены пропорциональные $\partial_\mu\varphi_n\partial_\nu\varphi_m$ и $\partial_\mu\varphi_n^*\partial_\nu\varphi_m^*$.

Полученная формула может быть упрощена еще больше введением вместо $K(\varphi,\varphi^*)$ *модифицированного потенциала Келера* $d(\varphi,\varphi^*)$, который мы определяем уравнением

$$
1-\frac{\kappa^2}{3}K\equiv\exp\left(-\frac{\kappa^2 d}{3}\right).
\tag{31.6.65}
$$

Мы также вводим новую метрику в пространстве скалярных полей

$$
g_{nm}\equiv\frac{\partial^2 d}{\partial\varphi_n\partial\varphi_m^*}.
\tag{31.6.66}
$$

Обратные матрицы для новой и старой метрики связаны соотношением

$$
\mathscr{G}^{-1}_{lk}=\exp(\kappa^2 d/3)\left[g^{-1}_{lk}+\frac{\kappa^2}{3}\frac{\sum_{mn}g^{-1}_{ln}g^{-1}_{mk}(\partial d/\partial\varphi_n)(\partial d/\partial\varphi_m^*)}{1-(\kappa^2/3)\sum_{mn}g^{-1}_{mn}(\partial d/\partial\varphi_n)(\partial d/\partial\varphi_m^*)}\right].
$$

Бозонный лагранжиан (31.6.64) теперь принимает более простую форму

$$
\mathscr{L}_{\text{бозон}}=-\frac{\tilde{e}}{2\kappa^2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu}-\tilde{e}\tilde{g}^{\mu\nu}\sum_{nm}g_{nm}\partial_\mu\varphi_n\partial_\nu\varphi_m^*-\tilde{e}V,
\tag{31.6.67}
$$

где $V(\varphi,\varphi^*)$ — потенциал

$$
V=\exp(\kappa^2 d)\left[\sum_{nm}g^{-1}_{nm}L_m L_n^*-3\kappa^2|f|^2\right],
\tag{31.6.68}
$$

в котором

$$
L_m\equiv\frac{\partial f}{\partial\varphi_m}+\kappa^2 f\frac{\partial d}{\partial\varphi_m}.
\tag{31.6.69}
$$

Потенциал (31.6.68), очевидно, имеет стационарную точку при значениях напряженности поля, удовлетворяющих условию $L_m = 0$. Однако, как мы установили в случае слабого поля, в этой точке вакуумная энергия принимает отрицательное значение $-3\kappa^2|f|^2$. Чтобы стационарная точка $L_m = 0$ соответствовала решению с плоским пространством, необходимо, чтобы величины $f(\varphi)$ и $\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n$ одновременно обращались в нуль при этих значениях полей. Рассмотрение выражений (31.6.58) и (31.6.59) показывает, что при таких значениях полей скалярные вспомогательные поля $\mathcal{F}_n$, s и p обращаются в нуль, поэтому вакуумные средние приращений (31.6.2) и (31.6.35) полей гравитино и кирального спинора при преобразовании суперсимметрии с постоянным α обращаются в нуль. Таким образом, вакуумное значение полей, при котором $f(\varphi)$ и $\partial f(\varphi)/\partial\varphi_n$ обращаются в нуль, является как раз таким значением, которое сохраняет ненарушенной глобальную суперсимметрию в классическом пределе. В следующем разделе мы рассмотрим вакуумные конфигурации, в которых суперсимметрия *нарушена*.

Мы не будем здесь показывать того, что дополнительные члены в бозонном лагранжиане, необходимые для включения калибровочных суперполей, не модифицируются гравитацией, за исключением общего детерминантного множителя $\tilde{e}$ и метрических множителей, необходимых для поднимания и опускания индексов. После устранения вспомогательных полей и выполнения преобразования Вейля полный бозонный лагранжиан для теории с калибровочными, киральными и гравитационными суперполями имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{бозон}}/\tilde{e} = -\frac{1}{2\kappa^2}\widetilde{R}^{\mu}{}_{\mu} - \sum_{nm} g_{nm} D_\mu\varphi_n D^\mu\varphi_m^* - \frac{1}{4}\sum_{AB}\operatorname{Re} f_{AB} F^A_{\mu\nu}F^{B\,\mu\nu}$$
$$-\frac{1}{8}\sum_{AB}\operatorname{Im} f_{AB} F^A_{\mu\nu}F^B_{\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} - V. \tag{31.6.70}$$

Здесь, в соответствии с обозначениями раздела 15.1, D_μ, $F^A_{\mu\nu}$ и t_A обозначают калибровочно-ковариантные производные, тензоры напряженности поля и представления калибровочных генераторов на киральных скалярных суперполях, f_{AB} — независимая аналитическая функция φ_n, все пространственно-временные индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики $\tilde{g}_{\mu\nu}$, потенциал V имеет вид

$$V = \exp\left(\kappa^2 d\right)\left[\sum_{nm} g^{-1}_{nm} L_m L_n^* - 3\kappa^2|f|^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum_{AB} f^{-1}_{AB}\left(\sum_{nm}\frac{\partial d}{\partial\varphi_n}(t_A)_{nm}\varphi_m\right)\left(\sum_{kl}\frac{\partial d}{\partial\varphi_k}(t_A)_{kl}\varphi_l\right)^*. \tag{31.6.71}$$

Бозонный потенциал в форме (31.6.71) имеет достаточно простой вид, чтобы стало очевидным, что члены в d, зависящие только от φ_n, или только от φ_n^*, могут быть заменены поправками к суперпотенциалу. А именно, если мы запишем

$$d(\varphi,\varphi^*) = \tilde{d}(\varphi,\varphi^*) + a(\varphi) + a(\varphi)^*, \qquad f(\varphi) = \tilde{f}(\varphi)\exp\Big(-\kappa^2 a(\varphi)\Big), \quad (31.6.72)$$

где $a(\varphi)$ — произвольная аналитическая функция, удовлетворяющая условию калибровочной инвариантности

$$\sum_{nm} \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi_n}(t_A)_{nm}\varphi_m = 0,$$

то потенциал (31.6.71), выраженный через $\tilde{d}$ и $\tilde{f}$, принимает тот же вид, какой он имел при записи через d и f. Переопределив суперпотенциал, можно затем устранить все члены в степенном разложении $d(\varphi,\varphi^*)$, которые зависят только от φ_n, или только от φ_n^*. Теперь видно, что главный член в степенном разложении $d(\varphi,\varphi^*)$ (тильду мы опускаем) имеет вид $\sum_{nm} d_{nm}\varphi_n\varphi_m^*$. Подходящим линейным преобразованием суперполей матрицу d_{nm} можно сделать равной δ_{nm}, при этом степенное разложение $d(\varphi,\varphi^*)$ начинается с члена

$$d(\varphi,\varphi^*) = \sum_n |\varphi_n|^2 + \cdots, \quad (31.6.73)$$

а степенное разложение метрики (31.6.66) начинается как

$$g_{nm} = \delta_{nm} + \cdots. \quad (31.6.74)$$

Рассмотрев второй член в правой части выражения (31.6.67), видим, что определенные таким образом скалярные поля канонически нормированы.

Фермионные члены намного сложнее. Здесь мы приведем только члены, квадратичные по полям калибрино,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{(2)}_{\text{калибрино}}/\tilde{e} = &-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_{AB} f_{AB}\Big(\bar{\lambda}_A \not{D}\lambda_B\Big)\\ &+\frac{1}{2}\exp(\kappa^2 d/2)\,\mathrm{Re}\sum_{mn}\sum_{AB} g^{-1}_{nm}L_m\left(\frac{\partial f_{AB}}{\partial\varphi_n}\right)^*\Big(\bar{\lambda}_A\lambda_B\Big), \quad (31.6.75)\end{aligned}$$

где L_m задается формулой (31.6.69). Мы видим, что если калибровочные поля канонически нормированы, то постоянный член в разложении f_{AB} по степеням скалярных полей равен δ_{AB}, следовательно поля калибрино λ_A также канонически нормированы.

* * *

Вместо того, чтобы перемещать все аналитические члены и им комплексно сопряженные из $d(\varphi,\varphi^*)$ в суперпотенциал, можно использовать преобразование (31.6.72), чтобы сделать новый суперпотенциал $\tilde{f}(\varphi)$ равным константе, которая может быть выбрана равной единице, если взять $a(\varphi) = -\kappa^{-2}\ln f(\varphi)$. Тогда потенциал зависит только от функции

$$\mathscr{D}(\varphi,\varphi^*) \equiv d(\varphi,\varphi^*) + 2\kappa^{-2}\operatorname{Re}\ln f(\varphi), \tag{31.6.76}$$

и принимает вид

$$V = \exp\left(\kappa^2\mathscr{D}\right)\left[\kappa^4\sum_{nm} g^{-1}_{nm}\left(\frac{\partial\mathscr{D}}{\partial\varphi_m}\right)\left(\frac{\partial\mathscr{D}}{\partial\varphi_n}\right)^* - 3\kappa^2\right] + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum_{AB} f^{-1}_{AB}\left(\sum_{nm}\frac{\partial\mathscr{D}}{\partial\varphi_m}(t_A)_{nm}\varphi_m\right)\left(\sum_{kl}\frac{\partial\mathscr{D}}{\partial\varphi_k}(t_A)_{kl}\varphi_l\right)^*. \tag{31.6.77}$$

Метрика (31.6.66) для скалярных полей также может быть переписана в виде

$$g_{nm} = \frac{\partial^2\mathscr{D}}{\partial\varphi_n\partial\varphi^*_m}. \tag{31.6.78}$$

Хотя мы и не показали этого здесь, симметрия, которая позволяет заменить келеров потенциал и суперпотенциал одной функцией $\mathscr{D}(\varphi,\varphi^*)$, позволяет также сделать эту замену в полном лагранжиане, включая все члены, содержащие фермионы и калибровочные поля.

Существует интересный класс теорий, в которых нет масштабного параметра [13a], когда потенциал V равен нулю для всех значений φ_m. Например, так бывает в случае одного калибровочно-нейтрального кирального скалярного суперполя при

$$\mathscr{D} = -3\kappa^{-2}\ln\Big(h(\varphi) + h(\varphi)^*\Big), \tag{31.6.79}$$

где $h(\varphi)$ — произвольная функция от φ. Однако, ни один известный нам принцип не требует, чтобы функция $\mathscr{D}$ принимала этот вид.

31.7. Вызванное гравитацией нарушение суперсимметрии

Вернемся к проблеме нарушения суперсимметрии. Как было выяснено в начале главы 28, если суперсимметрия используется для решения проблемы иерархии взаимодействий, т. е. для объяснения большого отношения массы Планка $m_{\text{Планк}} \equiv 1/\sqrt{8\pi G}$ к характерным массам наблюдаемых частиц, то суперсимметрия должна быть ненарушенной на планковских масштабах и спонтанно нарушаться только на некотором много меньшем масштабе масс. Единственный известный приемлемый механизм, который мог бы естественным образом привести к очень большому отношению масштабов масс — непертурбативный эффект асимптотически свободных калибровочных взаимодействий. Если эти взаимодействия умеренно слабы на планковских масштабах, то их медленный рост по мере уменьшения энергии сделает их сильными при много меньших масштабах $\Lambda \ll m_{\text{Pl}}$. Известные элементарные частицы не чувствуют таких сильных взаимодействий, так что независимо от того, нарушается ли суперсимметрия прямо или косвенно этими сильными калибровочными взаимодействиями, нарушение суперсимметрии должно передаваться наблюдаемым частицам через какое-либо взаимодействие, в котором они участвуют.

В разделе 28.3 мы отметили два возможных механизма передачи нарушения суперсимметрии наблюдаемым частицам. Один механизм — вызванное калибровочным взаимодействием нарушение суперсимметрии — детально обсуждался в разделе 28.6. Теперь мы готовы рассмотреть другой механизм — вызванное гравитацией нарушение суперсимметрии.

В начале 1980-х годов, когда гравитация была впервые рассмотрена как посредник при нарушении суперсимметрии [14], обычно предполагалось, что суперпотенциал состоит из двух членов: функции $f(\Phi)$ различных левокиральных суперполей Φ_r *наблюдаемого сектора*, включающих все суперполя наблюдаемых частиц, и функции $\tilde{f}(Z)$ различных левокиральных суперполей Z_k *скрытого сектора* [15], которые нейтральны относительно калибровочной группы $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ стандартной модели. Далее, суперпотенциал скрытого сектора брался в виде

$$\tilde{f}(Z) = \varepsilon^3 F(\kappa Z), \tag{31.7.1}$$

где ε — некоторая масса много меньше планковской, а $F(\kappa Z)$ — степенной ряд по κZ с коэффициентами порядка единицы. Предположение, что суперпотенциал должен быть суммой $f(\Phi)+\tilde{f}(Z)$ является отчасти произвольным, но, как мы увидим далее, несложно вообразить причины, по которым это должно быть хотя бы приблизительно верно. Более серьезная критика такого подхода состоит в том, что он не дает никакой надежды на решение проблемы иерархии взаимодействий — энергия ε просто полагается много меньше планковской массы.

После развития этих первых моделей вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии, появились другие модели, в которых иерархия масштабов энергии объясняется естественным образом с помощью медленного роста с уменьшением энергии калибровочного взаимодействия, которое становится сильным на энергиях $\Lambda \ll m_{\text{Pl}}$. Существуют две версии этих моделей, которые различаются предлагаемым источником нарушения суперсимметрии. Как мы увидим, в обеих версиях скварки и слептоны получают обусловленные нарушением суперсимметрии массы, порядка массы гравитино m_g, но формулы для m_g различаются; в первой версии $m_g \approx \kappa\Lambda^2$, тогда как во второй $m_g \approx \kappa^2\Lambda^3$, что дает $\Lambda \approx 10^{11}$ ГэВ и $\Lambda \approx 10^{13}$ ГэВ соответственно. Две версии различаются также в формулах для других параметров мягкого нарушения суперсимметрии, включая $B\mu$, A-параметры и массы калибрино.

Первая версия [16]

В этой версии вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии предполагается, что участвующие в теории суперполя делятся на два сектора.

Наблюдаемый сектор составляют суперполя минимальной суперсиметричной стандартной модели: калибровочные суперполя $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, а также кварковые, антикварковые, лептонные, антилептонные и хиггсовские левокиральные суперполя, которые мы будем обозначать Φ_r.

Скрытый сектор составляют калибровочные суперполя асимптотически свободного калибровочного взаимодействия, которое становится сильным на промежуточном масштабе энергий Λ, $m_W \ll \Lambda \ll m_{\text{Pl}}$, а также левокиральные суперполя Z_k, которые участвуют в этом калибровочном взаимодействии.

Поля Z_k предполагаются нейтральными относительно калибровочной группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, поскольку в противном случае, мы вернулись бы к модели нарушения суперсимметрии калибровочным взаимодействием. Кроме того, мы знаем достаточно о наблюдаемом секторе, чтобы быть уверенными, что его киральные суперполя не участвуют в калибровочных взаимодействиях скрытого сектора.

Чтобы естественным образом получить перенормируемую часть общего суперпотенциала вида $f(\Phi) + \tilde{f}(Z)$, можно предположить, что симметрия, которая остается при энергиях ниже планковской, включает группу G_H (которая может быть частью калибровочной группы скрытого сектора), относительно которой инвариантны все поля наблюдаемого сектора и ни одно поле скрытого сектора, и группу G_O (которая может быть частью калибровочной группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ наблюдаемого сектора), относительно которой инвариантны все поля скрытого сектора и ни одно поле наблюдаемого сектора. В этом случае, если какое-либо поле наблюдаемого сектора появляется в каком-либо члене суперпотенциала, то в этом члене наблюдаемые поля должны встречаться по крайней мере дважды, а также, если какое-либо поле скрытого сектора появляется в каком-либо члене суперпотенциала, то в этом члене скрытые поля должны встречаться по крайней мере дважды. Таким образом, ни один член в кубическом полиномиальном суперпотенциале не может включать поля обоих секторов одновременно. Это соображение оставляет открытой возможность неперенормируемых членов в суперпотенциале, которые включают не менее чем по два множителя из обоих секторов. К рассмотрению такой возможности мы вернемся позже. Конечно, предполагается, что сильные взаимодействия скрытого сектора порождают дополнительные непертурбативные члены в полном суперпотенциале скрытого сектора $\tilde{f}(Z)$, но эти члены также зависят только от суперполей скрытого сектора.

Предположив, что суперпотенциал принимает форму $f(\Phi)+\tilde{f}(Z)$, получаем, что потенциал скалярных компонент этих суперполей задается уравнением (31.6.71) как

$$
\begin{aligned}
V = e^{\kappa^2 d}\Bigg[&\sum_{rs} g_{rs}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_r}+\kappa^2(f+\tilde{f})\frac{\partial d}{\partial \varphi_r}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_s}+\kappa^2(f+\tilde{f})\frac{\partial d}{\partial \varphi_s}\right)^*\\
&+2\,\mathrm{Re}\sum_{rk} g_{rk}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_r}+\kappa^2(f+\tilde{f})\frac{\partial d}{\partial \varphi_r}\right)\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_k}+\kappa^2(f+\tilde{f})\frac{\partial d}{\partial z_k}\right)^*\\
&+\sum_{kl} g_{kl}^{-1}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_k}+\kappa^2(f+\tilde{f})\frac{\partial d}{\partial z_k}\right)\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_l}+\kappa^2(f+\tilde{f})\frac{\partial d}{\partial z_l}\right)^*\\
&-3\kappa^2\left|f+\tilde{f}\right|^2\Bigg]\\
&+\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_{AB} f_{AB}^{-1}\left(\sum_{kl}\frac{\partial d}{\partial z_k}(t_A)_{kl}z_l\right)\left(\sum_{mn}\frac{\partial d}{\partial z_m}(t_A)_{mn}z_n\right)^*\\
&+\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_{AB} f_{AB}^{-1}\left(\sum_{rs}\frac{\partial d}{\partial \varphi_r}(t_A)_{rs}\varphi_s\right)\left(\sum_{tu}\frac{\partial d}{\partial \varphi_t}(t_A)_{tu}\varphi_u\right)^*.
\end{aligned}
\tag{31.7.2}
$$

Выписывая члены, обусловленные калибровочными взаимодействиями, мы предполагали, что калибровочные бозоны скрытого и наблюдаемого секторов не смешиваются, т. е., что f_{AB}^{-1} равно нулю для любой пары генераторов t_A и t_B, таких, что t_A действует нетривиальным образом на φ_r, а t_B — на z_k, или наоборот.

Нас интересует рассмотрение области в пространстве полей, в которой скалярные поля z_k скрытого сектора имеют порядок Λ, переменная часть суперпотенциала скрытого сектора $\tilde{f}(z)$ — порядка Λ^3, а $\partial\tilde{f}/\partial z_k$ по соображениям размерности имеет порядок Λ^2. Вопрос о величине постоянной части $\tilde{f}$ оставляем пока открытым; как мы увидим далее, чтобы скомпенсировать космологическую постоянную, необходимо включить в $\tilde{f}$ постоянный член, много больший чем Λ^3.

Определим теперь ту область в пространстве полей, которую будем исследовать, требованием, чтобы поля φ_r наблюдаемого сектора имели порядок $\kappa\Lambda^2$, потому что, как мы увидим далее, именно такой масштаб масс возникает в наблюдаемом секторе в результате гравитационных эффектов нарушения суперсимметрии в скрытом секторе. Предполагается, что суперпотенциал наблюдаемого сектора $f(\varphi)$ для полей порядка $\kappa\Lambda^2$ имеет порядок $\kappa^3\Lambda^6$, а его производные $\partial f(\varphi)/\partial\varphi_r$ — порядок $\kappa^2\Lambda^4$.

Как следствие определений суперпотенциала и скалярных полей, рассмотренных в конце предыдущего раздела, и предположения о симметрии $G_H \times G_O$, модифицированный келеров потенциал принимает вид*

$$\begin{aligned} d(\varphi,\varphi^*,z,z^*) = &\sum_r |\varphi_r|^2 + \sum_k |z_k|^2 + O(\kappa^2 z^{*2} z^2) \\ &+ O(\kappa^2 z^* z^3) + O(\kappa^2 z^{*3} z) + O(\kappa^2 \varphi^{*2} z^2) + O(\kappa^2 \varphi^{*2} z^* z) \\ &+ O(\kappa^2 z^{*2} \varphi^2) + O(\kappa^2 z^* z \varphi^2) + O(\kappa^2 \varphi^* \varphi z^2) \\ &+ O(\kappa^2 z^{*2} \varphi^* \varphi) + O(\kappa^2 \varphi^* z^* \varphi z) + O(\kappa^2 \varphi^{*2} \varphi^2) \\ &+ O(\kappa^2 \varphi^* \varphi^3) + O(\kappa^2 \varphi^{*3} \varphi) + \cdots, \end{aligned} \tag{31.7.3}$$

где точки заменяют члены высших порядков. Метрика (31.6.66) теперь имеет компоненты

$$\begin{aligned} g_{rs} = \delta_{rs} &+ O(\kappa^2 z^2) + O(\kappa^2 z^{*2}) + O(\kappa^2 z^* z) \\ &+ O(\kappa^2 \varphi^2) + O(\kappa^2 \varphi^{*2}) + O(\kappa^2 \varphi^* \varphi) + \cdots, \end{aligned} \tag{31.7.4}$$

$$\begin{aligned} g_{kl} = \delta_{kl} &+ O(\kappa^2 z^2) + O(\kappa^2 z^{*2}) + O(\kappa^2 z^* z) \\ &+ O(\kappa^2 \varphi^2) + O(\kappa^2 \varphi^{*2}) + O(\kappa^2 \varphi^* \varphi) + \cdots, \end{aligned} \tag{31.7.5}$$

$$g_{rk} = g^*_{kr} = O(\kappa^2 \varphi z^*) + O(\kappa^2 \varphi z) + O(\kappa^2 \varphi^* z^*) + O(\kappa^2 \varphi^* z) + \cdots. \tag{31.7.6}$$

(Характерный масштаб энергий для d предполагается порядка $1/\kappa$, потому, что d — модифицированный келеров потенциал, обусловленный неизвестными динамическими эффектами на планковских масштабах, в отличие от $\tilde{f}$, обусловленного динамическими эффектами сильного калибровочного взаимодействия на масштабах порядка Λ.) Величины g_{rs} и g_{kl} обычно

*Выражение $O(\kappa^2 z^{*2} z^2)$ обозначает член вида $\kappa^2 \sum_{klmn} C_{klmn} z_k^* z_l^* z_m z_n$, где C_{klmn} — постоянные коэффициенты порядка единицы. Аналогично следует понимать другие подобные члены в уравнениях (31.7.3)–(31.7.6).

порядка единицы, тогда как смешанные компоненты g_{rk} и g_{kr} — порядка $\kappa^2(\kappa\Lambda^2)\Lambda = \kappa^3\Lambda^3 \ll 1$. Следовательно, то же самое верно и для компонент g^{-1}: $(g^{-1})_{rs}$ и $(g^{-1})_{kl}$ обычно порядка единицы, а $(g^{-1})_{rk}$ и $(g^{-1})_{kr}$ — порядка $\kappa^3\Lambda^3 \ll 1$.

Из этих оценок следует, что если не произойдет никаких сокращений, доминирующие члены в потенциале (31.7.2) имеют, по крайней мере, порядок Λ^4, и записываются в виде

$$[V]_{\Lambda^4} = \sum_k \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_k}\right|^2 - 3\kappa^2 |\tilde{f}^0|^2, \tag{31.7.7}$$

где $\tilde{f}^0$ — постоянный член в $\tilde{f}$, который понадобится, чтобы скомпенсировать энергию вакуума. Мы предполагаем, что суперсимметрия спонтанно нарушена в скрытом секторе, а это требует, чтобы существовала точка z_k^0, в которой $\sum_k |\partial\tilde{f}/\partial z_k|^2$ имеет по меньшей мере локальный минимум, не равный, однако, нулю. Тогда, чтобы скомпенсировать энергию вакуума в рассматриваемом порядке, следует положить

$$3\kappa^2 |\tilde{f}^0|^2 = \sum_k \left|\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_k}\right)^0\right|^2, \tag{31.7.8}$$

где индекс 0 в правой части равенства указывает, что величина берется в точке $z = z^0$. Следовательно, необходимо придать $\tilde{f}^0$ аномально большое значение порядка Λ^2/κ. Это гораздо более сильное условие тонкой настройки, чем то, которое, как мы увидим, требуется во второй версии вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии. Однако в отсутствие реального понимания смысла космологической постоянной, какая-то тонкая настройка будет необходима в любой теории нарушения суперсимметрии.

Мы можем вычислить параметр нарушения суперсимметрии F в формуле (31.3.17) для массы гравитино, полагая плотность энергии вакуума $F^2/2$ равной значению величины $\sum_k |(\partial\tilde{f}/\partial z_k)^0|^2$ в плоском пространстве. Масса гравитино тогда определяется из уравнений (31.3.17) и (31.7.8) как

$$m_g = \kappa \sqrt{\frac{1}{3}\sum_k \left|\left(\frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial z_k}\right)^0\right|^2} = \kappa^2 |\tilde{f}^0|. \tag{31.7.9}$$

Эта величина того же порядка $\approx \kappa\Lambda^2$, что и скалярные поля наблюдаемого сектора.

Перейдем к членам (31.7.2), которые *зависят* от скаляров наблюдаемого сектора φ_r. Мы рассматриваем значения полей, для которых обычный суперсимметричный член $\sum_r |\partial f/\partial\varphi_r|^2$ — порядка $m_g^4 \approx \kappa^4\Lambda^8$, так что нужно собрать все зависящие от φ члены уравнения (31.7.2) этого и более высоких порядков. Рассмотрим каждую из шести строк правой части уравнения (31.7.2).

Главный член в $\kappa^2(f+\tilde{f})\partial d/\partial\varphi_r$ — это $\kappa^2\tilde{f}^0\varphi_r^*$, который, подобно $\partial f/\partial\varphi_r$, имеет порядок $\kappa^2(\Lambda^2/\kappa)(\kappa\Lambda^2) = \kappa^2\Lambda^4$, тогда как остальные члены $\kappa^2(f+\tilde{f})\partial d/\partial\varphi_r$ много меньше. В главном порядке можно заменить $\exp(\kappa^2 d)$ единицей, а g_{rs}^{-1} — единичной матрицей δ_{rs}, так что в этом порядке первая строка (31.7.2) дает

$$\sum_r \left| \frac{\partial f}{\partial\varphi_r} + \kappa^2\tilde{f}^0\varphi_r^* \right|^2 .$$

Это выражение имеет нужный порядок $\kappa^4\Lambda^8$, поэтому нет необходимости рассматривать поправки высших порядков.

Главный член в g_{rk}^{-1} имеет порядок $\kappa^3\Lambda^3$, главный член в $\partial\tilde{f}/\partial z_k$ — порядок Λ^2, тогда как $\kappa^2(f+\tilde{f})\partial d/\partial z_k$ меньше, порядка $\kappa\Lambda^3$; мы видели, что главный член в $\partial f/\partial\varphi_r + \kappa^2(f+\tilde{f})\partial d/\partial\varphi_r$ порядка $\kappa^2\Lambda^4$, так что член во второй строке (31.7.2) имеет порядок $(\kappa^3\Lambda^3)(\Lambda^2)(\kappa^2\Lambda^4) = \kappa^5\Lambda^9$, и им можно пренебречь по сравнению с членами уравнения (31.7.2) порядка $\kappa^4\Lambda^8$.

Главные члены в третьей и четвертой строках (31.7.2) порядка Λ^4, однако они не зависят от φ_r. От φ зависят члены третьей строки, содержащие f; главные члены такого типа $2\kappa^2\,\mathrm{Re}[f\sum_k z_k^*(\partial\tilde{f}/\partial z_k)^*]$ имеют порядок $\kappa^5\Lambda^9 \ll \kappa^4\Lambda^8$, поэтому ими можно пренебречь. Аналогично, от φ зависят члены четвертой строки (31.7.2), содержащие f. Главные члены этого типа

$$-6\kappa^2\,\mathrm{Re}[f\tilde{f}^{0*}]$$

имеют порядок $\kappa^2(\kappa\Lambda^2)^3\Lambda^2/\kappa = \kappa^4\Lambda^8$. Множитель $\exp(\kappa^2 d)$ содержит зависящие от φ члены порядка $\kappa^2(\kappa\Lambda^2)^2$, но они умножаются на потенциал, главные члены которого (31.7.7) были подобраны так, чтобы взаимно компенсироваться до порядка Λ^4, так что возникающие отсюда зависящие от φ члены много меньше чем $\kappa^4\Lambda^8$. Существует еще один тип зависящих от φ членов, возникающий из зависящих от φ компонент g_{kl}^{-1}. Согласно (31.7.4)–(31.7.6), эти члены могут быть записаны как $\kappa^2 u_{kl}(\varphi,\varphi^*)$, где u_{kl} — однородный квадратичный полином от φ_r и φ_r^* с коэффициентами порядка единицы. Это порождает зависящий от φ член в третьей строке (31.7.2) вида

$$\kappa^2\sum_{kl} u_{kl}(\varphi,\varphi^*)\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial z_k}\right)^0\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial z_l}\right)^{0*},$$

порядок которого $\kappa^2(\kappa\Lambda^2)^2\Lambda^4 = \kappa^4\Lambda^8$.

Главный зависящий от φ член в пятой строке (31.7.2) возникает либо из членов $\kappa^2\varphi^2$ в f_{AB}^{-1} и главных членов в обоих d порядка z^*z, либо из членов в одном из d с двумя множителями κ, двумя φ и(или) φ^* и двумя z и(или) z^*, при f_{AB}^{-1} и другом d заданных главными членами порядка 1 и z^*z соответственно. Оба типа зависящих от φ членов дают вклад порядка $\kappa^2(\kappa\Lambda^2)^2\Lambda^4 = \kappa^4\Lambda^8$, поэтому членами высших порядков можно пренебречь.

Главный член в шестой строке (31.7.2) возникает из главного члена f_{AB}^{-1} порядка единицы и главных зависящих от φ членов в d порядка $\varphi^*\varphi$. Это дает вклад в потенциал порядка $(\kappa\Lambda^2)^4$, так что и здесь членами высших порядков можно пренебречь.

Потенциал (31.7.2) содержит также не зависящие от φ члены порядков $\kappa^2\Lambda^6$, $\kappa^4\Lambda^8$ и т. д. Члены порядка $\kappa^2\Lambda^6$ могут быть взаимно скомпенсированы, а членам порядка $\kappa^4\Lambda^8$ можно придать произвольное значение $\mathscr{C}$, немного сдвинув постоянный член в $\tilde{f}(z)$ от значения, задаваемого уравнением (31.7.8).

Собирая эти результаты вместе, находим, что до порядка $\kappa^4\Lambda^8 \approx m_g^4$ потенциал наблюдаемого сектора имеет вид

$$V_O(\varphi,\varphi^*) = \sum_r \left| \frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_r} + \kappa^2 \tilde{f}^0 \varphi_r^* \right|^2 - 6\kappa^2 \operatorname{Re}\left[f(\varphi)\tilde{f}^{0*} \right]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_A \left| \sum_{rs} \varphi_r^* (t_A)_{rs} \varphi_s \right|^2 + Q(\varphi,\varphi^*) + \mathscr{C}, \qquad (31.7.10)$$

где $Q(\varphi,\varphi^*)$ — квадратичный полином по φ и(или) φ^* с коэффициентами порядка $\kappa^2\Lambda^4 \approx m_g^2$, который образуется из зависящих от φ членов g_{kl}^{-1} в третьей строке и из зависящих от φ членов в f_{AB}^{-1} и d в пятой строке формулы (31.7.2). Мы нормировали калибровочные суперполя так, что $f_{AB} = \delta_{AB}$, когда все скалярные поля обращаются в нуль. (Есть также зависимость от φ, возникающая в результате зависящего от φ сдвига равновесных значений скаляров скрытого сектора z_k, но этот сдвиг по порядку величины не больше $(\kappa\Lambda^2)^4/\Lambda^3$, и, поскольку выражение (31.7.7) предполагается стационарным при $z = z^0$, этот сдвиг входит квадратично в эффективный потенциал полей наблюдаемого сектора, вследствии чего им можно пренебречь.) Постоянная $\mathscr{C}$ может быть выбрана так, чтобы значение этого потенциала в точке минимума равнялось нулю.

В заключение вернемся к неперенормируемым членам суперпотенциала. Как уже упоминалось ранее, главные зависящие от Φ члены этого типа должны быть порядка $\kappa\Phi^2 Z^2$. Когда суперполя скрытого сектора Z_k взяты равными равновесным значениям z_k^0, эти члены становятся полиномами второго порядка по Φ_r с коэффициентами порядка $\kappa\Lambda^2$. Поэтому в главном порядке можно учесть эти неперенормируемые члены, просто включая в суперпотенциал квадратичную полиномиальную функцию от Φ_r с коэффициентами порядка $\kappa\Lambda^2 \approx m_g$.

Таким образом, теории вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии избегают проблемы μ-члена, обсуждавшейся в разделах 28.1 и 28.5. Вспомним, что симметрия стандартной модели $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ допускает единственный суперперенормируемый член в суперпотенциале минимальной суперсимметричной стандартной модели, имеющий вид $\mu(H_1^{\mathrm{T}}eH_2)$. Чтобы естественным образом объяснить, почему коэффициент μ не равен по порядку массе Планка, необходимо потребовать выполнения какой-то симметрии, подобной симметрии Печчеи–Квинна, рассмотренной в связи сильным нарушением CP-инвариантности в разделе 23.6, относительно которой произведение $(H_1^{\mathrm{T}}eH_2)$ не нейтрально. Однако, μ-член с μ того же порядка, что m_g, как и другие связанные с нарушением суперсимметрии массы, был признан феноменологически необходимым в разделе 28.5. Такой член может естественно возникнуть при нарушении симметрии Печчеи–Квинна вакуумными средними полей скрытого сектора* если суперпотенциал содержит неперенормируемый член, в котором $(H_1^{\mathrm{T}}eH_2)$ умножается на две степени полей скрытого сектора z_k с коэффициентом порядка κ.

Поэтому мы предполагаем, что эффективный суперпотенциал $f(\varphi)$ состоит из однородного полинома $f^{(3)}(\varphi)$ третьей степени по полям φ_r, с коэффициентами, грубо говоря, порядка единицы, плюс μ-член, который принимает вид однородного полинома $f^{(2)}(\varphi)$ второй степени по φ_r с коэффициентами порядка $m_g \approx \kappa\Lambda^2$. Потенциал (31.7.10) принимает тогда вид

$$\begin{aligned} V_O(\varphi,\varphi^*) = {}& \sum_r \left|\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi_r}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_A \left|\sum_{rs}\varphi_r^*(t_A)_{rs}\varphi_s\right|^2 \\ & - 2\kappa^2\,\mathrm{Re}\left[f^{(2)}(\varphi)\tilde{f}^{0*}\right] + \kappa^4|\tilde{f}^0|^2\sum_r|\varphi_r|^2 + Q(\varphi,\varphi^*) + \mathscr{C}. \end{aligned} \quad (31.7.11)$$

Члены в первой строке в правой части уравнения дают суперсимметричный потенциал, тогда как члены во второй и третьей строках приводят к мягкому нарушению суперсимметрии. При $\tilde{f}^0 \approx \Lambda^2/\kappa$ и $(\partial\tilde{f}/\partial z)^0 \approx \Lambda^2$ все размерные постоянные в членах, ответственных за мягкое нарушение суперсимметрии

---

*Это известно как механизм Джудиче–Мазиеро [17]. Он часто описывается в терминах неперенормируемых аналитических и антианалитических членов в модифицированном келеровом потенциале d, но, как говорилось в конце предыдущего раздела, любой такой член может быть заменен аналитическим множителем в суперпотенциале. Здесь мы *определили* d так, что d не содержит аналитических и антианалитических членов. При этом определении μ-член может возникнуть только из неперенормируемых членов в суперпотенциале.

в (31.7.10), являются степенями $\kappa\Lambda^2 \approx m_g$, так что именно отсюда мы можем рассчитывать извлечь средние значения скалярных полей наблюдаемого сектора, подтверждающие наш выбор области в пространстве полей.

Положив $\kappa\Lambda^2$ равным типичной массе ≈ 1 ТэВ эффективного лагранжиана суперсимметричной стандартной модели, находим $\Lambda \approx 10^{11}$ ГэВ. Это немного обнадеживает, поскольку, как было показано в разделе 23.6, спонтанное нарушение симметрии Печчеи–Квинна на масштабе $\Lambda \approx 10^{11}$ ГэВ как раз подходит, чтобы решить проблему сильного нарушения CP-инвариантности при масштабе нарушения суперсимметрии в диапазоне от 10^{10} ГэВ до 10^{12} ГэВ, допускаемом астрономическими наблюдениями.

Сравнивая потенциал с вкладом скалярных полей в плотность лагранжиана (28.4.1) минимальной суперсимметричной стандартной модели, видим, что эта версия нарушения суперсимметрии гравитацией предсказывает, что суперсимметрия нарушается только мягкими скалярными массовыми членами с коэффициентами (включая $B\mu$) порядка m_g^2. В главном порядке по $\kappa\Lambda$ коэффициенты A и C трилинейного нарушающего суперсимметрию члена обращаются в нуль.

Серьезная проблема при интерпретации этих результатов состоит в том, что отсутствуют причины, по которым квадратичный полином $Q(\varphi,\varphi^*)$ в уравнении (31.7.11) должен сохранять обсуждавшееся в разделе 28.4 вырождение масс скварков и слептонов, которое позволило бы избежать ненаблюдаемых процессов с изменением аромата. Однако четвертый член в уравнении для потенциала (31.7.11) дает одинаковую для всех скаляров дополнительную добавку $\kappa^4|\tilde{f}^0|^2 \approx \kappa^2\Lambda^4$ к квадратам масс скаляров, так что ограничения сверху, налагаемые экспериментальными данными на процессы с изменением аромата, будут выполняться, если коэффициенты в $Q(\varphi,\varphi^*)$ (которые образуются из членов третьей и четвертой строк уравнения (31.7.2)) окажутся малыми по сравнению с $\kappa^2\Lambda^4$.

Если бы действительно можно было пренебречь полиномом $Q(\varphi,\varphi^*)$, то возникло бы интересное соотношение между параметрами минимальной суперсимметричной стандартной модели. Если записать квадратичную часть суперпотенциала $f^{(2)}$ как $\mu(\varphi_1^{\mathrm{T}} e \varphi_2)$, то коэффициент $B\mu$ в уравнении (28.4.1) задавался бы вторым членом в выражении (31.7.11) как $B\mu = -\kappa^2\mu\tilde{f}^{0*}$, так что

$$|B| = \kappa^2|\tilde{f}^0| = m_g,$$

в согласии с соотношением (31.4.13). Кроме того, все массы скварков и слептонов M_s задавались бы третьим членом (31.7.11) как $\kappa^2|\tilde{f}^0|$, а следовательно, мы имели бы новое соотношение

$$|B| = M_s. \tag{31.7.12}$$

При равенстве масс всех скварков и слептонов выполнялись бы все ограничения на процессы с изменением аромата. Более того, если пренебречь Q, то в нарушающей суперсимметрию части потенциала (31.7.11) останется только один комплексный параметр $\tilde{f}^0$, который может быть сделан действительным путем переопределения общей фазы суперпотенциала, так что теперь нарушающая суперсимметрию часть потенциала не добавляла бы нового нарушения CP-инвариантности. Однако мы не знаем никаких причин, по которым Q должно быть малым.

Другая серьезная проблема этой версии вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии состоит в том, что такая теория не дает достаточно больших масс калибрино [18]. Согласно (31.6.75), матрица масс калибрино группы $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ в древесном приближении задается выражением

$$m_{AB} = \exp\left(\kappa^2 d/2\right)\sum_{NM}[g^{-1}]_{NM}L_N\left(\frac{\partial f_{AB}}{\partial\phi_M}\right)^*, \qquad (31.7.13)$$

где ϕ_N пробегает при разных N все скалярные поля φ_r и z_k, от которых может зависеть f_{AB}, g_{NM} и L_M задаются формулами (31.6.66) и (31.6.69). Согласно сделанным здесь оценкам, $\kappa^2 d = O(\kappa^2\Lambda^2) \ll 1$; $L_k = O(\Lambda^2)$, в то время как L_r много меньше, а g^{-1}_{kl} — порядка единицы. Мы также предполагаем, что f_{AB} — член порядка единицы плюс член порядка κ^{-2}, умноженный на билинейную комбинацию скалярных полей и им комплексно сопряженных, так что $\partial f_{AB}/\partial z_k$ — порядка $\kappa^2\Lambda$. Отсюда массы калибрино порядка $\Lambda^2\times\kappa^2\Lambda$. Это много меньше, чем масса гравитино $m_g\approx\kappa\Lambda^2$ (которая задает масштаб нарушающих суперсимметрию членов в потенциале скалярных полей наблюдаемого сектора (31.7.11)), отличаясь от нее на множитель порядка $\kappa\Lambda\approx 10^{-7}$, так что если порождаемые нарушением суперсимметрии массы скаляров имеют порядок 1 ТэВ, то массы калибрино должны быть порядка 100 кэВ, что намного меньше предела, вытекающего из того факта, что калибрино до сих пор не наблюдались.

Есть несколько способов обойти эту трудность. Один из них состоит в добавлении к полям z_k скрытого сектора калибровочно синглетных скалярных полей, которые линейно входят в f_{AB} [19]. В этом случае $\partial f_{AB}/\partial z_k$ будет порядка κ, а не $\kappa^2\Lambda$, массы калибрино — порядка $\kappa\Lambda^2$, что сравнимо с массами скварков и слептонов. Одна из сложностей этого подхода состоит в том, что из-за включения нейтральных по отношению ко всем калибровочным группам скаляров для перенормируемой части суперпотенциала больше не является естественным иметь форму $f(\varphi)+\tilde{f}(z)$.

Даже без калибровочных синглетов имеется однопетлевой вклад в массы глюино, вино и бино (а также в A-параметры), вычисленный в разделе 31.4. Например, если мы возьмем для m_g максимальное значение ≈ 10 ТэВ, которое допускается обсуждавшимся в разделе 28.1 условием «естественности», то при $g_s^2/4\pi = 0{,}118$ соотношение (31.4.13) дало бы массу глюино $3g_s^2 m_g/16\pi^2 = 280$ ГэВ, что достаточно велико, чтобы позволить глюино избежать обнаружения. Массы бино и вино зависят от неизвестного отношения параметра μ и массы псевдоскалярного хиггсовского бозона m_A. Принимая это отношение равным единице при $m_g < 10$ ТэВ, получаем из соотношений (31.4.15) и (31.4.16) $m_{\text{бино}} = 9g'^2 m_g/16\pi^2 < 73$ ГэВ и $m_{\text{вино}} = g^2 m_g/16\pi^2 < 27$ ГэВ [19а]. Это ограничение на массу вино противоречит тому факту, что пары вино до сих пор не были обнаружены на ускорителе LEP в $e^+ - e^-$ соударениях при энергиях, достаточных для рождения пар W-бозонов, откуда следует, что $m_{\text{вино}} > m_W$. Чтобы избежать этого противоречия, необходимо [11б] принять либо $m_g > 30$ ТэВ, что неудобно с точки зрения естественности, либо $\mu^2/m_A^2 > 8$. В любом случае, из этой модели следует, что калибрино много легче, чем скварки и слептоны.

Если можно пренебречь полиномом $Q(\varphi, \varphi^*)$, то, как показано в разделе 31.4, A-параметры также определяются однопетлевыми поправками, имеющими порядок $g_s^2 m_g/16\pi^2$ для скварков и $g^2 m_g/16\pi^2$ или $g'^2 m_g/16\pi^2$ для слептонов.

Вторая версия [20]

Эта версия вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии, точно так же, как и первая версия, содержит наблюдаемый сектор с киральными суперполями Φ_r и скрытый сектор с киральными суперполями Z_k. Различие состоит в том, что суперсимметрия предполагается спонтанно *не* нарушенной в скрытом секторе. Вместо этого калибровочные взаимодействия скрытого сектора, становящиеся сильными при энергиях $\Lambda \ll m_{\text{Pl}}$, порождают непертурбативный суперпотенциал для скалярных полей третьего суперполевого сектора — *суперполей модулей**. В различных теориях, таких как современные теории суперструн, вводятся дополнительные измерения, которые не наблюдаются потому, что они «свернуты» в крохотное компактное многообразие размерами порядка κ. Обычно некоторые параметры, необходимые для описания этого компактного многообразия, не фиксированы в любом порядке теории возмущений. Значения этих параметров могут меняться от точки к точке в четырехмерном пространстве-времени и проявляются при энергиях, много меньших планковского масштаба κ^{-1}, как калибровочно-инвариантные скалярные поля y_a, известные как *поля модулей*. (Индексы a, b и т. д. здесь, конечно, не имеют ничего общего с использовавшимися в разделе 36.1 локальными лоренцевскими индексами.)

*Автор использует термин «modular fields» и «modular superfields». — Прим. ред.

Если предположить, что суперсимметрия не нарушается при компактификации лишних измерений, эти поля должны сопровождаться фермионными суперпартнерами и вспомогательными полями, которые вместе образуют калибровочно инвариантные левокиральные суперполя модулей Y_a и им сопряженные*.

При энергиях несколько ниже характерных энергий компактификации, имеем суперсимметричную теорию с суперпотенциалом, который может зависеть от всех суперполей, но в котором κ — единственный размерный параметр. То обстоятельство, что поля y_a не фиксированы в теории возмущений, обычно связано с тем, что компактификация не создает суперпотенциал для полей модулей Y_a в отдельности. Как мы видели в разделе 28.1, калибровочная симметрия $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ исключает из суперпотенциала любые члены, содержащие только один или два множителя из числа суперполей наблюдаемого сектора, за исключением возможного члена, билинейного по хиггсовским суперполям H_1 и H_2. Мы снова предположим, что этот билинейный член в голом суперпотенциале либо отсутствует случайно (в этом случае он не появляется во всех порядках теории возмущений), либо исключается какой-либо симметрией типа симметрии Печчеи–Квинна, рассмотренной в связи с сильным нарушением CP-инвариантности в разделе 23.6. Калибровочная симметрия в скрытом секторе исключает из суперпотенциала любые члены содержащие только один множитель Z_k, и мы предположим, что либо случай, либо какая-то симметрия (возможно, та же самая симметрия Печчеи–Квинна) исключает также члены с двумя множителями Z_k.

Поэтому голый суперпотнциал принимает вид

$$f_{\text{голый}}(\Phi,Y,Z)=\sum_{rst}f_{rst}(\kappa Y)\Phi_r\Phi_s\Phi_t+\sum_{klm}f_{klm}(\kappa Y)Z_kZ_lZ_m+\cdots,\qquad(31.7.14)$$

где f_{rst} и f_{klm} — степенные ряды по своим аргументам с коэффициентами порядка единицы, а точки заменяют члены, включающие $n>3$ множителей Φ и Z, а также любое число множителей κY_a, подавляемые множителем, пропорциональным κ^{n-3}.

Мы предполагаем, что непертурбативные эффекты в скрытом секторе типа «конденсациим калибрино» (появление ненулевых средних значений билинейных функций полей калибрино) не нарушают суперсимметрию сами, но зато порождают суперпотенциал для суперполей модулей. Поскольку Λ — единственный масштаб в данной задаче (кроме гравитационных эффектов, подавляемых множителем $\kappa\Lambda$), этот суперпотенциал должен иметь вид

$$\hat{f}(Y)=\Lambda^3F(\kappa Y).\qquad(31.7.15)$$

---

*Конечно, поля модулей могут существовать и в рамках первой версии вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии, но, из-за меньшей величины Λ в этом случае взаимодействия полей модулей слишком слабы, чтобы представлять интерес.

Такие члены могут также порождаться средними значениями скалярных компонент суперполей Z в члене типа Z^3 в (31.7.14). В то же время, замена Z_k средними значениями их скалярных компонент в неперенормируемых членах, изображенных точками в (31.7.14), породит дополнительные зависящие от Φ члены в эффективном суперпотенциале, к которым мы вернемся позже. Суперпотенциал (31.7.15) имеет вид (31.7.1), который исходно предполагается в теориях с вызванным гравитацией нарушением суперсимметрии, но теперь ε отождествляется с промежуточным масштабом Λ, на котором калибровочные взаимодействия скрытого сектора становятся сильными.

Представляется правдоподобным, что суперпотенциал (31.7.15) может привести к нарушению суперсимметрии за счет появления $\mathscr{F}$-членов для киральных суперполей модулей. Пренебрежем на время остальными суперполями, оставляя обоснование этого шага на более поздний момент. Потенциал скалярных модулей задается выражениями (31.56.68) и (31.6.69) как

$$\hat{V}(y,y^*) = \exp(\kappa^2\hat{d}(y,y^*))\left[\sum_{ab}[\hat{g}^{-1}(y,y^*)]_{ab}\hat{L}_a(y)\hat{L}_b(y)^* - 3\kappa^3|\hat{f}(y)|^2\right], \quad (31.7.16)$$

где $\hat{d}(y,y^*)$ — келерова функция d, в которой мы пренебрегли скалярными компонентами Φ_r и Z_k, а

$$\hat{g}_{ab} = \frac{\partial^2\hat{d}}{\partial y_a \partial y_b^*}, \quad (31.7.17)$$

$$\hat{L}_a = \frac{\partial\hat{f}}{\partial y_a} + \kappa^2\hat{f}\frac{\partial\hat{d}}{\partial y_a}. \quad (31.7.18)$$

Здесь предполагается, что $\hat{V}$ имеет стационарную точку, помеченную верхним индексом 0, в которой $\hat{L}_a^0 \neq 0$, так что суперсимметрия нарушается, но при этом $\hat{V}^0$ очень мало и может быть скомпенсировано членами из наблюдаемого сектора, так что остается плоское пространство-время. Поскольку $\hat{f}$ имеет вид (31.7.15), а $\hat{d}$ равно κ^{-2}, умноженному на степенной ряд по κy_a и κy_a^* с коэффициентами порядка единицы, полный потенциал равен $\kappa^2\Lambda^6$, умноженному на степенной ряд по κy_a и κy_a^* снова с коэффициентами порядка единицы. Поэтому порядок величины различных составляющих потенциала таков:

$$y_a^0 = O(\kappa^{-1}), \qquad \hat{f}^0 = O(\Lambda^3), \qquad \hat{d}^0 = O(\kappa^{-2}),$$
$$\hat{L}_a^0 = O(\kappa\Lambda^3), \qquad \hat{g}_{ab}^0 = O(1). \quad (31.7.19)$$

Если зафиксировать поля модулей и поля скрытого сектора равными их средним значениям, то суперпотенциал наблюдаемого сектора принимает вид

$$f(\Phi) = \sum_{rs} \mu_{rs}\Phi_r\Phi_s + \sum_{rst} g_{rst}\Phi_r\Phi_s\Phi_t + \cdots, \tag{31.7.20}$$

где g_{rst} равняется $f_{rst}(\kappa y^0)$, и предполагается, что эта величина порядка единицы плюс члены, подавляемые степенями $\kappa\Lambda$. Точки здесь обозначают члены, содержащие более трех множителей Φ, которые подавляются дополнительными множителями $\kappa\Phi$. Коэффициент μ_{rs} происходит от неперенормируемых слагаемых, обозначаемых в уравнении (31.7.14) точками; если он возник из слагаемых, содержащих $n > 1$ множителей Z и два множителя Φ, то его порядок величины

$$\mu_{rs} = O(\kappa^{n-1}\Lambda^n). \tag{31.7.21}$$

Мы увидим, что нужный порядок величины μ соответствует $m_g = O(\kappa^2\Lambda^3)$ и порождается членом с числом множителей Z равным $n = 3$.

Нарушение суперсимметрии в секторе модулей будет передаваться в наблюдаемый сектор эффектами, связанными с гравитационным полем и его суперпартнерами. Выражение (31.6.68) задает потенциал наблюдаемого сектора в виде

$$\begin{aligned} V_O = e^{\kappa^2 d^0} \Bigg[&\sum_{rs} [g^{0\,-1}]_{rs} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_r} + \kappa^2 (f + \hat{f}^0) \frac{\partial d^0}{\partial \varphi_r} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_s} + \kappa^2 (f + \hat{f}^0) \frac{\partial d^0}{\partial \varphi_s} \right)^* \\ &+ 2\,\mathrm{Re} \sum_{ra} [g^{0\,-1}]_{ra} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_r} + \kappa^2 (f + \hat{f}^0) \frac{\partial d^0}{\partial \varphi_r} \right) \hat{L}_a^{0*} \\ &+ \sum_{ab} [g^{0\,-1}]_{ab} \hat{L}_a^0 \hat{L}_b^{0*} - 3\kappa^2 \left| f + \hat{f}^0 \right|^2 \Bigg] \\ &+ \frac{1}{2}\,\mathrm{Re} \sum_{AB} [f_{AB}^{-1}]^0 \left(\sum_{rs} \frac{\partial d^0}{\partial \varphi_r} (t_A)_{rs} \varphi_s \right) \left(\sum_{tu} \frac{\partial d^0}{\partial \varphi_t} (t_B)_{tu} \varphi_u \right)^*, \end{aligned} \tag{31.7.22}$$

где верхний индекс нуль снова указывает, что поля модулей и поля скрытого сектора взяты в равновесных точках. (Это условие будет пересмотрено позже.) Отметим, что хотя уравнение (31.7.22) включает члены подобно $\hat{L}_a^0$, возникающие в секторе модулей, в нем отсутствуют члены, явным образом связанные со скрытым сектором. Это происходит потому, что в данной версии вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии, она не нарушена в скрытом секторе, так что для любого калибровочного поля, взаимодействующего с полями скрытого сектора, $L_k^0 = 0$, $D_A^0 = 0$.

Для нас представляет интерес исследование области в пространстве полей, в которой поля наблюдаемого сектора имеют порядок $\kappa^2\Lambda^3$, потому что, как мы увидим, это характерная масса, возникающая в наблюдаемом секторе в результате гравитационных эффектов нарушения суперсимметрии в скрытом секторе. Согласно (31.6.48) и нашей оценке $\hat{f}^0 \approx \Lambda^3$, это также порядок величины массы гравитино:

$$m_g \approx \kappa^2\Lambda^3.$$

Чтобы вычислить потенциал для полей этого порядка величины, отметим, что келерова функция d для наблюдаемых полей и скалярных полей модулей принимает вид

$$\begin{aligned} d(\varphi,\varphi^*,y,y^*) =&\kappa^2\hat{d}(\kappa y,\kappa y^*) + \sum_{rs}\varphi_r\varphi_s^* A_{rs}(\kappa y,\kappa y^*) \\ &+ \sum_{rs}\varphi_r\varphi_s B_{rs}(\kappa y,\kappa y^*) + \sum_{rs}\varphi_r^*\varphi_s^* B_{rs}^*(\kappa y,\kappa y^*) + \ldots, \end{aligned} \tag{31.7.23}$$

где $\hat{d}$, A_{rs} и B_{rs} — степенные ряды по своим аргументам с коэффициентами порядка единицы, а точки заменяют члены с $n > 2$ множителями φ и(или) φ^*, подавляемые фактором κ^{n-2}. Согласно формулам (31.6.72), можно устранить из d любой аналитический член вместе с ему комплексно сопряженным, умножая полный суперпотенциал на подходящий аналитический множитель. В частности, умножая полный суперпотенциал на $\exp[\kappa^2\hat{d}^0 + \kappa^2\sum_{rs}B_{rs}^0\varphi_r\varphi_s]$, можно добиться того, что для преобразованной функции d

$$\hat{d}^0 = 0, \qquad B_{rs}^0 = 0. \tag{31.7.24}$$

Будем предполагать, что это сделано. Отметим, что поскольку полный суперпотенциал содержит постоянный член $\hat{f}^0$ порядка Λ^3, в то время как B_{rs}^0 было порядка единицы, это преобразование порождает в суперпотенциале квадратичный по φ_r член, приводя к добавке к коэффициенту μ_{rs} порядка $\kappa^2\Lambda^3$, т. е. того же порядка, что φ и m_g.

Другой вклад того же порядка величины в этот коэффициент может возникнуть из членов в суперпотенциале, содержащих $n > 1$ множителей Y и два множителя Φ. Из выражения (31.7.21) следует, что для того, чтобы и этот вклад в μ_{rs} был порядка $\kappa^2\Lambda^3$, мы должны взять $n = 3$. Придавая H_1 и H_2 квантовые числа Печчеи–Квинна $+1$, а полям Y — квантовые числа $-2/3$, можно сделать, чтобы это было допустимо, при том, что члены с двумя множителями Φ и $n = 2$ множителями Y будут запрещены. Тогда нарушение симметрии Печчеи–Квинна вакуумными средними Y_k порождает аксион.

При μ_{rs} порядка $\kappa^2\Lambda^3$ как билинейные, так и трилинейные члены в суперпотенциале наблюдаемого сектора имеют порядок $\kappa^6\Lambda^9$. Обычный суперсимметричный потенциальный член $\sum_r |\partial f/\partial\varphi_r|^2$ имеет тогда порядок $\kappa^8\Lambda^{12}$, так что следует собрать все члены выражения (31.7.22) до этого порядка.

Для φ_r порядка $\kappa^2\Lambda^3$ и y_a, зафиксированных в точке равновесия $y_a^0 \approx \kappa^{-1}$, получаем из выражения (31.7.23)

$$g_{rs}^0 = A_{rs}^0 + O(\kappa^3\lambda^3), \tag{31.7.25}$$

$$g_{ab}^0 = \left(\frac{\partial^2 \hat{d}}{\partial y_a \partial y_b^*}\right)^0 + \sum_{rs} \varphi_r \varphi_s^* \left(\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*}\right)^0 + \sum_{rs} \varphi_r \varphi_s \left(\frac{\partial^2 B_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*}\right)^0 + \sum_{rs} \varphi_r^* \varphi_s^* \left(\frac{\partial^2 B_{rs}^*}{\partial y_a \partial y_b^*}\right)^0 + O(\kappa^6\Lambda^6), \tag{31.7.26}$$

$$g_{ra}^0 = \sum_s \varphi_s \left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y_a^*}\right)^0 + O(\kappa^6\Lambda^6) = g_{ar}^{0\;*}, \tag{31.7.27}$$

где, как и раньше, индекс нуль означает, что поля y_a фиксированы в равновесной точке y_a^0. Подвергнем суперполя наблюдаемого сектора Φ_r и (отдельно) суперполя модулей Y_a линейным преобразованиям, подобранным так, чтобы

$$A_{rs}^0 = \delta_{rs}, \qquad \left(\frac{\partial^2 \hat{d}}{\partial y_a \partial y_b^*}\right)^0 = \delta_{ab}. \tag{31.7.28}$$

Для метрики (31.7.25)–(31.7.27), заданной как сумма единичной матрицы и поправок, много меньших единицы, легко вычислить обратную матрицу:

$$g_{rs}^{0\,-1} = \delta_{rs} + O(\kappa^3\lambda^3), \tag{31.7.29}$$

$$g_{ab}^{0\,-1} = \delta_{ab} - \sum_{rs} \varphi_r \varphi_s^* \left(\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*}\right)^0 - \sum_{rs} \varphi_r \varphi_s \left(\frac{\partial^2 B_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*}\right)^0 - \sum_{rs} \varphi_r^* \varphi_s^* \left(\frac{\partial^2 B_{rs}^*}{\partial y_a \partial y_b^*}\right)^0 + O(\kappa^6\Lambda^6), \tag{31.7.30}$$

$$g_{ra}^{0\,-1} = -\sum_s \varphi_s \left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y_a^*}\right)^0 + O(\kappa^6\Lambda^6) = g_{ar}^{0\,-1\,*}. \tag{31.7.31}$$

В частности, наше предположение о виде функций A_{rs} и B_{rs} дает оценки по порядку величины

$$\left(\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*}\right)^0 = O(\kappa^2), \qquad \left(\frac{\partial^2 B_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*}\right)^0 = O(\kappa^2), \qquad \left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y_a^*}\right)^0 = O(\kappa), \tag{31.7.32}$$

поэтому для $\varphi_r = O(\kappa^2\Lambda^3)$,

$$[g^{0\,-1}]_{rs} = O(1), \qquad [g^{0\,-1}]_{ab} = O(1), \qquad [g^{0\,-1}]_{ra} = O(\kappa^3\Lambda^3). \tag{31.7.33}$$

Далее,

$$f = O(\varphi^3) = O(\kappa^6\Lambda^9), \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi_r} = O(\varphi^2) = O(\kappa^4\Lambda^6), \tag{31.7.34}$$

и

$$\frac{\partial d^0}{\partial \varphi_r} = O(\varphi) = O(\kappa^2\Lambda^3). \tag{31.7.35}$$

При $\hat{f}^0$ порядка Λ^3, величины $\kappa^2(f+\hat{f}^0)\partial d^0/\partial\varphi_r$ в уравнении (31.7.22) дают в главном порядке $\kappa^2\hat{f}^0\varphi_r^*$, то есть по порядку величины $\kappa^2 \times \Lambda^3 \times \kappa^2\Lambda^3 = \kappa^4\Lambda^6$. Это тот же порядок, который имеет $\partial f/\partial\varphi_r$, так что в главном порядке следует сохранить оба члена:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_r} + \kappa^2(f+\hat{f}^0)\frac{\partial d^0}{\partial \varphi_r} \simeq \frac{\partial f}{\partial \varphi_r} + \kappa^2\hat{f}^0\varphi_r^* = O(\kappa^4\Lambda^6). \tag{31.7.36}$$

В этом приближении, при замене $g_{rs}^{0\,-1}$ главным членом δ_{rs}, первый член в выражении (31.7.22) уже имеет нужный порядок $\kappa^8\Lambda^{12}$, так что можно использовать данное приближение, чтобы записать

$$\sum_{rs}[g^{0\,-1}]_{rs}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_r} + \kappa^2(f+\hat{f}^0)\frac{\partial d^0}{\partial \varphi_r}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_s} + \kappa^2(f+\hat{f}^0)\frac{\partial d^0}{\partial \varphi_s}\right)^*$$
$$\simeq \sum_r \left|\frac{\partial f}{\partial \varphi_r} + \kappa^2\hat{f}^0\varphi_r^*\right|^2. \tag{31.7.37}$$

Второй член в квадратных скобках в (31.7.22) порядка $\kappa^3\Lambda^3 \times \kappa^4\Lambda^6 \times \kappa\Lambda^3 = \kappa^8\Lambda^{12}$, так что можно оценить его, используя только главные члены:

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{ra}[g^{0\,-1}]_{ra}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_r} + \kappa^2(f+\hat{f}^0)\frac{\partial d^0}{\partial \varphi_r}\right)\hat{L}_a^{0*}$$
$$\simeq -2\,\mathrm{Re}\sum_{ras}\varphi_s\left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y_a^*}\right)^0\left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_r} + \kappa^2\hat{f}^0\varphi_r^*\right]\hat{L}_a^{0*}. \tag{31.7.38}$$

Третий и четвертый члены в (31.7.22) имеют порядок $\kappa^2\Lambda^6$, но предполагается, что они почти полностью взаимно компенсируются, поэтому необходимо включить следующие по порядку величины члены при оценке их вклада в выражение в квадратных скобках. Одна часть интересующего нас выражения происходит от членов $g_{ab}^{0\,-1}$ второго порядка по φ и(или) φ^* в выражении (31.7.30); это вклад порядка $\kappa^2\varphi^2 \times (\kappa\Lambda^3)^2$, что составляет величину порядка $\kappa^8\Lambda^{12}$. Другая нескомпенсированная добавка к потенциалу, связанная с последним членом в квадратных скобках в уравнении (31.7.22), появляется в результате интерференции между f и $\hat{f}^0$, что дает вклад порядка $\kappa^2\varphi^3\Lambda^3$, что также составляет порядка $\kappa^8\Lambda^{12}$. В результате неполного сокращения при $\varphi_r = 0$ двух последних членов в квадратных скобках в (31.7.22) может также остаться постоянный член $\mathscr{C}$; чтобы избежать большой космологической постоянной, мы должны предположить, что $\mathscr{C}$ также порядка $\kappa^8\Lambda^{12}$. (Эта тонкая настройка неестественна, однако она пока что необходима в любой теории, чтобы избежать появления огромной космологической постоянной.) Собирая вместе результаты оценок, видим, что в порядке $\kappa^8\Lambda^{12}$ два последних члена в квадратных скобках в (31.7.22) дают

$$\sum_{ab}[g^{0\,-1}]_{ab}\hat{L}_a^0\hat{L}_b^{0*} - 3\kappa^2\left|f+\hat{f}^0\right|^2 \simeq -\sum_{abrs}\Bigg[\varphi_r\varphi_s^*\left(\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial y_a\,\partial y_b^*}\right)^0$$
$$+\varphi_r\varphi_s\left(\frac{\partial^2 B_{rs}}{\partial y_a\,\partial y_b^*}\right)^0 + \varphi_r^*\varphi_s^*\left(\frac{\partial^2 B_{rs}^*}{\partial y_a\,\partial y_b^*}\right)^0\Bigg]\hat{L}_a^0\hat{L}_b^{0*} - 6\kappa^2\,\mathrm{Re}(f\hat{f}^{0*}) + \mathscr{C}. \quad (31.7.39)$$

Все эти члены имеют нужный порядок $\kappa^8\Lambda^{12}$, в то время, как из выражения (31.7.24) $\kappa^2 d^0 = O(\kappa^2\varphi^2) = O(\kappa^6\Lambda^6)$, так что можно пренебречь множителем $\exp(\kappa^2 d^0)$ в формуле (31.7.22). Наконец, калибровочные члены в последней строке выражения (31.7.22) имеют порядок $\varphi^4 = O(\kappa^8\Lambda^{12})$, что позволяет оценить их, используя вместо выражения $\partial d^0/\partial\varphi_r$ его главный член φ_r^*.

Собирая вместе оценки для всех членов, получаем полный скалярный потенциал наблюдаемого сектора в порядке $\kappa^8\Lambda^{12}$:

$$\begin{aligned} V_O \simeq {} & \sum_r\left|\frac{\partial f}{\partial\varphi_r} + \kappa^2\hat{f}^0\varphi_r^*\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}\sum_{ras}\varphi_s\left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y_a^*}\right)^0\left[\frac{\partial f}{\partial\varphi_r} + \kappa^2\hat{f}^0\varphi_r^*\right]\hat{L}_a^{0*} \\ & -\sum_{abrs}\left[\varphi_r\varphi_s^*\left(\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial y_a\,\partial y_b^*}\right)^0 + \varphi_r\varphi_s\left(\frac{\partial^2 B_{rs}}{\partial y_a\,\partial y_b^*}\right)^0 + \varphi_r^*\varphi_s^*\left(\frac{\partial^2 B_{rs}^*}{\partial y_a\,\partial y_b^*}\right)^0\right]\hat{L}_a^0\hat{L}_b^{0*} \\ & - 6\kappa^2\,\mathrm{Re}(f\hat{f}^{0*}) \\ & + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_{AB}[f_{AB}^{-1}]^0\left(\sum_{rs}\varphi_r^*(t_A)_{rs}\varphi_s\right)\left(\sum_{tu}\varphi_t^*(t_B)_{tu}\varphi_u\right)^* + \mathscr{C}. \end{aligned} \quad (31.7.40)$$

Потенциал (31.7.40) скалярных полей наблюдаемого сектора принимает вид, предполагаемый в минимальных суперсимметричных скалярных моделях, обсуждавшихся в разделе 28.4: он является суммой суперсимметричного члена $V_{\text{супер}}$ и мягко нарушающего суперсимметрию $V_{\text{мягк}}$ члена

$$V_O = V_{\text{супер}} + V_{\text{мягк}}. \quad (31.7.41)$$

Суперсимметричный член, как обычно, имеет вид

$$V_{\text{супер}} = \sum_r \left|\frac{\partial f}{\partial \varphi_r}\right|^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_{AB}[f_{AB}^{-1}]^0 \left(\sum_{rs}\varphi_r^*(t_A)_{rs}\varphi_s\right)\left(\sum_{tu}\varphi_t^*(t_B)_{tu}\varphi_u\right)^*, \tag{31.7.42}$$

а мягко нарушающий суперсимметрию член имеет вид

$$\begin{aligned} V_{\text{мягк}} \simeq\, & 2\kappa^2\,\mathrm{Re}\sum_r\left(\varphi_r\frac{\partial f}{\partial\varphi_r}\hat{f}^{0*}\right) + \kappa^4|\hat{f}^0|^2\sum_r|\varphi_r|^2 \\ & - 2\,\mathrm{Re}\sum_{ras}\varphi_s\left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y_a^*}\right)^0\left[\frac{\partial f}{\partial\varphi_r} + \kappa^2\hat{f}^0\varphi_r^*\right]\hat{L}_a^{0*} \\ & - \sum_{abrs}\left[\varphi_r\varphi_s^*\left(\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial y_a\,\partial y_b^*}\right)^0 + \varphi_r\varphi_s\left(\frac{\partial^2 B_{rs}}{\partial y_a\,\partial y_b^*}\right)^0 + \varphi_r^*\varphi_s^*\left(\frac{\partial^2 B_{rs}^*}{\partial y_a\,\partial y_b^*}\right)^0\right]\hat{L}_a^0\hat{L}_b^{0*} \\ & - 6\kappa^2\,\mathrm{Re}(f\hat{f}^{0*}) + \mathscr{C}. \end{aligned} \tag{31.7.43}$$

Для $f(\varphi)$, задаваемого выражением (31.7.20), эта формула принимает вид

$$V_{\text{мягк.}} = \sum_{rs}M_{rs}^2\varphi_r\varphi_s^* + 2\,\mathrm{Re}\sum_{rs}N_{rs}^2\varphi_r\varphi_s + 2\,\mathrm{Re}\sum_{rst}A_{rst}\varphi_r\varphi_s\varphi_t + \mathscr{C}, \tag{31.7.44}$$

где

$$M_{rs}^2 = \kappa^4|\hat{f}^0|^2\delta_{rs} - 2\kappa^2\,\mathrm{Re}\left[\hat{f}^0\sum_a\left(\frac{\partial A_{sr}}{\partial y_a^*}\right)^0\hat{L}_a^{0*}\right] - \sum_{ab}\left(\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial y_a\,\partial y_b^*}\right)^0\hat{L}_a^0\hat{L}_b^{0*}, \tag{31.7.45}$$

$$\begin{aligned} N_{rs}^2 =\, & 2\kappa^2\mu_{rs}\hat{f}^{0*} - \frac{1}{2}\sum_{at}\mu_{tr}\left(\frac{\partial A_{ts}}{\partial y_a^*}\right)^0\hat{L}_a^{0*} - \frac{1}{2}\sum_{at}\mu_{ts}\left(\frac{\partial A_{tr}}{\partial y_a^*}\right)^0\hat{L}_a^{0*} \\ & - \sum_{ab}\left(\frac{\partial^2 B_{rs}}{\partial y_a\,\partial y_b^*}\right)^0\hat{L}_a^0\hat{L}_b^{0*}, \end{aligned} \tag{31.7.46}$$

а

$$A_{rst} = -\sum_{au}\left[\left(\frac{\partial A_{ur}}{\partial y_a^*}\right)^0 g_{ust} + \left(\frac{\partial A_{us}}{\partial y_a^*}\right)^0 g_{urt} + \left(\frac{\partial A_{ut}}{\partial y_a^*}\right)^0 g_{urs}\right]\hat{L}_a^{0*}. \tag{31.7.47}$$

Наши предыдущие оценки по порядку величины дают

$$M_{rs}^2 = O(\kappa^4\Lambda^6), \qquad N_{rs}^2 = O(\kappa^4\Lambda^6), \qquad A_{rst}^2 = O(\kappa^2\Lambda^3). \tag{31.7.48}$$

Вместе с оценками $g_{rst} = O(1)$ и $\mu_{rs} = O(\kappa^2\Lambda^3)$ для констант в $V_{\text{супер}}$, это показывает, что если потенциал имеет стационарную точку при некотором $\varphi_r^0 \neq 0$, то $\varphi_r^0 = O(\kappa^2\Lambda^3)$, что подтверждает наше решение исследовать поля этого порядка величины. Для равновесного значения φ_r этого порядка равновесные значения различных членов в потенциале $O(\varphi^4) = O(\kappa^8\Lambda^{12})$, что дает нужный для компенсации энергии вакуума порядок величины константы $\mathscr{C}$.

Для того, чтобы характерная масса $\kappa^2\Lambda^3$ в минимальной суперсимметричной стандартной модели была порядка 1 ТэВ, нужно взять $\Lambda \approx 10^{13}$ ГэВ. Если член с двумя суперполевыми множителями из наблюдаемого или скрытого сектора в голом суперпотенциале запрещается симметрией Печчеи–Квинна, как предлагалось выше, то вакуумные средние скаляров скрытого сектора будут нарушать эту симметрию на масштабе (обозначенном M в разделе 23.6) порядка 10^{13} ГэВ, а масса аксиона, которая задается формулой (23.6.26), должна быть порядка 10^{-6} эВ. Это значение для масштаба нарушения суперсимметрии несколько превосходит верхнюю границ в 10^{12} ГэВ, приведенную в разделе 23.6, но, учитывая неопределенность космологических аргументов, это расхождение не может быть решающим.

Прежде чем переходить к дальнейшим физическим приложениям полученных результатов, рассмотрим подробнее упрощение, сделанное при их выводе. При вычислении потенциала для скаляров наблюдаемого сектора φ_r, мы фиксировали поля модулей в равновесных значениях y_a^0, которые имели бы эти поля в отсутствии полей наблюдаемого сектора φ_r. Вместо этого мы должны были приравнять поля модулей их равновесным значениям $y_a(\varphi)$ для реальных значений φ_r, найдя для этого стационарную точку потенциала

$$V_{\text{полн}}(\varphi,\varphi^*,y,y^*) = \hat{V}(y,y^*) + V_O(\varphi,\varphi^*,y,y^*), \tag{31.7.49}$$

и только потом искать равновесные значения для φ_r. Поскольку для интересующих нас полей V_O много меньше, чем $\hat{V}$, равновесное значение y_a может быть записано как

$$y_a(\varphi,\varphi^*) = y_a^0 + \delta y_a(\varphi,\varphi^*), \tag{31.7.50}$$

где y_a^0 — точка минимума $\hat{V}(y,y^*)$, а

$$\sum_b \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y_a \partial y_b}\,\delta y_b + \sum_b \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y_a \partial y_b^*}\,\delta y_b^* = -\frac{\partial V_O}{\partial y_a}. \tag{31.7.51}$$

Вторые производные от $\hat{V}$ имеют порядок $\kappa^2 \times (\kappa\Lambda^3)^2 = \kappa^4\Lambda^6$, а первые производные V_O — порядок $\kappa \times \kappa^8\Lambda^{12} = \kappa^9\Lambda^{12}$, так что δy_a будут порядка $\kappa^5\Lambda^6$. Изменение потенциала, обусловленное зависящим от φ сдвигом равновесных значений y_a, квадратично по δy_a и δy_a^* с коэффициентами, задаваемыми вторыми производными от $\hat{V}$ по y_a и(или) y_a^*, поэтому оно имеет порядок

$$(\kappa^5\Lambda^6)^2 \times \kappa^2 \times (\kappa\Lambda^3)^2 = \kappa^{14}\Lambda^{18},$$

который меньше, чем порядок вычисленного нами потенциала, на множитель $(\kappa\Lambda)^6 \ll 1$.

Не делая дополнительных предположений о виде функций $A_{rs}(y, y^*)$ и $B_{rs}(y, y^*)$, мы не можем сделать на основании выражений (31.7.45)–(31.7.47) никаких заключений о точных значениях коэффициентов M^2_{rs}, N^2_{rs} и A_{rst} в мягко нарушающем суперсимметрию потенциале (31.7.44). Единственное определенное предсказание, которое следует из этих результатов, состоит в том, что все коэффициенты C_{ij} в мягко нарушающем суперсимметрию лагранжиане (28.4.1) пренебрежимо малы, что так или иначе уже предполагалось.

Главная проблема, поставленная результатами (31.7.44)–(31.7.48), состоит в том, что без дополнительных предположений они не дают вырождений масс скварков и слептонов, которые обеспечили бы отсутствие рассмотренных в разделе 28.4 процессов с изменением ароматов кварков и лептонов. Группа $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ не позволяет $\varphi_r\varphi_s$-членам в мягко нарушающем суперсимметрию потенциале (31.7.44) и в суперпотенциале (31.7.20) зависеть от чего либо, кроме хиггсовских скаляров, так что они не могут приводить к процессам изменения аромата. Поэтому проблема возникает только из-за того, что коэффициенты M^2_{rs} и A_{rst} в уравнении (31.7.44) могут не приводить к сохранению аромата в том же базисе, что и юкавские константы g_{rst}. Один из способов обойти эту трудность состоит в том, чтобы предположить, что по какой-то причине функции $A_{rs}(y, y^*)$ слабо зависят от y_a и y^*_a так, чтобы из выражения (31.7.45) следовало бы, что $M^2_{rs} \propto \delta_{rs}$, а из выражения (31.7.47) следовало бы,что A_{rst} (а следовательно и коэффициенты A_{ij} в (28.4.1)) аномально малы. Другая возможность — предположить, что хотя $A_{rs}(y, y^*)$ и не меняется медленно, функция $A_{rs}(y, y^*)$ (или, по крайней мере, ее первая и вторая производные при $y_a = y^0_a$) пропорциональна δ_{rs}. В этом случае (31.7.45) снова дает $M^2_{rs} \propto \delta_{rs}$, а выражение (31.7.47) дает трилинейные константы взаимодействия $A_{rst} \propto g_{rst}$, вследствие чего все коэффициенты A_{ij} в (28.4.1) оказываются равными [21].

Мы должны также проверить массы калибрино, порождаемые этой версией вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии. Согласно формуле (31.6.75), массовая матрица калибрино группы $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ задается в общем случае как

$$m_{AB} = \exp(\kappa^2 d/2)\sum_{NM}[g^{-1}]_{NM}L_N\left(\frac{\partial f_{AB}}{\partial\phi_M}\right)^*, \tag{31.7.52}$$

где ϕ_N пробегает при разных N все поля, от которых может зависеть f_{AB}, а g_{NM} и L_M задаются формулами (31.6.66) и (31.6.69). Согласно проделанным оценкам, $\kappa^2 d \ll 1$; $L_a = O(\kappa\Lambda^3)$ для полей модулей y_a и много меньше для других полей, а $g^{-1}_{ab} \simeq \delta_{ab}$. Мы также предполагаем, что f_{AB} — степенной ряд по κy с коэффициентами порядка единицы, так что $\partial f_{AB}/\partial y_a$ имеет порядок κ. Поэтому массы калибрино (31.7.52) имеют порядок $\kappa^2\Lambda^3$, который совпадает с порядком величины масс и средних значений скаляров, и поэтому должны быть достаточно большими, чтобы не противоречить наблюдениям. Рассмотренные в разделе 31.4 однопетлевые поправки здесь оказываются много меньше и могут не приниматься во внимание.

Резюмируем изложенное. Первая версия вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии имеет то преимущество, что она приводит к значению массы аксиона в допускаемом космологией диапазоне, в то время как вторая версия имеет то преимущество, что массы калибрино оказываются сравнимыми с массами скварков и слептонов. Обе версии теории вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии имеют преимущество перед теориями нарушения суперсимметрии, вызванного калибровочным взаимодействием: они естественным образом дают порядок величины μ-члена, соответствующий экспериментальным данным. С другой стороны, теории нарушения суперсимметрии калибровочным взаимодействием имеют то преимущество, что они естественным образом предсказывают независимость масс скварков и слептонов от поколения.

Все версии вызванного гравитацией нарушения суперсимметрии могут естественным образом привести к существованию долгоживущих сверхтяжелых частиц, что могло бы иметь интересные астрофизические последствия [23]. Вероятно, что калибровочные взаимодействия в скрытом секторе, которые становятся сильными при энергии Λ, могут связывать составные частицы массами порядка Λ. Эти сверхтяжелые частицы могут оказаться долгоживущими, если их распад запрещен какой-либо случайной симметрией перенормируемой части лагранжиана скрытого сектора, причем распад будет происходить только за счет неперенормируемых членов в лагранжиане, которые подавлены степенями $\kappa\Lambda$.

Приложение А. Тетрадный формализм

Обычная формулировка гравитации в терминах метрического тензора $g_{\mu\nu}$ адекватна теориям с полями материи, ограниченными скалярами, векторами и тензорами, но не теории супергравитации, обязательной составной частью которой являются спиноры. В отличии от векторов и тензоров преобразование Лоренца спиноров не имеет естественного обобщения на произвольные координатные системы. Чтобы работать со спинорами, нужно ввести системы координат $\xi^a_X(x)$, $a = 0, 1, 2, 3$, которые локально инерциальны в любой точке X произвольной системы координат. Принцип эквивалентности утверждает, что в этих локально инерциальных системах координат гравитация не сказывается, так что действие может быть выражено через поля материи, спиноры, векторы и т. д., определенные в локально инерциальных системах, и тетраду, которая возникает из преобразования от локально инерциальных систем координат к произвольным системам:

$$e^a{}_\mu(X) \equiv \left.\frac{\partial \xi^a_X(x)}{\partial x^\mu}\right|_{x=X}. \tag{31.A.1}$$

Действие будет инвариантно относительно произвольных преобразований координат $x \to x'$ *и одновременно* локальных преобразований Лоренца $\xi^a \to \xi'^a = \Lambda^a{}_b(x)\xi^b$, где $\Lambda^a{}_c(x)\Lambda^b{}_d(x)\eta_{ab} = \eta_{cd}$. Определение тетрады (31.A.1) показывает, что при произвольных преобразованиях координат $x \to x'$ она преобразуется как

$$e^a{}_\mu(x) \to e'^a{}_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e^a{}_\nu(x), \tag{31.A.2}$$

а при локальном преобразовании Лоренца $\xi^a(x) \to \Lambda^a{}_b(x)\xi^b(x)$ — как

$$e^a{}_\mu(x) \to \Lambda^a{}_b(x) e^b{}_\mu(x). \tag{31.A.3}$$

Например, теории чисто гравитационного поля могут быть записаны через поле, которое инвариантно относительно локальных преобразований Лоренца и преобразуется как тензор относительно произвольных преобразований координат, т. е. через метрику

$$g_{\mu\nu} \equiv e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}. \tag{31.A.4}$$

Векторы могут рассматриваться либо как величины V^a, которые преобразуются как векторы относительно локальных преобразований Лоренца

$$V^a(x) \to \Lambda^a{}_b(x) V^b(x), \tag{31.A.5}$$

но ведут себя как скаляры относительно произвольных преобразований координат, либо как величины v^μ, которые преобразуются как скаляры относительно локальных преобразований Лоренца, но ведут себя как векторы относительно произвольных преобразований координат. Одно представление связано с другим соотношением

$$V^a = e^a{}_\mu v^\mu.$$

Однако действие супергравитации включает также спинорные поля, которые с необходимостью преобразуются как скаляры относительно произвольных преобразований координат и как спиноры относительно локальных преобразований Лоренца

$$\psi_\alpha(x) = D_{\alpha\beta}(\Lambda(x))\psi_\beta(x), \tag{31.A.6}$$

где $D_{\alpha\beta}(\Lambda)$ — спинорное представление однородной группы Лоренца.

Поскольку преобразования Лоренца в (31.A.5) и (31.A.6) зависят от координат x^μ, пространственно-временная производная величины, подобной $V^a(x)$ или $\psi_\alpha(x)$, не является просто еще одной величиной, преобразующейся относительно локальных преобразований Лоренца по прежнему закону, а преобразуется относительно произвольных преобразований координат как ковариантный вектор. Например, производная от (31.A.6) преобразуется относительно преобразований Лоренца по правилу

$$\partial_\mu\psi_\alpha \to D_{\alpha\beta}(\Lambda)\left\{\partial_\mu\psi_\beta + \left[D^{-1}(\Lambda)\,\partial_\mu D(\Lambda)\right]_{\beta\gamma}\psi_\gamma\right\}.$$

Чтобы скомпенсировать второй член в скобках в правой части, мы вводим матрицу связности Ω_μ, преобразующуюся относительно локальных преобразований Лоренца как

$$\Omega_\mu \to D(\Lambda)\Omega_\mu D^{-1}(\Lambda) - \left(\partial_\mu D(\Lambda)\right)D^{-1}(\Lambda), \tag{31.A.7}$$

и определяем ковариантную производную

$$\mathscr{D}_\mu\psi \equiv \partial_\mu\psi + \Omega_\mu\psi, \tag{31.A.8}$$

которая при преобразованиях Лоренца ведет себя как ψ:

$$\mathscr{D}_\mu\psi \to D(\lambda)\mathscr{D}_\mu\psi. \tag{31.A.9}$$

Кроме того, Ω_μ должна преобразовываться как ковариантный вектор относительно произвольных преобразований координат, так что $\mathscr{D}_\mu$ будет давать ковариантный вектор при действии на координатный скаляр. Чтобы производная $\mathscr{D}_\mu$ при действии на тензор давала тензор с дополнительным нижним индексом, она должна быть дополнена обычными членами, обусловленными аффинной связностью. Например, при действии на поле гравитино ψ_μ ковариантная производная определяется как

$$\mathscr{D}_\mu\psi_\nu \equiv \psi_{\nu;\mu} + \Omega_\mu\psi_\nu \equiv \partial_\mu\psi_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\psi_\lambda + \Omega_\mu\psi_\nu. \tag{31.A.10}$$

Формулы (31.A.8)–(31.A.10) приложимы не только к спинорам, но и к полям, преобразующимся относительно локального преобразования Лоренца по любому представлению $D(\Lambda)$ группы Лоренца. Матрица Ω_μ зависит от представления, но в любом представлении она может быть записана в виде

$$[\Omega_\mu]_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}i\left[\mathcal{J}_{ab}\right]_{\alpha\beta}\omega^{ab}_\mu(x), \tag{31.A.11}$$

где $\mathcal{J}_{ab}$ — матрицы генераторов однородной группы Лоренца в представлении, реализуемом рассматриваемыми полями:

$$i[\mathcal{J}_{ab}, \mathcal{J}_{cd}] = \eta_{bc}\mathcal{J}_{ad} - \eta_{ac}\mathcal{J}_{bd} + \eta_{bd}\mathcal{J}_{ca} - \eta_{ad}\mathcal{J}_{cb}, \qquad (31.A.12)$$

а ω_μ^{ab} — независящее от представления поле, известное как *спиновая связность*, которое преобразуется как ковариантный вектор относительно произвольных преобразований координат. Чтобы выполнялось правило преобразования (31.A.7) для неоднородных локальных преобразований Лоренца мы полагаем

$$\omega_\mu^{ab} = g^{\nu\lambda} e^a{}_\nu e^b{}_{\lambda;\mu}, \qquad (31.A.13)$$

где точка с запятой снова обозначает обычную ковариантную производную, построенную с использованием аффинной связности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. (Полученное выражение антисимметрично по a и b, поскольку (31.A.4) дает $g^{\nu\lambda} e^a{}_\nu e^b{}_\lambda = \eta^{ab}$ — величину с нулевой ковариантной производной.) Это не единственная спиновая связность, для которой выполняется уравнение (31.A.7); мы можем добавить к ней любое поле, являющееся ковариантным вектором относительно произвольных преобразований координат и тензором относительно локальных преобразований Лоренца, что имеет некоторое значение в теориях супергравитации.

При любом выборе спиновой связности существует соответствующий тензор кривизны. Из уравнения (31.A.7) можно прямо показать, что величина $\partial_\nu\Omega_\mu - \partial_\mu\Omega_\nu + [\Omega_\nu, \Omega_\mu]$ преобразуется однородно относительно локальных преобразований Лоренца

$$\partial_\nu\Omega_\mu - \partial_\mu\Omega_\nu + [\Omega_\nu, \Omega_\mu] \to D(\Lambda)(\partial_\nu\Omega_\mu - \partial_\mu\Omega_\nu + [\Omega_\nu, \Omega_\mu])D^{-1}(\Lambda). \quad (31.A.14)$$

Используя формулы (31.A.11) и (31.A.12), можно записать эту матрицу в виде

$$\partial_\nu\Omega_\mu - \partial_\mu\Omega_\nu + [\Omega_\nu, \Omega_\mu] = \frac{1}{2} i\mathcal{J}_{ab} R_{\mu\nu}{}^{ab}, \qquad (31.A.15)$$

где

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} \equiv \partial_\nu\omega_\mu^{ab} - \partial_\mu\omega_\nu^{ab} + \omega_\nu^{ac}\omega_{\mu c}{}^{b} - \omega_\mu^{ac}\omega_{\nu c}{}^{b}. \qquad (31.A.16)$$

Из уравнения (31.A.14) следует, что $R_{\mu\nu}{}^{ab}$ преобразуется как тензор относительно локальных преобразований Лоренца:

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} \to \Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d R_{\mu\nu}{}^{cd}. \qquad (31.A.17)$$

Также очевидно, что он преобразуется как тензор относительно произвольных преобразований координат:

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} \to \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} R_{\rho\sigma}{}^{ab}. \qquad (31.A.18)$$

Поэтому мы можем определить координатный тензор четвертого ранга, записав

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = e^a{}_\kappa e^b{}_\lambda R_{\mu\nu}{}^{\kappa\lambda}. \qquad (31.A.19)$$

Построенный таким образом тензор $R_{\mu\nu}{}^{\kappa\lambda}$ — это тензор кривизны Римана–Кристоффеля, соответствующий данной спиновой связности ω_ν^{ab}.

Задачи

1. Выведите формулы (31.2.3)–(31.2.6) для компонент эйнштейновского суперполя.

2. Предположим, что суперсимметрия не нарушена. Покажите, как можно вычислить амплитуду излучения гравитино очень низкой энергии в произвольном процессе рассеяния через амплитуду этого процесса без участия гравитино.

3. Проверьте, что действие супергравитации (31.6.11) инвариантно относительно локальных преобразований суперсимметрии (31.6.1)–(31.6.6) во всех порядках по G.

4. Вычислите изменение обобщенной D-компоненты (31.6.40) при произвольном локальном преобразовании суперсимметрии.

5. Вычислите фермионную часть плотности лагранжиана (31.6.49).

6. Рассмотрите теорию одного кирального скалярного суперполя Φ взаимодействующего с супергравитацией с модифицированным кэлеровым потенциалом $d(\Phi,\Phi^*) = \Phi^*\Phi$ и суперпотенциалом $f(\Phi) = M^2(\Phi+\beta)$, где M и β — константы. Найдите значение β, для которого классические уравнения поля имеют решение с плоским пространством-временем. Чему равно значение φ в этом решении?

Список литературы

1. P. Nath and R. Arnowitt, *Phys. Lett.* **56B**, 177 (1975); B. Zumino, in *Proceedings of the Conference on Gauge Theories and Modern Field Theories at Northeastern University*, 1975, R. Arnowitt and P. Nath, eds. (MIT Press, Cambridge, MA, 1976). Этот подход детально описан в книге: J. Wess and J. A. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2nd edition (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992).

2. D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara, *Phys. Rev.* **D13**, 3214 (1976); S. Deser and B. Zumino, *Phys. Lett.* **62B**, 335 (1976); S. Ferrara, J. Scherk, and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1035 (1976); S. Ferrara, F. Gliozzi, J. Scherk, and P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B117**, 333 (1976). Эти статьи перепечатаны в сб.: *Supersymmetry*, S. Ferrara, ed. (North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapore, 1987). Ясное изложение этого подхода см. в книге: P. C. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, 2nd edition (World Scientific, Singapore, 1990).

3. S. Ferrara and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B134**, 301 (1978).

3a. M. T. Grisaru and H. N. Pendleton, *Phys. Lett.* **67B**, 323 (1977).

4. K. S. Stelle and P. C. West, *Phys. Lett.* **74B**, 330 (1978); S. Ferrara and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* **74B**, 333 (1978). Эти статьи перепечатаны в сб.: *Supersymmetry* [2].

5. Например, см.: S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972), Sec. 12.5. (Есть рус. пер.: С. Вейнберг. Гравитация и космология. М.: Мир, 1972).

6. Например, см.: *Gravitation and Cosmology* [5]: Eq. (12.4.3).

7. Например, см.: *Gravitation and Cosmology* [5]: Section 10.1.

7a. W. Nahm, *Nucl. Phys.* **B135**, 149 (1978).

8. S. Coleman and F. de Luccia, *Phys. Rev.* **D21**, 3305 (1980).

9. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1776 (1982).

10. S. Deser and C. Teitelboim, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 249 (1977); M. T. Grisaru, *Phys. Lett.* **73B**, 207 (1978); E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **80**, 381 (1981).

11. W. Rarita and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **60**, 61 (1941).

11a. L. Randall and R. Sundrum, hep-th/9810155, to be published; G. F. Giudice, M. A. Luty, R. Rattazzi, and H. Murayama, *JHEP* **12**, 027 (1998); A. Pomerol and R. Rattazzi, hep-ph/9903448, будет опубликовано; E. Kalz, Y. Shadmi, and Y. Shirman, hep-ph/9906296, будет опубликовано.

11б. G. F. Giudice, M. A. Luty, R. Rattazzi, and H. Murayama [11a].

12. K. S. Stelle and P. C. West [4]; S. Ferrara and P. van Nieuwenhuizen [4]; E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, S. Ferrara, L. Girardello, and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* **79B**, 231 (1978); *Nucl. Phys.* **B147**, 105

(1979) (перепечатано в сб.: *Supersymmetry* [2]); E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello, and A. Van Proeyen, *Phys. Lett.* **116B**, 231 (1982); *Nucl. Phys.* **B212**, 413 (1983) (перепечатано в сб.: *Supersyimnetry* [2]).

13. S. Deser and B. Zumino, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1433 (1977). Эта статья перепечатана в сб.: *Supersyimmetry* [2]. Also see D. Z. Freedman and A. Das, *Nucl. Phys.* **B120**, 221 (1977); P. K. Townsend, *Phys. Rev.* **D15**, 2802 (1977).

13a. E. Cremmer, S. Ferrara, C. Kounnas, and D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett.* **133B**, 61 (1983). Обзор моделей, основанных на этой идее см,: A. B. Lahanas and D. V. Nanopoulos, *Phys. Rept.* **145**, 1 (1987).

14. H. P. Niltes, *Phys. Lett.* **115B**, 193 (1982); A. H. Chamseddine, R. Arnowitt, and P. Nath, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 970 (1982); R. Barbieri, S. Ferrara, and C. A. Savoy, *Phys. Lett.* **119B**, 343 (1982); E. Cremmer, P. Fayet, and L. Girardello, *Phys. Lett.* **122B**, 41 (1983); L. E.. Ibáñez, *Phys. Lett.* **118B**, 73 (1982); H. P. Nilles, M. Srednicki, and D. Wyler, *Phys. Lett.* **120B**, 346 (1983); L. J. Hall, J. Lykken, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D27**, 2359 (1983); L. Alvarez-Gaumè, J. Polchinski, and M. B. Wise, *Nucl. Phys.* **B221**, 495 (1983). Эти статьи перепечатаны в сб.: *Supersymmetry* [2]. Also see S. Ferrara, D. V. Nanopoulos, and C. A. Savoy, *Phys. Lett.* **12B**, 214 (1983); J. M. Leon, M. Quiros, and M. Ramon Medrano, *Phys. Lett.* **127B**, 85 (1983); *Phys. Lett.* **129B**, 61 (1983); N. Ohta, *Prog. Theor. Phys.* **70**, 542 (1983); P. Nath, R. Arnowitt, and A. H. Chamseddine, *Phys. Lett.* **121B**, 33 (1983); J. Ellis, D. V. Nanopoulos, and K. Tamvakis, *Phys. Lett.* **121B**, 123 (1983). Обзор см.: H. P. Nilles, *Phys. Rept.* **110**, 1 (1984).

15. Нарушение суперсимметрии в теории супергравитации с ненаблюдаемым сектором киральных скаляров было, по-видимому, впервые рассмотрено в неопубликованном препринте Дж. Полоньи в Будапештском университете (1977).

16. I. Affleck, M. Dine, and N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B256**, 557 (1985).

17. G. F. Giudice and A. Masiero, *Phys. Lett.* **B206**, 480 (1988). См. также J. A. Casas and C. Muñoz, *Phys. Lett.* **B306**, 288 (1993); J. E. Kim, hep-ph/9901204, будет опубликовано.

18. M. Dine and D. A. MacIntire, *Phys. Rev.* **D46**, 2594 (1992).

19. T. Banks, D. B. Kaplan, and A. E. Nelson, *Phys. Rev.* **D49**, 779 (1994); K. I. Izawa and T. Yanagida, *Prog. Theor. Phys.* **94**, 1105 (1995); A. E. Nelson, *Phys. Lett.* **B369**, 277 (1996).

19a. Космологические приложения ситуации, когда вино легче, чем бино, обсуждается в работе: T. Moroi and L. Randall, hep-ph/9906527, будет опубликовано.

20. V. Kaplunovsky and J. Louis, *Phys. Lett.* **B306**, 269 (1993); *Nucl. Phys.* **B422**, 57 (1994). Конкретные модели этого типа были предложены в работах: P. Binetruy, M. K. Gaillard, and Y.-Y. Wu, *Nucl. Phys.* **B493**, 27 (1997); *Phys. Lett.* **B412**, 288 (1997).

21. Теории с доплнительными измерениями, в которых эффекты с изменением аромата подавлены, были рассмотрены L. Randall and R. Sundrum [11a]. Трудности этих теорий отмечены в работе: Z. Chacko, M. A. Luty, I. Maksymyk, and E. Ponton, hep-ph/9905390, будет опубликовано.

22. K. Hamaguchi, K. I. Izawa, Y. Nomura, and T. Yanagida, hep-ph/9903207, будет опубликовано.

32

Алгебры суперсимметрии в пространствах высших размерностей

Начиная с потрясших основы работ Калуцы [1] и Клейна [2], теоретики время от времени пытались сформулировать фундаментальную физическую теорию в пространстве-времени с числом измерений более четырех. Этот подход был возрожден к жизни в теории суперструн, которая в простейшей форме включает 10-мерное пространство-время [3]. Сравнительно недавно было выдвинуто предположение, что различные версии теории струн могут быть объединены в так называемой *М-теории*, которая в одном предельном случае приближенно описывается супергравитацией в 11-мерном пространстве-времени [4]. В этой главе мы перечислим различные возможные типы алгебр суперсимметрии в пространствах высших размерностей и используем их для классификации супермультиплетов частиц.

32.1. Общие алгебры суперсимметрии

В нашем анализе общего вида алгебр суперсимметрии в пространствах высших размерностей мы будем следовать той же логической линии, что и Хааг, Лопушанский и Сониус [5] в описанной в разделе 25.2 работе по алгебрам суперсимметрии в четырехмерном пространстве-времени. Доказательство теоремы Коулмена–Мандулы в приложении к главе 24 ясно показывает, что список возможных генераторов бозонной симметрии для пространства-времени с числом измерений $d > 2$ остается таким же, как для четырехмерного пространства-времени: в S-матричной теории частиц имеются только d-вектор импульса P^μ, лоренцевский генератор $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$ (где μ и ν пробегают значения $1, 2, \ldots, d-1, 0$) и различные лоренцевские скалярные «заряды». (В некоторых теориях в дополнение к частицам имеются топологически стабильные протяженные объекты, такие как струны, мембраны и т. п., которые делают возможным существование других сохраняющихся величин, к которым мы вернемся в разделе 32.3.) Антикоммутаторы генераторов фермионной симметрии друг с другом есть генераторы бозонной симметрии, поэтому они должны быть линейными комбинациями P^μ, $J^{\mu\nu}$ и различных сохраняющихся зарядов. Это накладывает жесткие ограничения на свойства преобразований Лоренца фермионных генераторов и на супер態алгебру, к которой они принадлежат.

Прежде всего докажем, что общие генераторы фермионной симметрии должны преобразовываться согласно фундаментальным спинорным представлениям группы Лоренца, которые рассмотрены в приложении к этой главе, а не согласно более высоким спинорным представлениям, получающимся добавлением к спинору векторных индексов. Как мы видели в разделе 25.2, в доказательстве Хаага, Лопушанского и Сониуса для $d=4$ используется изоморфизм $SO(4)$ и $SU(2)\times SU(2)$, который не имеет аналогов в высших размерностях. Здесь мы воспользуемся рассуждением Нама [6], который фактически несколько проще и применим для любого числа измерений.

Поскольку преобразование Лоренца любого генератора фермионной симметрии дает другой генератор фермионной симметрии, эти генераторы образуют представление однородной группы Лоренца $O(d-1,d)$ (или, точнее говоря, ее накрывающей группы $Spin(d-1,1)$). Предположим, что имеется, самое большее, конечное число генераторов фермионной симметрии. Тогда они должны преобразовываться согласно конечномерному представлению однородной группы Лоренца. Все такие представления можно получить из конечномерных *унитарных* представлений соответствующей ортогональной группы $O(d)$ (фактически $Spin(d)$) подстановкой $x^d = ix^0$. Поэтому рассмотрим сначала преобразование фермионных генераторов относительно $O(d)$. Для четных или нечетных d можно найти $d/2$ или $(d-1)/2$ коммутирующих друг с другом лоренцевских генераторов $J_{d1}, J_{23}, J_{45},\dots$ и классифицировать фермионные генераторы Q согласно значениям $\sigma_{d1},\sigma_{23},\dots$, которые они уничтожают:

$$[J_{d1},Q]=-\sigma_{d1}Q,\quad [J_{23},Q]=-\sigma_{23}Q,\quad [J_{45},Q]=-\sigma_{45}Q,\dots \tag{32.1.1}$$

Поскольку все конечномерные представления $O(d)$ унитарны, то все значения σ действительны.

Сосредоточим внимание на одном из этих квантовых чисел, $\sigma_{d1}\equiv w$. Будем говорить о любом фермионном или бозонном операторе O, что он имеет *вес* w, если

$$[J_{d1},O]=-wO, \tag{32.1.2}$$

или, используя компоненту Минковского $J_{01}=iJ_{d1}$,

$$[J_{01},O]=-iwO. \tag{32.1.3}$$

Причина внимания к этому квантовому числу объясняется тем, что оно имеет особое свойство: оно одинаково для оператора и ему эрмитово сопряженного. Это свойство следует из того, что J_{01} должно представляться в гильбертовом пространстве (однако не в полевых переменных или генераторах симметрии) эрмитовым оператором, так что (поскольку w действительно) эрмитовое сопряжение соотношения (32.1.3) имеет вид

$$-[J_{01}, O^*] = +iwO^*, \tag{32.1.4}$$

и O^* имеет такой же вес, как O.

Рассмотрим теперь антикоммутатор $\{Q, Q^*\}$ любого генератора фермионной симметрии Q с ему эрмитово сопряженным. Согласно теореме Коулмена–Мандулы, этот антикоммутатор есть, самое большее, линейная комбинация P_μ, $J_{\mu\nu}$ и скаляров. Для вычисления весов компонент P_μ вспомним коммутационное соотношение (2.4.13)

$$i[P_\mu, J_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho,$$

которое показывает, что $P_0 \pm P_1$ имеет вес $w = \pm 1$, тогда как все другие компоненты $P_2, P_3 \ldots, P_{d-1}$ имеют веса, равные нулю. Аналогично из коммутационных соотношений (2.4.12) для компонент $J_{\mu\nu}$ друг с другом следует, что $J_{0i} \pm J_{1i}$ для $i = 2, 3, \ldots d-1$ имеют вес $w = \pm 1$, а J_{10} и J_{ij} с обоими индексами i и j от 2 до $d-1$ имеют вес нуль. Все скаляры, разумеется, также имеют вес нуль. Мы приходим к выводу, что все генераторы бозонной симметрии имеют вес ± 1 или 0, и антикоммутатор $\{Q, Q^*\}$ должен быть линейной комбинацией операторов с такими весами. Если Q имеет вес w, то $\{Q, Q^*\}$ имеет вес $2w$, и это явно не нуль для любого ненулевого Q, так что каждый фермионный генератор может иметь вес только $\pm 1/2$. (Вес нуль исключен из-за связи спина и статистики — фермионные операторы могут быть сконструированы только из нечетного числа операторов с полуцелыми весами.) Вернемся к евклидову формализму. Поскольку коммутаторы конкретного $O(d)$ генератора J_{01} со всеми генераторами Q в представлении группы $O(d)$ дает соотношение (32.1.2) с $w = \pm 1/2$, а плоскость 01 ничем особо не выделена, то $O(d)$ инвариантность требует, чтобы то же самое было верно для всех $O(d)$ генераторов J_{ij}, так что все σ в формуле (32.1.1) равны $\pm 1/2$. Единственными неприводимыми представлениями однородной группы Лоренца со всеми σ, равными $\pm 1/2$, являются фундаментальные спинорные представления, так что Q должно принадлежать некоторой прямой сумме этих представлений.

Этот подход можно использовать также для того, чтобы показать, что все фермионные генераторы Q коммутируют с d-импульсом P_μ. Для этого заметим, что двойной коммутатор оператора импульса $P_0 \pm P_1$, имеющего вес ± 1, с любым фермионным генератором Q должен был бы иметь вес либо $\pm 5/2$, если Q имеет вес $\pm 1/2$, либо $\pm 3/2$, если Q имеет вес $\mp 1/2$, а поскольку, как мы уже нашли, не существует генераторов фермионной симметрии с весом $\pm 3/2$ или $\pm 5/2$, все такие двойные коммутаторы должны обращаться в нуль:

$$[P_0 \pm P_1, [P_0 \pm P_1, Q]] = 0.$$

Тогда

$$[P_0 \pm P_1, [P_0 \pm P_1, \{Q, Q^*\}]] = -2\{Q_\pm, Q^*_\pm\},$$

где

$$Q_\pm \equiv [P_0 \pm P_1, Q].$$

Далее, $\{Q, Q^*\}$ есть, самое большее, линейная комбинация P, J и скалярных генераторов симметрии. Коммутаторы $P_0 \pm P_1$ с P и со скалярными генераторами симметрии равны нулю, а коммутаторы $P_0 \pm P_1$ с J есть линейные комбинации P, которые коммутируют со вторым $P_0 \pm P_1$, поэтому двойной коммутатор $[P_0 \pm P_1, [P_0 \pm P_1, \{Q, Q^*\}]]$ должен обращаться в нуль, следовательно, $\{Q_\pm, Q^*_\pm\} = 0$, откуда вытекает, что $Q_\pm = 0$. Таким образом, *все* члены представления группы Лоренца, заданного операторами Q, коммутируют с P_0 и P_1. Тогда из лоренц-инвариантности следует, что все Q коммутируют со всеми P, что и требовалось доказать.

Важным следствием является утверждение, что, поскольку лоренцевские генераторы $J_{\mu\nu}$ не коммутируют с операторами импульса, они не могут появляться в правой стороне антикоммутационных соотношений. Временно обозначим Q как Q_n, где n пробегает по всем значениям индекса, отличающего различные (не обязательно неэквивалентные) неприводимые спинорные представления среди Q, *включая* теперь сопряженные им Q^*, а также индекса, нумерующего члены этих представлений. Тогда общее антикоммутационное соотношение имеет вид

$$\{Q_n, Q_m\} = \Gamma^\mu_{nm} P_\mu + Z_{nm}, \tag{32.1.5}$$

где Γ^μ_{nm} — c-числовые коэффициенты, а Z_{nm} — сохраняющиеся генераторы скалярной симметрии, коммутирующие с P_μ и $J_{\mu\nu}$. Далее мы хотим показать, что Z_{nm} есть *центральные заряды* алгебры суперсимметрии, т. е., что они коммутируют с Q_ℓ и друг с другом, а также с P_μ, $J_{\mu\nu}$ и всеми другими генераторами симметрии.

Чтобы доказать это утверждение для $d \geqslant 4$, заметим, что для того, чтобы данная скалярная величина Z_{mn} была отлична от нуля, все σ в выражении (32.1.1) для Q_n и для Q_m должны быть противоположными. Рассмотрим другой генератор фермионной симметрии Q_ℓ, для которого набор величин σ в (32.1.1) не совпадает с аналогичным набором ни для Q_n, ни для Q_m. (Для $d \geqslant 4$ такое Q_ℓ всегда имеется в каждом наборе генераторов Q, образующих неприводимое спинорное представление группы $O(d)$.) Применим тождество Якоби для супералгебры

$$[Q_\ell,\{Q_m,Q_n\}]+[Q_m,\{Q_n,Q_\ell\}]+[Q_n,\{Q_\ell,Q_m\}]=0. \qquad (32.1.6)$$

Антикоммутаторы $\{Q_n,Q_\ell\}$ и $\{Q_\ell,Q_m\}$ — операторы, для которых некоторые σ отличны от нуля, поэтому они могут быть линейными комбинациями лишь P, но не Z, и поэтому должны коммутировать со всеми Q. Тогда приходим к равенству

$$0=[Q_\ell,\{Q_m,Q_n\}]=[Q_\ell,Z_{mn}]. \qquad (32.1.7)$$

Таким образом, в каждом наборе операторов Q, образующих неприводимое спинорное представление $O(d)$, имеется, по крайней мере, один оператор коммутирующий с данным Z_{mn}. Но Z_{mn} — лоренцевские скаляры, поэтому они должны коммутировать со всеми Q. Тогда из (32.1.5) сразу следует, что они коммутируют также и друг с другом.

Фермионные генераторы должны образовывать представление (возможно, тривиальное) алгебры $\mathscr{A}$, состоящей из *всех* скалярных генераторов бозонной симметрии. Тогда, точно по таким же соображениям, как в разделе 25.2, центральные заряды Z_{mn} реализуют инвариантную абелеву подалгебру алгебры $\mathscr{A}$. Теорема Коулмена–Мандулы показывает, что алгебра $\mathscr{A}$ должна быть прямой суммой компактной полупростой алгебры Ли, которая, по определению, не содержит инвариантных абелевых подалгебр, и генераторов $U(1)$. Поэтому Z_{mn} должны быть $U(1)$ генераторами, которые коммутируют со всеми другими генераторами бозонной симметрии, но не друг с другом.

Чтобы получить более детальную информацию о структуре антикоммутационных соотношений (32.1.5), требуется конкретное рассмотрение свойств генераторов фермионной симметрии Q_n относительно преобразований Лоренца и свойств, вытекающих из их действительности. Эти свойства оказываются весьма различными для пространства-времени четной и нечетной размерности.

Нечетная размерность

В приложении к этой главе показано, что для пространства-времени нечетной размерности d существует только одно фундаментальное спинорное представление алгебры Лоренца, причем матрицы $\mathscr{J}_{\mu\nu}$ заданы через матрицы Дирака соотношением (32.A.2), так что фермионные генераторы следует снабдить индексами в виде $Q_{\alpha r}$, где α — дираковский индекс, принимающий $2^{(d-1)/2}$ значений, а $r=1,2,\ldots,N$ нумерует различные спиноры в случае N-расширенной симметрии. В этих обозначениях из свойств генераторов Q относительно преобразований Лоренца вытекает, что

$$[J_{\mu\nu}, Q_{\alpha r}] = -\sum_{\beta}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_{\alpha\beta}Q_{\beta r}, \tag{32.1.8}$$

так что антикоммутаторы этих генераторов удовлетворяют закону преобразования

$$[J_{\mu\nu}, \{Q_{\alpha r}, Q_{\beta s}\}] = -\sum_{\bar\alpha}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_{\alpha\bar\alpha}\{Q_{\bar\alpha r}, Q_{\beta s}\} - \sum_{\bar\beta}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_{\beta\bar\beta}\{Q_{\alpha r}, Q_{\bar\beta s}\}.$$

Вспоминая закон лоренцевского преобразования (2.4.13) оператора импульса P_λ, видим, что матрица Γ^λ_{rs} и операторы Z_{rs} в (32.1.5) (с опущенными индексами Дирака) должны удовлетворять условиям

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}(\Gamma_\lambda)_{rs} + (\Gamma_\lambda)_{rs}\mathcal{J}^{\mathrm{T}}_{\mu\nu} = -i(\Gamma_\mu)_{rs}\eta_{\nu\lambda} + i(\Gamma_\nu)_{rs}\eta_{\mu\lambda}, \tag{32.1.9}$$

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}Z_{rs} + Z_{rs}\mathcal{J}^{\mathrm{T}}_{\mu\nu} = 0. \tag{32.1.10}$$

Но из формулы (32.A.38) следует, что $\mathcal{J}^{\mathrm{T}}_{\mu\nu} = -\mathscr{C}^{-1}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathscr{C}$, так что соотношения (32.1.9) и (32.1.10) можно выразить как требование, что $(\Gamma_\mu)_{rs}\mathscr{C}^{-1}$ удовлетворяет тем же коммутационным соотношениям (32.A.32) с $\mathcal{J}_{\mu\nu}$, как и γ_μ, тогда как $Z_{rs}\mathscr{C}^{-1}$ коммутирует с $\mathcal{J}_{\mu\nu}$. Для нечетных d матрицы, удовлетворяющие этим условиям, определяются однозначно с точностью до постоянных множителей, поэтому можно сделать вывод, что

$$\Gamma^\lambda_{\alpha r\beta s} = ig_{rs}(\gamma^\lambda\mathscr{C})_{\alpha\beta} \tag{32.1.11}$$

и

$$Z_{\alpha r\beta s} = \mathscr{C}_{\alpha\beta}z_{rs}, \tag{32.1.12}$$

где множитель i включен в выражение (32.1.11) для дальнейшего удобства. Теперь, опуская индексы Дирака, можно записать антикоммутационные соотношения (32.1.5) в виде

$$\{Q_r, Q^{\mathrm{T}}_s\} = ig_{rs}\gamma^\lambda\mathscr{C}P_\lambda + z_{rs}\mathscr{C}. \tag{32.1.13}$$

Величины $\Gamma^\lambda_{\alpha r\beta s}$ и $Z_{\alpha r\beta s}$ симметричны относительно перестановки α и r с β и s, тогда как соотношения (32.A.30) и (32.A.31) (при $d = 2n+1$) показывают, что: $\gamma^\lambda\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}$ симметричны для $d = 1$ (mod 8); $\gamma^\lambda\mathscr{C}$ симметрично, а $\mathscr{C}$ антисимметрично для $d = 3$ (mod 8); $\gamma^\lambda\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}$

симметричны для $d=5 \pmod 8$; $\gamma^\lambda\mathscr{C}$ антисимметрично, а $\mathscr{C}$ симметрично для $d=7 \pmod 8$. Отсюда следует, что: g_{rs} и z_{rs} симметричны для $d=1 \pmod 8$; g_{rs} симметрично, а z_{rs} антисимметрично для $d=3 \pmod 8$; антисимметрично, а z_{rs} симметрично для $d=7 \pmod 8$.

Матрицы, комплексно сопряженные $\mathscr{J}_{\mu\nu}$, даны соотношением (32.A.37). Взяв эрмитово сопряжение равенства (32.1.8), видим, что оператор $\sum_\beta(\mathscr{C}\beta)_{\alpha\beta}Q^*_{\beta r}$ имеет те же самые свойства преобразования, что и любой генератор $Q_{\alpha s}$, и поэтому должен быть их линейной комбинацией:

$$\sum_\beta(\mathscr{C}\beta)_{\alpha\beta}Q^*_{\beta r}=\sum_s\mathscr{S}_{rs}Q_{\alpha s}. \tag{32.1.14}$$

Эрмитовое сопряжение этого уравнения вместе с (32.A.28) и (32.A.29) при $d=2n+1$ дает

$$\mathscr{S}^*\mathscr{S}=(-1)^a\cdot 1, \quad a=(d-1)(d-3)/8. \tag{32.1.15}$$

Для $d=1 \pmod 8$ и $d=3 \pmod 8$ спинорное представление алгебры Лоренца действительно, и можно выбрать такой базис для фермионных генераторов, что $\mathscr{S}=1$. Напротив, для $d=5 \pmod 8$ и для $d=7 \pmod 8$ спинорные представления алгебры Лоренца псевдодействительны, и, очевидно, невозможно выбрать базис с $\mathscr{S}\propto 1$. Вычисляя определитель соотношения (32.1.15), видим, что в этом случае $\mathrm{Det}(-1)>0$, поэтому для $d=5 \pmod 8$ и для $d=7 \pmod 8$ должно быть четное число N фермионных генераторов. В этом случае можно выбрать базис, в котором $\mathscr{S}=\Omega$, где Ω — действительная антисимметричная блочно-диагональная матрица

$$\Omega=\begin{pmatrix} e & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e & \dots \\ & \dots & & \end{pmatrix}, \quad e=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32.1.16}$$

Чтобы вывести свойства действительности и положительности величин g_{rs} и z_{rs}, используем (32.1.14) для преобразования антикоммутационного соотношения (32.1.13) к виду

$$\{Q_r,Q_s^\dagger\}=i(g\mathscr{S}^{\mathrm{T}})_{rs}\gamma_\lambda\mathscr{S}(\mathscr{C}\beta)^{\mathrm{T}-1}P^\lambda+(z\mathscr{C}^{\mathrm{T}})_{rs}\mathscr{C}(\mathscr{C}\beta)^{\mathrm{T}-1}.$$

Соотношения (32.A.12), (32.A.16) и (32.A.30) с $d=2n+1$ показывают, что $\beta^{\mathrm{T}}=-\beta$ и $\mathscr{C}\mathscr{C}^{\mathrm{T}-1}=(-1)^{(d-1)(d+1)/8}\cdot 1$, так что

$$\{Q_r,Q_s^\dagger\}=-(-1)^{(d-1)(d+1)/8}\left[i(g\mathscr{S}^{\mathrm{T}})_{rs}\gamma_\lambda\beta P^\lambda+(z\mathscr{S}^{\mathrm{T}})_{rs}\beta\right]. \tag{32.1.17}$$

Вспоминая, что $\gamma_0 = i\beta$, замечаем, что матрица операторов $-i\gamma_\lambda\beta P^\lambda$ является положительной, а также положительно-определенной, за исключением вакуумного состояния. Рассматривая состояние с достаточно большим импульсом, таким, что членом с центральным зарядом можно пренебречь, приходим к выводу, что матрица $(-1)^{(d-1)(d+1)/8}g\mathscr{S}^{\mathrm{T}}$ положительна и эрмитова. Рассматривая затем произвольные импульсы, находим также, что массив операторов $(z\mathscr{S}^{\mathrm{T}})_{rs}$ эрмитов. (Для ненулевых центральных зарядов существует нижняя граница на массу, аналогичная (25.5.22), которая здесь не приводится.) Из эрмитовости $g\mathscr{S}^{\mathrm{T}}$ имеем

$$g^\dagger = \mathscr{S}^{\mathrm{T}\dagger-1}g\mathscr{S}^{\mathrm{T}} = (-1)^a\mathscr{S}g\mathscr{S}^{\mathrm{T}}. \qquad (32.1.18)$$

Теперь мы в состоянии с помощью подходящего выбора базиса ввести антикоммутационные соотношения в удобной канонической форме.

Для $d = 1 \pmod 8$ g и z симметричны и $(-1)^a = +1$, поэтому, если выбрать такой базис, в котором $\mathscr{S} = 1$, то g будет действительным, а индивидуальные операторы z_{rs} будут эрмитовыми. Не меняя выбора $\mathscr{S} = 1$, можно ввести новые Q, умножая старые Q на любую действительную матрицу $\mathscr{A}$. При этом g меняется на $\mathscr{A}g\mathscr{A}^{\mathrm{T}}$. Поскольку для $d = 1 \pmod 8$ g есть положительная матрица, можно, согласно хорошо известной теореме [6a], выбрать $\mathscr{A}$ так, чтобы сделать $g = 1$.

Для $d = 3 \pmod 8$ g симметрично, z антисимметрично, а $(-1)^a = +1$, так что при выборе такого базиса, в котором $\mathscr{S} = 1$, g действительно, а индивидуальные операторы z_{rs} антиэрмитовы. Далее, как и в случае $d = 1 \pmod 8$, можно подбором базиса добиться того, что $g = 1$.

Для $d = 5 \pmod 8$ g антисимметрично, так что, при выборе $\mathscr{S} = \Omega$, соотношение (32.1.18) принимает вид $g^* = -\Omega g\Omega$, где Ω — стандартная антисимметричная матрица (32.1.16). В данном случае можно ввести новые Q, не меняя выбора $\mathscr{S} = \Omega$, если умножить старые Q на любую матрицу $\mathscr{B}$, такую что $\mathscr{B}^* = -\Omega\mathscr{B}\,\Omega$. При этом g меняется на $\mathscr{B}g\mathscr{B}^{\mathrm{T}}$. Поскольку $(-1)^a = -1$, $g\Omega$ положительно, и, таким образом, можно выбрать $g = -\Omega$. Кроме того, z антисимметрично, а $z\Omega$ эрмитово, поэтому $z^* = -\Omega z\Omega$.

Для $d = 7 \pmod 8$ g снова антисимметрично, но $(-1)^a = +1$, поэтому тем же способом, что и в случае $d = 5 \pmod 8$, можно выбрать такой базис, в котором $g = +\Omega$. Кроме того, теперь z симметрично, а $z\Omega$ снова эрмитово, поэтому теперь $z^* = +\Omega z\Omega$.

Четная размерность

Как показано в приложении к этой главе, для пространства-времени четной размерности d имеются два неэквивалентных фундаментальных спинорных представления алгебры Лоренца, определяемых матрицами $\mathcal{J}^{\pm}_{\mu\nu}$, которые выражаются через матрицы Дирака соотношениями (32.A.22), (32.A.2) и (32.A.17). Поэтому здесь фермионные генераторы следует обозначать как $Q^{\pm}_{\alpha r}$, где α — дираковский индекс, принимающий $2^{d/2}$ значений, а индекс r различает различные Q, принадлежащие эквивалентным представлениям алгебры Лоренца в случае расширенной суперсимметрии, причем

$$\sum_{\beta}(\gamma_{d+1})_{\alpha\beta}Q^{\pm}_{\beta r} = \pm Q^{\pm}_{\alpha r}, \tag{32.1.19}$$

где $\gamma_{d+1} \equiv i^{d/2-1}\gamma_1 \ldots \gamma_{d-1}\gamma_0$. В этих обозначениях из свойств лоренцевских преобразований генераторов Q вытекает, что

$$[J_{\mu\nu}, Q^{\pm}_{\alpha r}] = -\sum_{\beta}\left(\mathcal{J}^{\pm}_{\mu\nu}\right)_{\alpha\beta}Q^{\pm}_{\beta r}, \tag{32.1.20}$$

где $\mathcal{J}^{\pm}_{\mu\nu}$ — матрицы (32.A.22). Те же соображения, которые для нечетных d привели к антикоммутационным соотношениям (32.1.13), теперь, с учетом (32.1.19) и соотношения $\mathscr{C}^{-1}\gamma_{d+1}\mathscr{C} = (-1)^{d/2}\gamma_{d+1}$, дают

$$\{Q^{\pm}_r, Q^{\mp(-1)^{d/2}\mathrm{T}}_s\} = ig^{\pm}_{rs}\left(\frac{1 \pm \gamma_{d+1}}{2}\right)\gamma^{\lambda}\mathscr{C}P_{\lambda}, \tag{32.1.21}$$

$$\{Q^{\pm}_r, Q^{\pm(-1)^{d/2}\mathrm{T}}_s\} = z^{\pm}_{rs}\left(\frac{1 \pm \gamma_{d+1}}{2}\right)\mathscr{C}. \tag{32.1.22}$$

Соотношения (32.A.30) и (32.A.31) показывают, что $\mathscr{C}\gamma^{\lambda}$ симметрично для $d = 0 \pmod 8$ и $d = 2 \pmod 8$ и антисимметрично для $d = 4 \pmod 8$ и $d = 6 \pmod 8$, а $\mathscr{C}$ симметрично для $d = 0 \pmod 8$ и $d = 6 \pmod 8$ и антисимметрично для $d = 2 \pmod 8$ и $d = 4 \pmod 8$. Следовательно, соотношение (32.1.21) требует выполнения свойств симметрии

$$g^{\pm}_{rs} = \begin{cases} g^{\mp(-1)^{d/2}}_{sr}, & d = 0,2 \pmod 8, \\ -g^{\mp(-1)^{d/2}}_{sr}, & d = 4,6 \pmod 8, \end{cases} \tag{32.1.23}$$

а соотношение (32.1.22) требует, чтобы

$$z^{\pm}_{rs} = \begin{cases} z^{\pm(-1)^{d/2}}_{sr}, & d = 0,6 \pmod 8, \\ -z^{\pm(-1)^{d/2}}_{sr}, & d = 2,4 \pmod 8. \end{cases} \tag{32.1.24}$$

В частности, $z^{\pm}$ симметрично для $d = 0 \pmod 8$, $g^{\pm}$ симметрично для $d = 2 \pmod 8$, $z^{\pm}$ антисимметрично для $d = 4 \pmod 8$, а $g^{\pm}$ антисимметрично для $d = 6 \pmod 8$.

Соотношения, эрмитово сопряженное (32.1.20), с учетом (32.A.25) показывает, что $\mathscr{C}\beta Q_r^{\pm *}$ имеет такие же свойства преобразования Лоренца, как операторы $Q_s^{\mp(-1)^{d/2}}$, и поэтому является их линейной комбинацией:

$$\mathscr{C}\beta Q_r^{\pm *} = \sum_s \mathscr{S}_{rs}^{\pm} Q_s^{\mp(-1)^{d/2}}. \tag{32.1.25}$$

Взяв эрмитово сопряженное этому уравнению и используя соотношения (32.A.28) и (32.A.29), находим при $d = 2n$

$$\mathscr{S}^{\pm *}\mathscr{S}^{\mp(-)d/2} = (-1)^a \cdot 1, \quad a = d(d-2)/8. \tag{32.1.26}$$

Для $d = 0 \pmod 8$ и $d = 4 \pmod 8$ соотношение (32.1.25) связывает одно неприводимое представление с другим, и можно выбрать базис, в котором $\mathscr{S}^{\pm} = 1$ для $d = 0 \pmod 8$ и $\mathscr{S}^{\pm} = \pm 1$ для $d = 4 \pmod 8$. Для $d = 2 \pmod 8$ соотношение (32.1.25) связывает действительные представления между собой, и можно выбрать базис с $\mathscr{S}^{\pm} = 1$. Для $d = 6 \pmod 8$ соотношение (32.1.25) связывает псевдодействительные представления между собой; определитель выражения (32.1.26) показывает, что должно существовать четное число генераторов Q^{+} и четное (но не обязательно то же самое) число генераторов Q^{-}, и можно выбрать базис с $\mathscr{S}^{\pm} = \Omega^{\pm}$, где $\Omega^{\pm}$ — стандартная действительная матрица вида (32.1.16).

Свойства действительности и положительности $g_{rs}^{\pm}$ и свойства действительности $z_{rs}^{\pm}$ можно вывести из антикоммутационных соотношений (32.1.21) и (32.1.22), преобразовав их с помощью (32.1.25) к виду

$$\{Q_r^{\pm}, Q_s^{\pm\dagger}\} = \left(\frac{1 \pm \gamma_{d+1}}{2}\right)\gamma_\lambda \beta P^\lambda \mathscr{C}(\mathscr{C}\beta)^{\mathrm{T}-1}\left(g^{\pm}\mathscr{S}^{\mp\mathrm{T}}\right)_{rs}, \tag{32.1.27}$$

$$\{Q_r^{\pm}, Q_s^{\mp\dagger}\} = \left(\frac{1 \pm \gamma_{d+1}}{2}\right)\mathscr{C}(\mathscr{C}\beta)^{\mathrm{T}-1}\left(z^{\pm}\mathscr{S}^{\mp\mathrm{T}}\right)_{rs}. \tag{32.1.28}$$

Используя снова соотношения $\mathscr{O}\,\mathscr{O}^{\,\mathrm{T}-1} = (-1)^{d(d+2)/8}$, $\beta^{\mathrm{T}} = -\beta$ и $\gamma_0 = i\beta$, приходим к выводу, что $(-1)^{d(d+2)/8} g^{\pm}\mathscr{S}^{\pm T}$ эрмитово и положительно, тогда как $(z^{+}\mathscr{S}^{-T})^{\dagger} = z^{-}\mathscr{S}^{+T}$. Для $d = 0 \pmod 8$ можно выбрать базис с $\mathscr{S}^{\pm} = 1$, $g^{\pm} = 1$ и $z^{+\dagger} = z^{-}$; для $d = 2 \pmod 8$ — базис с $\mathscr{S}^{\pm} = 1$, $g^{\pm} = -1$ и $z^{+\dagger} = z^{-}$; для $d = 4 \pmod 8$ — базис с $\mathscr{S}^{\pm} = \pm 1$, $g^{\pm} = \mp 1$ и $z^{+\dagger} = -z^{-}$; для $d = 6 \pmod 8$ — базис с $\mathscr{S}^{\pm} = \Omega^{\pm}$, $g^{\pm} = \Omega^{\pm}$ и $(z^{+}\Omega^{-})^{\dagger} = z^{-}\Omega^{+}$.

Итак, в соответствующем базисе антикоммутационные соотношения и свойства действительности и симметрии имеют следующий вид [66]:

$d = 0 \pmod 8$

$$\{Q_r^\pm, Q_s^{\mp\mathrm{T}}\} = i\delta_{rs}\left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\gamma^\lambda \mathscr{C} P^\lambda, \tag{32.1.29}$$

$$\{Q_r^\pm, Q_s^{\pm\mathrm{T}}\} = z_{rs}^\pm\left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\mathscr{C}, \tag{32.1.30}$$

$$\mathscr{C}\beta Q_r^{\pm *} = Q_r^\mp, \quad z_{rs}^\pm = z_{sr}^\pm = (z_{rs}^\mp)^*. \tag{32.1.31}$$

$d = 1 \pmod 8$

$$\{Q_r, Q_s^\mathrm{T}\} = i\delta_{rs}\gamma^\lambda \mathscr{C} P_\lambda + z_{rs}\mathscr{C}, \tag{32.1.32}$$

$$\mathscr{C}\beta Q_r^* = Q_r, \quad z_{rs} = z_{sr} = z_{rs}^*. \tag{32.1.33}$$

$d = 2 \pmod 8$

$$\{Q_r^\pm, Q_s^{\pm\mathrm{T}}\} = -i\delta_{rs}\left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\gamma^\lambda \mathscr{C} P^\lambda, \tag{32.1.34}$$

$$\{Q_r^\pm, Q_s^{\mp\mathrm{T}}\} = z_{rs}^\pm\left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\mathscr{C}, \tag{32.1.35}$$

$$\mathscr{C}\beta Q_r^{\pm *} = Q_r^\pm, \quad z_{rs}^\pm = -z_{rs}^{\pm *} = -z_{sr}^\mp. \tag{32.1.36}$$

$d = 3 \pmod 8$

$$\{Q_r, Q_s^\mathrm{T}\} = i\delta_{rs}\gamma^\lambda \mathscr{C} P_\lambda + z_{rs}\mathscr{C}, \tag{32.1.37}$$

$$\mathscr{C}\beta Q_r^* = Q_r, \quad z_{rs} = -z_{sr} = -z_{rs}^*. \tag{32.1.38}$$

$d = 4 \pmod 8$

$$\{Q_r^\pm, Q_s^{\mp\mathrm{T}}\} = \mp i\delta_{rs}\left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\gamma^\lambda \mathscr{C} P^\lambda, \tag{32.1.39}$$

$$\{Q_r^\pm, Q_s^{\pm\mathrm{T}}\} = z_{rs}^\pm\left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\mathscr{C}, \tag{32.1.40}$$

$$\mathscr{C}\beta Q_r^{\pm *} = \pm Q_r^\mp, \quad z_{rs}^\pm = z_{rs}^{\mp *} = -z_{sr}^\pm. \tag{32.1.41}$$

$d = 5 \pmod 8$

$$\{Q_r, Q_s^\mathrm{T}\} = -i\Omega_{rs}\gamma^\lambda \mathscr{C} P_\lambda + z_{rs}\mathscr{C}, \tag{32.1.42}$$

$$\mathscr{C}\beta Q_r^* = \sum_s \Omega_{rs} Q_s, \quad z_{rs} = -z_{sr}, \quad z^* = -\Omega z \Omega. \tag{32.1.43}$$

$d=6 \pmod 8$

$$\{Q_r^\pm, Q_s^{\pm\mathrm{T}}\} = i\Omega_{rs}^\pm \left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\gamma^\lambda \mathscr{C} P^\lambda, \tag{32.1.44}$$

$$\{Q_r^\pm, Q_s^{\mp\mathrm{T}}\} = z_{rs}^\pm \left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\mathscr{C}, \tag{32.1.45}$$

$$\mathscr{C}\beta Q_r^{\pm *} = \sum_s \Omega_{rs}^\pm Q_s^\pm, \quad z_{rs}^{\pm *} = \Omega^\pm z_{rs}^\pm \Omega^\mp = z_{sr}^\mp. \tag{32.1.46}$$

$d=7 \pmod 8$

$$\{Q_r, Q_s^{\mathrm{T}}\} = i\Omega_{rs}\gamma^\lambda \mathscr{C} P_\lambda + z_{rs}\mathscr{C}, \tag{32.1.47}$$

$$\mathscr{C}\beta Q_r^* = \sum_s \Omega_{rs} Q_s, \quad z_{rs} = z_{sr}, \quad z^* = +\Omega z \Omega. \tag{32.1.48}$$

Рассмотрение этих антикоммутационных соотношений показывает, что в отсутствие центральных зарядов они инвариантны относительно группы линейных преобразований фермионных генераторов вида $Q_r \to \sum_s V_{rs} Q_s$ для нечетных d и $Q_r^\pm \to \sum_s V_{rs}^\pm Q_s^\pm$ для четных d. Чтобы соотношения (32.1.29)–(32.1.48) оставались неизменными, оператор преобразования V должен удовлетворять следующим условиям:

$d=0$ и $d=4 \pmod 8$

$$V^\pm V^{\mp\mathrm{T}} = 1, \quad V^{\pm *} = V^\mp. \tag{32.1.49}$$

$d=1$ и $d=3 \pmod 8$

$$VV^{\mathrm{T}} = 1, \quad V^* = V. \tag{32.1.50}$$

$d=2 \pmod 8$

$$V^\pm V^{\pm\mathrm{T}} = 1, \quad V^\pm = V^{\pm *}. \tag{32.1.51}$$

$d=5 \pmod 8$

$$V\Omega V^{\mathrm{T}} = \Omega, \quad V^* = -\Omega V \Omega. \tag{32.1.52}$$

$d=6 \pmod 8$

$$V^\pm V^{\pm\mathrm{T}} = 1, \quad V^{\pm *} = -\Omega^\pm V^\pm \Omega^\pm. \tag{32.1.53}$$

$d=7 \pmod 8$

$$V\Omega V^{\mathrm{T}} = \Omega, \quad V^* = -\Omega V \Omega. \tag{32.1.54}$$

Эти матрицы образуют следующие группы:

$d=0$ и $d=4 \pmod 8$	$U(N)$.
$d=1$ и $d=3 \pmod 8$	$O(N)$.
$d=2 \pmod 8$	$O(N_+)\times O(N_-)$.

$d = 5$ и $d = 7 \pmod 8$ $\qquad USp(N), \qquad N$ четно.

$d = 6 \pmod 8$ $\qquad USp(N_+) \times USp(N_-), \qquad N_\pm$ четно.

Здесь N — число фундаментальных спинорных представлений среди всех Q для нечетных d или число фундаментальных спинорных представлений каждой спиральности среди Q для $d = 0 \pmod 8$ и $d = 4 \pmod 8$. Для $d = 2 \pmod 8$ и $d = 6 \pmod 8$ числа фундаментальных спинорных представлений среди Q для каждой спиральности не обязательно одинаковы, поэтому эти числа обозначены через N_+ и N_-.

32.2. Безмассовые мультиплеты

Рассмотрим теперь, как построенные в предыдущем разделе алгебры суперсимметрии можно использовать для того, чтобы сконструировать супермультиплеты состояний безмассовых частиц в пространстве-времени $d \geqslant 4$ измерений. Оператор импульса P^μ коммутирует со всеми генераторами фермионной симметрии, так что мы можем работать в одночастичном подпространстве гильбертова пространства, где P^μ имеет определенный светоподобный собственный вектор p^μ, направление которого можно выбрать так, что $p^1 = p^0$, а все остальные пространственные компоненты p^μ равны нулю. Как и в случае обсуждавшегося в разделе 2.5 4-мерного пространства-времени, эти одночастичные состояния классифицируются согласно конечномерным представлениям малой группы — подгруппы однородной группы Лоренца, которая оставляет p^μ инвариантным. Эта малая группа содержит комбинированные бусты в направлениях, перпендикулярных $\mathbf{p}$, и вращения в плоскости, в которой лежит $\mathbf{p}$, такие как преобразования (2.5.6) для 4-мерного пространства-времени, но они образуют инвариантную абелеву подгруппу и поэтому в конечномерном представлении должны быть представлены единичным оператором. Если исключить эту подгруппу, то приведенная малая группа в d измерениях есть $O(d-2)$, состоящая из вращений в плоскостях, ортогональных $\mathbf{p}$. Поэтому мы классифицируем состояния безмассовых частиц согласно представлениям, которые они образуют в $O(d-2)$ и группах автоморфизмов, описанных в конце предыдущего раздела.

Эти представления более сложны, чем те, с которыми мы имели дело в 4-мерном пространстве-времени, где приведенная малая группа есть $O(2)$, а представления являются одномерными и характеризуются одним числом, спиральностью. Тем не менее, полезно обозначить представления приведенной малой группы $O(2)$ значением «спина», определенного как *наибольшая* абсолютная величина собственного значения любого генератора J_{ij} представления.

Принято считать, что не существует непротиворечивых квантовых теорий поля, включающих безмассовые частицы спина более 2. Известно [7], что *мягкие* безмассовые частицы спина $j > 1/2$ могут взаимодействовать только с сохраняющимися токами, переносящими спин j. Для $j = 1$ это токи обычных скалярных зарядов, подобные электрическому заряду; для $j = 3/2$ они представляют собой один или более супертоков, связанных с суперсимметрией; для $j = 2$ существует только один ток, тензор энергии-импульса; но для $j > 5/2$ не существует сохраняющегося тока, с которым могли бы взаимодействовать мягкие безмассовые частицы. Можно вывести строгие пределы на число измерений, при котором возможна суперсимметрия, если принять, что не должно быть более одного типа безмассовых частиц спина 2 или любых безмассовых частиц спина больше 2.

Вернемся временно к использованной в разделе 32.1 классификации операторов согласно весу, равному значению $O(d)$ генератора J_{d1}, который они уничтожают. (Напомним, что $J_{01} = iJ_{d1}$.) Генераторы фермионной суперсимметрии имеют веса $+1/2$ и $-1/2$, так что антикоммутатор любого из этих генераторов с его эрмитово сопряженным может иметь вес, соответственно, только $+1$ или -1, и поэтому должен быть пропорционален, соответственно, оператору $P^0 + P^1$ или $P^0 - P^1$. Но мы работаем в подпространстве гильбертова пространства, в котором оператор $P^0 - P^1$ обращается в нуль, так что в этом подпространстве все генераторы фермионной суперсимметрии с весом $-1/2$ обращаются в нуль. Поэтому для классификации одночастичных состояний в нашем распоряжении имеется только половина генераторов суперсимметрии, а именно, 2^{n-1} генераторов, имеющих веса $\sigma_{d1} = +1/2$.

Далее, остающиеся генераторы суперсимметрии можно разделить на два класса, такие, что $\sigma_{23} = 1/2$ или $\sigma_{23} = -1/2$ при $\sigma_{d1} = +1/2$. Поскольку оператору $P^0 + P^1$ соответствует $\sigma_{23} = 0$, генераторы фермионной суперсимметрии внутри каждого класса антикоммутируют друг с другом, но не обязательно с им сопряженными или с генераторами другого класса.

Рассмотрим теперь представление малой группы $O(d-2)$ спина j, и любое состояние $|\lambda\rangle$, являющееся собственным состоянием оператора J_{23} с собственным значением $\lambda > 0$ и уничтожаемое любым из генераторов суперсимметрии с $\sigma_{23} = -1/2$. (Любое состояние, которое имеет максимальное значение j для J_{23}, принадлежит к этому типу состояний, но в общем случае могут быть и другие такие состояния.) Действуя на $|\lambda\rangle$ k фермионными генераторами, имеющими $\sigma_{23} = +1/2$ и $\sigma_{d1} = +1/2$, можно образовать состояния с $J_{23} = \lambda - k/2$. (Можно показать, что ни одно из таких состояний не обращается в нуль, поскольку действие на них сопряженными k этих фермионных генераторов переводит их обратно в состояние $|\lambda\rangle$.) Если полное число генераторов фермионной симметрии всех типов равно $\mathcal{N}$, то среди них имеется $\mathcal{N}/4$ генераторов с $\sigma_{23} = +1/2$ и $\sigma_{d1} = +1/2$, а поскольку все эти операторы антикоммутируют, число состояний с $J_{23} = \lambda - k/2$, образованных указанным способом, будет равно биномиальному коэффициенту

$$\binom{\mathcal{N}/4}{k}, \tag{32.2.1}$$

причем сумма таких коэффициентов от $k = 0$ до максимального значения $k = \mathcal{N}/4$ дает полное число компонент $2^{\mathcal{N}/4}$. Наименьшее собственное значение оператора J_{23}, полученное таким путем и равное $\lambda - \mathcal{N}/8$, достигается действием $k = \mathcal{N}/4$ генераторов суперсимметрии на состояние $|\lambda\rangle$. Полагая $\lambda = j$, видим, что для того, чтобы устранить собственные значения J_{23} больше +2 или меньше -2, необходимо иметь $j \leqslant 2$ и $j - \mathcal{N}/8 \geqslant -2$, для чего полное число генераторов $\mathcal{N}$ должно быть не больше 32.

Далее, для $\mathcal{N} = 32$ генераторов суперсимметрии может существовать, самое большее, один супермультиплет безмассовых частиц, образованный действием произведения генераторов суперсимметрии с $\sigma_{23} = +1/2$ и $\sigma_{d1} = +1/2$ на состояние $|2\rangle$. Для любого генератора малой группы эти состояния имеют собственные значения, пробегающие значения от -2 до $+2$ с шагом $1/2$. Только для $\mathcal{N} < 32$ могут существовать супермультиплеты «материи», т. е. супермультиплеты, не содержащие гравитона.

Единственное фундаментальное спинорное представление как в $2n$, так и в $2n+1$ измерениях имеет 2^n компонент, поэтому, для того чтобы число фермионных генераторов было не более 32, нужно иметь $n \leqslant 5$. Тогда размерность пространства-времени может быть не больше, чем $d = 11$, причем в этом случае должно быть $N = 1$. Супергравитация в 11 измерениях представляет особый интерес, поскольку она может быть «низкоэнергетическим» пределом фундаментальной теории, известной как *М-теория* [4], которая, как полагают, в других пределах дает различные теории струн. Рассмотрим более детально спиновый состав $N = 1$ суперсимметрии в $d = 11$ измерениях, как пример того, как это можно сделать с помощью разработанного метода подсчета.

Все состояния безмассового мультиплета для $d = 11$ можно сконструировать действием произведений $k = 0, 1, \ldots, 8$ генераторов суперсимметрии, имеющих $\sigma_{23} = +1/2$ и $\sigma_{2n-1\,2n} = +1/2$, на собственное состояние $|2\rangle$ оператора J_{23} с собственным значением 2. Согласно (32.2.1), мы получим одно состояние с $J_{23} = \pm 2$, восемь состояний каждое с $J_{23} = \pm 3/2$, двадцать восемь состояний каждое с $J_{23} = \pm 1$, пятьдесят шесть состояний каждое с $J_{23} = \pm 1/2$, и семьдесят состояний с $J_{23} = 0$.

Для $d = 11$ гравитонное представление спина 2 малой группы $O(9)$ есть симметричный тензор с нулевым следом, имеющий $9 \times 10/2 - 1 = 44$ независимых компонент: одна компонента $2 \pm i3, 2 \pm i3$ с $J_{23} = \pm 2$; семь компонент $2 \pm i3, k$ с $J_{23} = \pm 1$; двадцать восемь компонент k, l с $J_{23} = 0$. (Здесь k, l пробегают семь значений $4, 5, \ldots, 10$. Компонента $2 + i3, 2 - i3$ не учитывается, поскольку в этом представлении она связана с k, l компонентами условием, что след тензора равен нулю.)

Имеется также одно представление гравитино со спином 3/2. Оно состоит из спинора ψ_i с дополнительным девяти-векторным индексом i, удовлетворяющего условию неприводимости $\sum_i \gamma_i \psi_i = 0$. Это условие исключает компоненты спина 1/2, так что спинор имеет $9 \times 16 - 16 = 128$ независимых компонент.

Вычитая из числа компонент с каждым значением J_{23}, полученных действием генераторов суперсимметрии на состояние $|2\rangle$, число соответствующих компонент, содержащихся в состояниях гравитона и гравитино, видим, что должно существовать одно или более дополнительных состояний, имеющих всего $28 - 7 = 21$ компоненту с $J_{23} = \pm 1$ и $70 - 28 = 42$ компоненты с $J_{23} = 0$.

Единственными представлениями ортогональных групп, которые не имеют собственных значений J_{ij}, отличных от ± 1 и 0, являются антисимметричные тензоры. Антисимметричный тензор $T_{i_1 \ldots i_p}$ ранга p в девяти измерениях имеет

$$\binom{7}{p} \text{ компонент } T_{k_1 \ldots k_p} \text{ с } J_{23} = 0,$$

$$\binom{7}{p-1} \text{ компонент } T_{2 \pm i3\, k_2 \ldots k_p} \text{ с } J_{23} = \pm 1,$$

$$\binom{7}{p-2} \text{ компонент } T_{2+i3\, 2-i3\, k_3 \ldots k_p} \text{ с } J_{23} = 0,$$

где $k_1, \ldots, k_p$ принимают семь значений $4, 5, \ldots 10$. Для $O(9)$ независимые антисимметричные тензоры могут иметь ранг $p = 0, 1, 2, 3$ и 4. Антисимметричный тензор ранга 4 имеет 35 компонент с $J_{23} = \pm 1$, что больше, чем нужно, поэтому его следует исключить. Любая комбинация тензоров ранга $p = 0$, $p = 1$ и $p = 2$ с необходимым числом компонент с $J_{23} = \pm 1$, равным 21, должна была бы иметь слишком много компонент с $J_{23} = 0$ (147 для 21 1-формы и 0 2-форм; 120 для 14 1-форм и одной 2-формы; 53 для 7 1-форм и двух 2-форм; 66 для 0 1-форм и трех 2-форм), поэтому нужно включить, по крайней мере, одну 3-форму. Антисимметричный тензор ранга $p = 3$ имеет точно 21 компоненту с $J_{23} = \pm 1$ и 42 компоненты с $J_{23} = 0$, то есть как раз столько, сколько нужно. Поэтому мы приходим к выводу, что *единственный мультиплет безмассовых частиц для $N = 1$ суперсимметрии в $d = 11$ измерениях содержит гравитон, гравитино и частицу, состояния которой преобразуются относительно преобразований малой группы как один антисимметричный тензор ранга 3.*

Для $d = 10$ имеется больше разных возможностей. Здесь $\mathcal{N} = 32$ генераторов можно получить двумя путями: фермионные генераторы могут включать два 16-компонентных вейлевских спинора одинаковой спиральности с группой автоморфизмов $O(2)$ или два спинора противоположной спиральности без группы автоморфизмов. Для $d = 10$ можно также иметь один вейлевский фермионный генератор с $\mathcal{N} = 16$ независимыми компонентами. Эти три возможности играют важную роль в современных теориях суперструн — они представляют спектр безмассовых частиц для суперструн трех видов: типа IIA для 16 генераторов каждой спиральности; типа IIB для 32 генераторов одной и той же спиральности; гетеротическая суперструна для 16 генераторов одной спиральности.

Тип IIA с противоположными спиральностями для $d = 10$ подобен случаю $d = 11$, за исключением того, что неприводимые представления малой группы $O(9)$ для $d = 11$ расщепляются на отдельные неприводимые представления малой группы $O(8)$ для $d = 10$. Так, гравитонный мультиплет $O(9)$ разлагается на гравитон $O(8)$ с $8 \times 9/2 - 1 = 35$ компонентами, вектор $O(8)$ с 8 компонентами и скаляр с 1 компонентой; мультиплет $O(9)$ гравитино разлагается на $O(8)$ гравитино каждой спиральности, с $(16 \times 8 - 16)/2 = 56$ компонентами каждое, и $O(8)$ спиноры каждой спиральности, с 8 компонентами каждый; 3-форма $O(9)$ разлагается на $O(8)$ 3-форму с 56 компонентами и $O(8)$ 2-форму с 28 компонентами.

В случае типа IIB для $d = 10$ с $N_+ = 2$ и $N_- = 0$ состояния следует классифицировать согласно представлению малой группы $O(8)$ и квантовому числу q, которое нумерует представления группы автоморфизмов $O(2)$, в которой генераторы суперсимметрии преобразуются как 2-вектор. Поскольку имеется только один гравитон, он должен иметь $q = 0$. Действие генератора суперсимметрии на эти состояния дает *два* гравитино с $q = \pm 1$ и 56 компонентами каждое; действие другого генератора суперсимметрии дает два тензора, образующих 2-форму, с $q = \pm 2$ и с 28 компонентами каждый; действие еще одного генератора суперсимметрии дает два вейлевских спинора с $q = \pm 3$ и 8 компонентами каждый; наконец, действие еще одного генератора суперсимметрии дает два скаляра с $q = \pm 4$ и самодуальную 4-форму с $q = \pm 0$ и 35 компонентами.

В случае гетеротической струны для $d = 10$ с одним вейлевским фермионным генератором имеется ровно $\mathcal{N} = 16$ независимых компонент.

В этом случае имеется гравитонный супермультиплет, состоящий из гравитона, преобразующегося при $O(8)$ как симметричный бесследовый тензор с 35 независимыми компонентами; гравитино с 56 независимыми компонентами; $O(8)$ 2-формы с 28 независимыми компонентами; вейлевского спинора с 8 компонентами; скаляра. (Этот гравитонный супермультиплет конструируется действием генераторов суперсимметрии на одно состояние $|2\rangle$, *шесть* состояний $|1\rangle$ и одно состояние $|0\rangle$, что все вместе дает $8 \times 2^4 = 128 = 35 + 56 + 28 + 8 + 1$ компонент.) Здесь также возможны калибровочные супермультиплеты, которые не содержат частиц, имеющих собственные значения больше 1 или меньше -1 для любого J_{ij}. Эти калибровочные супермультиплеты получаются действием генераторов суперсимметрии на состояние $|1\rangle$ и содержат одну калибровочную частицу, принадлежащую векторному представлению $O(8)$ с 8 компонентами, и одну частицу, преобразующуюся как фундаментальный вейлевский спинор $O(8)$, также с 8 компонентами.

32.3. p-Браны

В некоторых теориях в дополнение к частицам имеются стабильные протяженные объекты, либо бесконечной протяженности, либо стабилизированные посредством «обвивания» вокруг топологически нетривиального пространства-времени. Изучение суперсимметрии и супергравитации в такого типа теориях высших размерностей обнаружило замечательные возможности для конструирования теорий струн и суперсимметричных теорий поля в пространстве-времени меньшей размерности и для доказательства эквивалентности одних таких теорий другим [4,8], которые, однако, выходят за рамки этой книги. Здесь нас интересует лишь такая особенность этих протяженных объектов, что они могут обладать сохраняющимися бозонными величинами, отличающимися от тех, которые разрешены теоремой Коулмена–Мандулы. Эти новые сохраняющиеся величины могут появляться в правой части антикоммутационных соотношений суперсимметрии вместе с оператором импульса и обычными сохраняющимися величинами [9].

Во всех исследованных до сих пор случаях новые сохраняющиеся бозонные величины являются *формами* антисимметричных тензоров. Например, объект пространственной размерностью p (известный как «p-брана») в пространстве-времени размерностью d описывается заданием d пространственно-временных координат $x^\mu(\sigma, t)$ (в общем случае, покрывающих объект перекрывающимися картами) как функций времени и набора p координат σ^r, параметризующих положения на этом объекте. Если многообразие $x^\mu = x^\mu(\sigma, t)$ при фиксированном времени топологически нетривиально, в том смысле, что его нельзя непрерывно деформировать в точку, тогда оно может иметь неисчезающее значение топологически инвариантного интеграла*

$$I^{\mu_1\mu_2\dots\mu_p} = \int d\sigma^1 d\sigma^2 \dots d\sigma^p \sum_{r_1=1}^{p} \sum_{r_2=1}^{p} \dots \sum_{r_p=1}^{p} \varepsilon^{r_1 r_2 \dots r_p} \times \frac{\partial x^{\mu_1}(\sigma,t)}{\partial \sigma^{r_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}(\sigma,t)}{\partial \sigma^{r_2}} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}(\sigma,t)}{\partial \sigma^{r_p}}. \tag{32.3.1}$$

Инвариантность таких интегралов при малых изменениях функций $x^\mu(\sigma,t)$ показывает, в частности, что они инвариантны относительно трансляций в пространстве-времени и, следовательно, могут появляться вместе с P^μ и центральными зарядами в правых частях антикоммутационных соотношений генераторов суперсимметрии [10]. Вычисление коэффициентов при таких тензорах в правых частях антикоммутационных соотношений аналогично обсуждавшемуся в разделе 27.2 вычислению Олива–Виттена для скалярных центральных зарядов Z_{rs} в теориях $N = 2$ суперсимметрии для 4-мерного пространства-времени. В этом разделе мы не будем пытаться вычислять эти коэффициенты или рассматривать другие нетопологические p-формы, которые могут возникать в антикоммутационных соотношениях [11], но просто рассмотрим, как влияет на алгебру суперсимметрии включение сохраняющихся антисимметричных тензоров, коммутирующих с оператором импульса.

Важно, что эта возможность не изменяет ключевой результат, что генераторы суперсимметрии всегда принадлежат фундаментальным спинорным представлениям группы Лоренца. Это объясняется тем, что полностью антисимметричный тензор в евклидовых координатах может иметь не более одного пространственно-временного индекса, равного 1, и не более одного пространственно-временного индекса, равного d, поэтому его «вес», определенный согласно (32.1.2), может быть только ± 1 или 0. Как и раньше, это означает, что вес генератора суперсимметрии может быть только $\pm 1/2$;

---

*Чтобы убедиться, что этот интеграл топологически инвариантен, заметим, что при бесконечно малом изменении $\delta x^\mu(\sigma,t)$ функции $x^\mu(\sigma,t)$ интеграл $I^{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}$ изменяется на величину

$$\delta I^{\mu_1\mu_2\dots\mu_p} = \sum_{n=1}^{p} \sum_{r_1=1}^{p} \sum_{r_2=1}^{p} \dots \sum_{r_p=1}^{p} \int d\sigma^1 d\sigma^2 \dots d\sigma^p \frac{\partial}{\partial \sigma^{r_n}} \left[\varepsilon^{r_1 r_2 \dots r_p} \times \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^{r_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial \sigma^{r_2}} \dots \frac{\partial x^{\mu_{n-1}}}{\partial \sigma^{r_{n-1}}} \delta x^{\mu_n} \frac{\partial x^{\mu_{n+1}}}{\partial \sigma^{r_{n+1}}} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma^{r_p}} \right],$$

которая обращается в нуль, если интеграл берется по компактному многообразию. Он также обращается в нуль при интегрировании по всем σ, при условии, что $\delta x^\mu(\sigma,t)$ быстро стремится к нулю при $\sigma^r \to \infty$.

тогда лоренц-инвариантность требует, чтобы все σ, определенные согласно (32.1.1), были равны $\pm 1/2$, что возможно только в том случае, когда генераторы суперсимметрии принадлежат фундаментальному спинорному представлению $O(d-1,1)$. Кроме того, поскольку новые члены в антикоммутаторах генераторов суперсимметрии коммутируют с импульсом, те же аргументы, что и в разделе 32.1, снова показывают, что генераторы суперсимметрии также коммутируют с импульсом.

Из лоренц-инвариантности следует, что для ненулевых значений «зарядов» вида p-форм антикоммутационные соотношения (32.1.13) и (32.1.21)–(32.1.22) могут иметь только следующий вид (в тех же обозначениях, как в разделе 32.1).

Нечетное d:

$$\{Q_r, Q_s^{\mathrm{T}}\} = g_{rs}\gamma^\lambda \mathscr{C} P_\lambda + \sum_p z_{rs}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p}\mathscr{C}. \tag{32.3.2}$$

Четное d:

$$\{Q_r^\pm, Q_s^{\mp(-1)^{d/2}\mathrm{T}}\} = \left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right) \times \left[g_{rs}^\pm \gamma^\lambda \mathscr{C} P_\lambda + \sum_{\text{нечетные } p} z_{rs}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\pm}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p}\mathscr{C}\right], \tag{32.3.3}$$

$$\{Q_r^\pm, Q_s^{\pm(-1)^{d/2}\mathrm{T}}\} = \left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right) \times \sum_{\text{четные } p} z_{rs}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\pm}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p}\mathscr{C}. \tag{32.3.4}$$

(Напомним, что $\mathscr{C}$ появляется в антикоммутационных соотношениях из-за того, что $\mathscr{J}_{\mu\nu}^{\mathrm{T}} = -\mathscr{C}^{-1}\mathscr{J}_{\mu\nu}\mathscr{C}$; $Q_r^\pm$ есть генераторы суперсимметрии в случае четных d, причем $\gamma_{d+1}Q_r^\pm = \pm Q_r^\pm$; кроме того, $\mathscr{C}^{-1}\gamma_{d+1}\mathscr{C} = (-1)^{d/2}\gamma_{d+1}$.) Для четных d имеем

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\pm}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p} \propto \gamma_{d+1}\gamma_{\mu_{p+1}}\gamma_{\mu_{p+1}}\cdots\gamma_{\mu_d},$$

тогда как для нечетных d

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\pm}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p} \propto \gamma_{\mu_{p+1}}\gamma_{\mu_{p+1}}\cdots\gamma_{\mu_d}.$$

Таким образом, p-браны и $(d-p)$-браны дают одинаковые вклады в (32.3.1)–(32.3.3) для любых d, поэтому можно ограничить p значениями от 0 до $d/2$ для четных d и от 0 до $(d-1)/2$ для нечетных d.

Симметрия антикоммутаторов отражается в условиях симметрии на центральные заряды z^p_{rs} p-брана, входящие в (32.3.2)–(32.3.4). Соотношения (32.А.15) и (32.А.30) приводят к выражениям

$$\gamma_\mu^{\mathrm{T}} = (-1)^n \mathscr{C}^{-1}\gamma_\mu \mathscr{C}, \quad \mathscr{C}^{\mathrm{T}} = (-1)^{n(n+1)/2}\mathscr{C}, \tag{32.3.5}$$

как для $d = 2n$, так и для $d = 2n+1$. Для антисимметризованных произведений $\gamma_{[\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p]}$ из этого следует свойство симметрии

$$\begin{aligned}\gamma_{[\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p]}\mathscr{C} &= (-1)^{pn}(-1)^{n(n+1)/2}\left[\gamma_{[\mu_p}\gamma_{\mu_{p-1}}\cdots\gamma_{\mu_1]}\mathscr{C}\right]^{\mathrm{T}} \\ &= (-1)^{pn}(-1)^{n(n+1)/2}(-1)^{p(p-1)/2}\left[\gamma_{[\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p]}\mathscr{C}\right]^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{32.3.6}$$

Тогда для нечетных d

$$z_{rs}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} = (-1)^{pn}(-1)^{n(n+1)/2}(-1)^{p(p-1)/2} z_{sr}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}, \tag{32.3.7}$$

а для четных d

$$z_{rs}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\pm} = (-1)^{pn}(-1)^{n(n+1)/2}(-1)^{p(p-1)/2} z_{sr}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p(-1)^n(-1)^p\mp}. \tag{32.3.8}$$

Рассмотрим, например, важный случай $N = 1$ суперсимметрии в пространстве-времени $d = 11$ измерений, который представляет собой одну из версий популярного обобщения теории струн с помощью M-теории. Соотношение (32.3.8) показывает, что единственный центральный заряд вида p-формы $z^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}$ обращается в нуль, если не выполнено условие

$$-(-1)^p(-1)^{p(p-1)/2} = +1, \tag{32.3.9}$$

которое удовлетворяется только для p, равных 1, 2, и 5. Значение $p = 1$ реализуется самим оператором импульса, который появляется как от частиц, так и от протяженных объектов. Другие возможности, $p = 2$ и $p = 5$, появляются в теориях с 2-бранами и 5-бранами, соответственно. Отметим, что не может быть других независимых тензорных центральных зарядов, таких как 1-форма, возникающая из 1-браны, поскольку число независимых компонент в P^μ, а также в 2-форме и 5-форме есть

$$11 + \binom{11}{2} + \binom{11}{5} = 528,$$

в то время, как число независимых компонент в антикоммутаторе двух 32-компонентных фундаментальных спиноров тоже есть $32 \times 33/2 = 528$.

Подобно тому, как 0-форма электрического заряда является источником 1-формы калибровочного поля $A_\mu(x)$, так и p-форма сохраняющейся величины $z^{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}$ может служить источником $(p+1)$-формы калибровочного поля $A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{p+1}}$ типа обсуждавшихся в разделе 8.8. Действительно, такие калибровочные поля появляются в теориях супергравитации. Например, как отмечалось в предыдущем разделе, теория $N=1$ супергравитации в пространстве-времени $d=11$ измерений включает безмассовые частицы, состояния которых принадлежат представлению малой группы $O(9)$ в виде 3-формы, и поэтому должны описываться 3-формой калибровочного поля $A_{\mu\nu\rho}(x)$. Изучение решений этой теории супергравитации показывает, что здесь имеются 2-браны [12], которые и обеспечивают источники для $A_{\mu\nu\rho}(x)$. Кроме того, как отмечалось в разделе 8.8, эта калибровочная теория эквивалентна теории с калибровочным полем, имеющим вид $(d-p-2=6)$-формы, которая может иметь в качестве источника 5-форму $z^{\mu_1\dots\mu_5}$, и, действительно, существуют 5-брановые решения, которые служат источниками для этой 6-формы калибровочного поля [13]. Фактически, эти 2-браны и 5-браны [11] вносят вклады в $N=1$ одиннадцатимерную алгебру суперсимметрии.

Приложение А. Спиноры в высших размерностях

В этом приложении описываются фундаментальные спинорные представления алгебры Ли группы Лоренца $O(d-1,1)$ в пространстве-времени с произвольным числом измерений d. Они получены из соответствующей алгебры Клиффорда, состоящей из неприводимого набора конечных матриц γ_μ, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2\eta_{\mu\nu}, \tag{32.A.1}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ диагонально, с элементами +1 на диагонали, за исключением $\eta_{00}=-1$, причем x^0 есть временная компонента. Исходя из этого, можно построить матрицы

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}\equiv\frac{1}{4i}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]=-\mathcal{J}_{\nu\mu}, \tag{32.A.2}$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.4.12) генераторов группы Лоренца

$$i[\mathcal{J}_{\mu\nu},\mathcal{J}_{\rho\sigma}]=\eta_{\nu\rho}\mathcal{J}_{\mu\sigma}-\eta_{\mu\rho}\mathcal{J}_{\nu\sigma}-\eta_{\sigma\mu}\mathcal{J}_{\rho\nu}+\eta_{\sigma\nu}\mathcal{J}_{\rho\mu}. \tag{32.A.3}$$

Как будет видно, хотя выражение (32.A.2) всегда дает представление алгебры Лоренца, оно не всегда неприводимо.

Далее следует различать случаи четной и нечетной размерности.

Четные размерности: $d = 2n$

Чтобы построить удобное конкретное представление γ-матриц в $d = 2n$ измерениях, введем n матриц

$$a_u \equiv \frac{1}{2}(\gamma_{2u-1} + i\gamma_{2u}) \quad u = 1, 2, \ldots, n, \tag{32.A.4}$$

и выберем $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$ эрмитовыми, причем, как обычно, подразумевается, что

$$\gamma_{2n} \equiv -i\gamma_0. \tag{32.A.5}$$

Матрицы a_u удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$\{a_u, a_v^\dagger\} = \delta_{uv}, \quad \{a_u, a_v\} = \{a_u^\dagger, a_v^\dagger\} = 0. \tag{32.A.6}$$

Введем вектор $|0\rangle$ в пространстве представления γ-матриц, определенный условием

$$a_u^\dagger |0\rangle = 0, \tag{32.A.7}$$

и определим базисные векторы

$$|s_1 s_2 \ldots s_n\rangle = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \ldots a_n^{s_n} |0\rangle. \tag{32.A.8}$$

Поскольку $a_u^2 = 0$, действие оператора a_u повышает значение s_u до $+1$, если $s_u = 0$, и обращает вектор в нуль, если $s_u = +1$ (а также дает знак $(-1)^S$, где $S \equiv \sum_{v<u} s_v$), так что все s_u принимают значения 0 или $+1$, и поэтому векторы образуют пространство размерности 2^n. Матрицы a_u в этом базисе имеют вид

$$a_u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times 1 \otimes \ldots \otimes 1, \tag{32.A.9}$$

где последняя матрица 2×2 находится на u-м месте. Выделение эрмитовой и антиэрмитовой частей дает γ-матрицы

$$\gamma_{2u-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1, \tag{32.A.10}$$

$$\gamma_{2u} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1. \tag{32.A.11}$$

(Отметим, что это не совпадает с представлением γ-матриц для 4-мерного пространства-времени, введенном в разделе 5.4 и используемом всюду в этой книге.)

Представление (32.A.10)–(32.A.11) дает простые свойства вещественности и симметрии евклидовых γ-матриц

$$\gamma_i^* = \gamma_i^{\mathrm{T}} = \begin{cases} \gamma_i & \text{для } i \text{ нечетных,} \\ -\gamma_i & \text{для } i \text{ четных,} \end{cases} \qquad (32.\mathrm{A}.12)$$

где $i = 1, 2, \ldots, 2n$. То же самое можно представить как соотношение подобия

$$\mathscr{C}^{-1}\gamma_i\mathscr{C} = (-1)^n\gamma_i^{\mathrm{T}} = (-1)^n\gamma_i^*, \qquad (32.\mathrm{A}.13)$$

где $\mathscr{C}$ — матрица

$$\mathscr{C} \equiv \gamma_2\gamma_4\cdots\gamma_{2n}. \qquad (32.\mathrm{A}.14)$$

Учитывая множитель i в (32.A.5), можно записать для компонент в пространстве Минковского

$$\gamma_\mu^* = -\beta\gamma_\mu^{\mathrm{T}}\beta = -(-1)^n(\mathscr{C}\beta)^{-1}\gamma_\mu(\mathscr{C}\beta), \qquad (32.\mathrm{A}.15)$$

где

$$\beta \equiv \gamma_{2n} = -i\gamma_0. \qquad (32.\mathrm{A}.16)$$

Для любого четного числа измерений можно определить матрицу γ_{2n+1}, которая играет ту же роль, что γ_5 в четырех измерениях. Примем

$$\gamma_{2n+1} \equiv i^n\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{2n}. \qquad (32.\mathrm{A}.17)$$

Фаза здесь выбрана так, что

$$\gamma_{2n+1}^2 = 1. \qquad (32.\mathrm{A}.18)$$

Из антикоммутационных соотношений (32.A.1) следует, что γ_{2n+1} антикоммутирует со всеми другими гамма-матрицами,

$$\{\gamma_{2n+1}, \gamma_\mu\} = 0 \quad \text{для } \mu = 1, 2, \ldots, 2n-1, 0. \qquad (32.\mathrm{A}.19)$$

Можно убедиться, что γ_{2n+1} действительна и симметрична,

$$\gamma_{2n+1}^\dagger = \gamma_{2n+1}^* = \gamma_{2n+1}^{\mathrm{T}} = \gamma_{2n+1}. \qquad (32.\mathrm{A}.20)$$

Из (32.A.19) видно, что γ_{2n+1} коммутирует с генераторами (32.A.2) алгебры $O(2n-1,1)$:

$$[\gamma_{2n+1}, \mathscr{J}_{\mu\nu}] = 0, \qquad (32.\mathrm{A}.21)$$

так что $\mathscr{J}_{\mu\nu}$ не может реализовать *неприводимое* представление алгебры $O(2n-1,1)$. Вместо этого можно определить пару «вейлевских» неприводимых представлений с помощью проектирования на подпространства с $\gamma_{2n+1} = \pm 1$:

$$\mathscr{J}_{\mu\nu}^{\pm} \equiv \mathscr{J}_{\mu\nu}\left(\frac{1 \pm \gamma_{2n+1}}{2}\right). \qquad (32.\mathrm{A}.22)$$

Из формулы (32.A.15) и соотношения $(\mathscr{C}\beta)^{-1}\gamma_{2n+1}\mathscr{C}\beta = -(-1)^n\gamma_{2n+1}$ находим, что комплексное сопряжение и транспонирование вейлевских лоренцевых генераторов есть

$$(\mathscr{J}^{\pm}_{\mu\nu})^* = -(\mathscr{C}\beta)^{-1}\mathscr{J}^{\mp(-1)^n}_{\mu\nu}(\mathscr{C}\beta), \tag{32.A.23}$$

$$(\mathscr{J}^{\pm}_{\mu\nu})^{\mathrm{T}} = -\mathscr{C}^{-1}\mathscr{J}^{\mp(-1)^n}_{\mu\nu}\mathscr{C}. \tag{32.A.24}$$

Следовательно, для четных n каждое из пары вейлевских неприводимых представлений эквивалентно комплексно-сопряженному другого, тогда как для нечетных n каждое представление эквивалентно его собственному комплексно сопряженному*. Для нечетных n нужно еще решить, будут ли вейлевские представления *действительными*, что означало бы существование матрицы $\mathscr{S}$ такой, что

$$-\left(\mathscr{S}\mathscr{J}^{\pm}_{\mu\nu}\mathscr{S}^{-1}\right)^* = \mathscr{S}\mathscr{J}^{\pm}_{\mu\nu}\mathscr{S}^{-1}, \tag{32.A.25}$$

или *псевдодействительными*, и тогда такой матрицы не существует. Используя (32.A.23), можно переписать условие (32.A.23) как требование, что $\mathscr{S}^{-1}\mathscr{S}^*(\mathscr{C}\beta)^{-1}$ коммутирует со всеми $\mathscr{J}^{\pm}_{\mu\nu}$. Поскольку матрицы $\mathscr{J}^{\pm}_{\mu\nu}$ образуют неприводимый набор, это означает, что $\mathscr{S}^{-1}\mathscr{S}^*(\mathscr{C}\beta)^{-1}$ должно быть пропорционально единичной матрице,

$$\mathscr{C}\beta = \alpha\mathscr{S}^{-1}\mathscr{S}^*, \tag{32.A.26}$$

с некоторой константой α. Чтобы это было возможно, должно выполняться условие

$$\mathscr{C}\beta(\mathscr{C}\beta)^* = |\alpha|^2\cdot 1. \tag{32.A.27}$$

Но $\mathscr{C}\beta = \gamma_2\gamma_4\ldots\gamma_{2n-2}$, а так как все γ_i с четными i являются мнимыми, имеем

$$\mathscr{C}\beta(\mathscr{C}\beta)^* = (-1)^{n-1}(\gamma_2\gamma_4\ldots\gamma_{2n-2})^2 = (-1)^a\cdot 1, \tag{32.A.28}$$

где

$$a = (n-1)+(n-2)+\ldots+1 = n(n-1)/2. \tag{32.A.29}$$

Следовательно, вейлевские представления могут быть действительными только для $n=1 \pmod 4$ и должны быть псевдодействительными для $n=3$ (mod 4).

---

*Мы говорим, что одно представление алгебры Лоренца матрицами $\mathscr{L}_{\mu\nu}$ (такими, как $\mathscr{J}_{\mu\nu}$ или $\mathscr{J}^+_{\mu\nu}$, или $\mathscr{J}^-_{\mu\nu}$) есть комплексно-сопряженное другому представлению матрицами $\mathscr{L}'_{\mu\nu}$, если $\mathscr{L}'_{\mu\nu} = -\mathscr{L}^*_{\mu\nu}$. Знак минус здесь включен из-за того, что матрицы, которые представляют элементы группы Лоренца вблизи тождественного преобразования, имеют вид $1+\frac{1}{2}i\omega^{\mu\nu}\mathscr{L}_{\mu\nu}$ с бесконечно малыми действительными $\omega^{\mu\nu}$.

Для использования в разделе 32.1 отметим также, что

$$\mathscr{C}^* = (-1)^n \mathscr{C}, \quad \mathscr{C}^{\mathrm{T}} = (-1)^{n(n+1)/2} \mathscr{C}, \quad \mathscr{C}^{-1} = (-1)^{n(n-1)/2} \mathscr{C}, \tag{32.A.30}$$

и поэтому соотношение (32.A.13) дает

$$(\mathscr{C}\gamma_\mu)^{\mathrm{T}} = (-1)^{n(n-1)/2} \mathscr{C}\gamma_\mu. \tag{32.A.31}$$

Матрицы γ_μ образуют вектор, в том смысле, что

$$[\mathscr{J}_{\mu\nu}, \gamma_\rho] = -i\gamma_\mu \eta_{\nu\rho} + i\gamma_\nu \eta_{\mu\rho}, \tag{32.A.32}$$

и они имеют нормальную четность, т. е.

$$\beta\gamma_0\beta = +\gamma_0, \quad \beta\gamma_i\beta = -\gamma_i \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, 2n-1. \tag{32.A.33}$$

Антикоммутационное соотношение (32.A.1) не позволяет сконструировать новые тензоры с использованием симметричных произведений матриц γ, но оно позволяет построить антисимметричные тензоры ранга вплоть до $2n$,

$$\gamma_{[\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p]}, \tag{32.A.34}$$

где $p \leqslant 2n$, а квадратные скобки означают антисимметризацию. Число независимых пространственно-временных компонент каждого тензора равно биномиальному коэффициенту $\binom{2n}{p}$, так что полное число матриц этого типа есть

$$\sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} = 2^{2n}. \tag{32.A.35}$$

Ни один из этих тензоров не обращается в нуль (в чем можно убедиться, вычисляя их квадраты), и все они имеют разные законы преобразования относительно преобразований Лоренца и(или) четности. Поэтому они линейно-независимы, так что любую матрицу $2^n \times 2^n$ можно записать как линейную комбинацию 2^{2n} антисимметричных тензоров (32.A.34).

Нечетные размерности: $d = 2n+1$

Рассмотрим теперь пространство-время нечетной размерности $d = 2n + 1$. Мы можем легко найти набор $2n + 1$ дираковских матриц $n \times n$, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям (32.A.1): мы просто используем те же самые γ_μ с $\mu = 1, 2, \ldots 2n - 1, 0$, как и для $d = 2n$, и добавим матрицу γ_{2n+1}, определенную выражением (32.A.17). Согласно

(32.A.18) и (32.A.19), эти гамма-матрицы удовлетворяют антикоммутационным соотношениям (32.A.1) с индексами μ и ν, пробегающими значения $1, 2, \ldots, 2n-1, 0, 2n+1$, причем снова $\gamma_0 = i\gamma_{2n}$.

В отличие от случая четной размерности, здесь нельзя найти какую-либо нетривиальную матрицу, коммутирующую со всеми лоренцевскими генераторами, поскольку, как показывают соотношения (32.A.17) и (32.A.18), произведение $2n+1$ гамма-матриц тривиально:

$$\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{2n}\gamma_{2n+1} = i^{-n}\cdot 1. \tag{32.A.36}$$

Поэтому лоренцевские генераторы (32.A.2) с индексами μ и ν, пробегающими значения $1, 2, \ldots, 2n-1, 0, 2n+1$, сами образуют неприводимое представление группы Лоренца. Чтобы установить их свойства действительности, заметим, что γ_{2n+1} действительна, симметрична и удовлетворяет соотношению $(\mathscr{C}\beta)^{-1}\gamma_{2n+1}\mathscr{C}\beta = -(-1)^n\gamma_{2n+1}$, так что (32.A.15) применимо как для $\mu = 2n+1$, так и для $\mu = 1, 2, \ldots, 2n-1, 0$. Поэтому генераторы Лоренца удовлетворяют соотношениям

$$\mathscr{J}^*_{\mu\nu} = -(\mathscr{C}\beta)^{-1}\mathscr{J}_{\mu\nu}\mathscr{C}\beta, \tag{32.A.37}$$

$$\mathscr{J}^{\mathrm{T}}_{\mu\nu} = -\mathscr{C}^{-1}\mathscr{J}_{\mu\nu}\mathscr{C}, \tag{32.A.38}$$

так что для любой нечетной размерности фундаментальное спинорное представление является либо действительным, либо псевдодействительным. Те же аргументы, как в случае $d = 2n$, показывают, что спинорные представления для $d = 2n+1$ снова действительны или псевдодействительны в зависимости от знака $(-1)^a$ в (32.A.28), и поэтому, согласно (32.A.29), они действительны для $n = 0 \pmod 4$ и $n = 1 \pmod 4$, но псевдодействительны для $n = 2 \pmod 4$ и $n = 3 \pmod 4$.

Снова можно построить антисимметричные тензоры (32.A.34), теперь ранга до $2n+1$, но только половина из них будут линейно-независимыми, поскольку они удовлетворяют соотношениям

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2n+1}}\gamma_{[\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p]} \propto \gamma^{[\mu_{p+1}}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}]}, \tag{32.A.39}$$

где, как обычно, $\varepsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2n+1}}$ полностью антисимметрично. (Для $d = 2n$ такие соотношения невозможны, поскольку левая и правая стороны (32.A.39) имеют противоположные четности; однако этот аргумент неприменим для $d = 2n+1$, где $\varepsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2n+1}}$ имеет положительную пространственную четность.) Полное число независимых матриц типа (32.A.34) теперь равно

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{p} = 2^{2n}, \tag{32.A.40}$$

так что любую матрицу $2n \times 2n$ можно записать как линейную комбинацию $n+1$ независимых антисимметричных тензоров (32.A.34) с $0 \leqslant p \leqslant n+1$.

Наконец, отметим, что как для $d = 2n$, так и для $d = 2n+1$ $O(d-1,1)$ алгебры Дирака и Лоренца связаны с соответствующими $O(d)$ алгебрами посредством подстановок

$$\gamma_{2n} \equiv -i\gamma_0, \quad \mathcal{J}_{i2n} \equiv -i\mathcal{J}_{i0}, \tag{32.A.41}$$

так что

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}, \tag{32.A.42}$$

и

$$\mathcal{J}_{ij} = \frac{1}{4i}[\gamma_i, \gamma_j] = -\mathcal{J}_{ij}, \tag{32.A.43}$$

с индексами i и j, пробегающими от 1 до d. Из (32.A.42) следует, что $\mathcal{J}_{ij}^2 = 1/4$ для $i \neq j$, так что собственные значения каждого $\mathcal{J}_{ij}$ ограничены значениями $\pm 1/2$. Более детально, генераторы картановой подалгебры в фундаментальном спинорном представлении имеют вид

$$\mathcal{J}_{2u-1\,2u} = \frac{1}{2}[a_u, a_u^*] = a_u a_u^* - \frac{1}{2}, \tag{32.A.44}$$

причем базисные векторы (32.A.8) есть собственные векторы этих генераторов

$$\mathcal{J}_{2u-1\,2u}|s_1 s_2 \ldots s_n\rangle = \left(s_u - \frac{1}{2}\right)|s_1 s_2 \ldots s_n\rangle. \tag{32.A.45}$$

Различие между размерностями $d = 2n$ и $d = 2n+1$ состоит в том, что для $d = 2n$ имеется два фундаментальных спинорных представления, в которых собственные значения $(-2\sigma_1)(-2\sigma_2)\ldots(-2\sigma_n)$ матрицы γ_{2n+1} ограничены значениями $+1$ и -1, тогда как для $d = 2n+1$ существует только одно фундаментальное спинорное представление, в котором нет такого ограничения на σ_u.

Ограничение на собственные значения $\pm 1/2$ для каждого $\mathcal{J}_{ij}$ было использовано в разделе 32.1 для идентификации фундаментальных спинорных представлений как единственно возможных представлений алгебры Лоренца, которые можно представить генераторами фермионной симметрии. Разумеется, исходя из этого условия, можно было бы сделать вывод, что $O(d)$ генераторы можно задать в базисе вида (32.A.8), с $s_u = \sigma_u + 1/2$, и провести все выкладки этого приложения в обратном порядке, используя формулы (32.A.4)–(32.A.7) (вместе с (32.A.17) для нечетных d), чтобы выразить генераторы Лоренца через набор γ_μ, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям (32.A.1).

Задачи

1. Проведите классификацию мультиплетов безмассовых частиц для каждого разрешенного вида суперсимметрии в 6-мерном пространстве-времени, если все центральные заряды обращаются в нуль.

2. Предположим, что было бы возможно иметь безмассовые частицы любого спина вплоть до $j = 3$, но не выше. Учитывая тот факт, что безмассовые частицы со спином 2 существуют, найдите, какова максимальная размерность пространства-времени, при которой возможна суперсимметрия. Чему равно максимальное число генераторов суперсимметрии для каждого разрешенного значения размерности пространства-времени?

3. Рассмотрим суперсимметрии типов IIA и IIB в 10-мерном пространстве-времени. Предположим, что в антикоммутационных соотношениях суперсимметрии возникают только скалярные центральные заряды. Выразите нижнюю границу на массы частиц через эти центральные заряды. Опишите БСП мультиплеты массивных частиц, разрешенные для частиц, массы которых находятся на этой нижней границе.

4. Перечислите возможные независимые скалярные и(или) тензорные центральные заряды для $N = 1$ суперсимметрии в 9-мерном пространстве-времени.

Список литературы

1. T. Kaluza, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.* **Kl**, 966 (1921).

2. O. Klein, *Z. Phys.* **37**, 895 (1926); *Nature* **118**, 516 (1926).

3. J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B46**, 61 (1972); R. C. Brower and K. A. Friedman, *Phys. Rev.* **D7**, 535 (1972).

4. Теория супергравитации в 11 пространственно-временных измерениях была сформулирована в работе: E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk, *Phys. Lett.* **76B**, 409 (1978). Идея о том, что теории струн типа IIA со слабой связью в 10 пространствнно-временных измерениях имеют 11-мерное происхождение, высказана в работе: M. J. Duff, P. S. Howe, T. Inami, and K. S. Stelle, *Phys. Lett.* **B191**, 70 (1987). Это было показано для теорий струн типа IIA с сильной связью в 10 измерениях в работе:

P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **B350**, 184 (1995). Связи между этими теориями и всеми другими 10-мерными теориями струн были отмечены в работе: E. Witten, *Nucl. Phys.* **B445**, 85 (1995).

5. R. Haag, J. T.. Lopuszanski, and M. F. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B88**, 257 (1975).

6. W. Nahm, *Nucl. Phys.* **B135**, 149 (1978).

6а. См., например, H. W. Turnbull and A. C. Aitkens, *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* (Dover Publications, New York, 1961).

6б. Полезный обзор см.: J. Strathdee, *Int. J. Mod. Phys.* **A2**, 273 (1987).

7. Подобные рассуждения в 4-мерном пространстве-времени см. в работах S. Weinberg, *Phys. Rev.* **135**, B1049 (1964); *Phys. Rev.* **138**, B988 (1965); R. P. Feynman, unpublished; M. T. Grisaru and H. N. Pendleton, *Phys. Lett.* **67B**, 323 (1977). Рассуждения в пространстве-времени бóльших размерностей аналогичны.

8. См., например,: J. Hughes, J. Liu, and J. Polchinski, *Phys. Lett.* **B180**, 370 (1986); E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **B189**, 75 (1987); A. Achúcarro, J. M. Evans, P. K. Townsend, and D. L. Wiltshire, *Phys. Lett.* **B198**, 441 (1987); P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **B202**, 53 (1988); P. K. Townsend, in *Particles, Strings, and Cosmology: Proceedings of Workshop on Current Problems in Particle Theory 19 at Johns Hopkins University, March 1995* (World Scientific, Singapore, 1996); J. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998). Обзор см.: M. J. Duff, R. R. Khuri, and J.-X. Lu, *Phys. Rep.* **259**, 213 (1995); A. Giveon and D. Kutasov, 1998 preprint hep-th/9802067.

9. J. W. Van Holten and A. Van Proeyen, *J. Phys. A.: Math. Gen.* **15**, 3763 (1982).

10. J. A. de Azcàrraga, J. P. Gauntlett, J. M. Izquierdo, and P. K. Townsend *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2443 (1989).

11. D. Sorokin and P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **B412**, 265 (1997); J. P. Gauntlett, J. Gomis, and P. K. Townsend, *J. High Energy Phys.* **9801**, 003 (1998).

12. Ковариантные полевые уравнения для этих 2-бран получены в работе: E. Bergshoeff, E. Sezgin, P. K. Townsend [8], and *Ann. Phys.* (NY) **185**, 330 (1988). Демонстрация того, что эти 2-браны являются решениями полевых уравнений супергравитации, обеспечивающими источники калибровочных полей вида 3-форм, приведена в работе: M. J. Duff and K. S. Stelle, *Phys. Lett.* **B253**, 113 (1991).

13. Демонстрация того, что эти 2-браны являются решениями полевых уравнений супергравитации, обеспечивающими источники калибровочных полей вида 6-форм, приведена в работе: R. Gueven, *Phys. Lett.* **B276**, 49 (1992). Ковариантные уравнения для этих 5-бран даны в работах: M. Aganagic, J. Park, C. Popescu, and J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B496**, 191 (1997); P. S. Howe and E. Sezgin, *Phys. Lett.* **B394**, 62 (1997); P. Pasti, D. Sorokin, and M. Tonin, *Phys. Lett.* **B398**, 41 (1997); P. S. Howe, E. Sezgin, and P. C. West, *Phys. Lett.* **B399**, 49 (1997); I. Bandos, K. Lechner, A. Nurmagambetov, P. Pasti, D. Sorokin, and M. Tonin, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4332 (1997).

Указатель авторов

Предметный указатель

Книга американского физика-теоретика, лауреата Нобелевской премии Стивена Вайнберга "Квантовая теория полей" — это фундаментальный труд выдающегося ученого, принимавшего активное участие в создании современной теории. Изложение отличается оригинальным подходом и полнотой. Как отмечает автор, его целью было не только отразить исторический путь развития, но и показать неизбежность квантовой теории поля как единственной последовательной схемы, объединяющей принципы квантовой механики и теории относительности.

В настоящее время внимание многих специалистов обращено к более амбициозным моделям релятивистских струн и поверхностей, претендующим на роль "теории всего". Несмотря на несомненную привлекательность этих идей, нужно сказать, что сегодня их последовательная формулировка является делом будущего. Но независимо от того, насколько оправдаются эти надежды, квантовая теория поля останется рабочей моделью описания физики частиц при умеренных энергиях. На заре квантовой теории поля многие ученые также полагали, что она является "теорией всего", в связи с чем большое внимание уделялось обсуждению непротиворечивости и внутренней замкнутости квантовой электродинамики и некоторых других моделей. В результате этих дискуссий стало ясно, что как квантовая электродинамика, так и Стандартная модель имеют ограниченную область применимости, что нисколько не мешает им прекрасно описывать взаимодействия элементарных частиц в этой области. Нельзя не согласиться с автором, что все существующие модели теории поля являются по сути дела "эффективными теориями", которые могут быть получены как определенный предел более фундаментальной теории. По моему мнению, такая же судьба ждет и современные модели струн и поверхностей.

Важно отметить, что хотя в этих моделях основными являются не точечные частицы и соответствующие им квантовые поля, а протяженные объекты, для их исследования используются главным образом методы квантовой теории поля или их прямые обобщения. Поэтому глубокое знание квантовой теории поля необходимо любому специалисту в области физики элементарных частиц. Более того, методы квантовой теории поля успешно применяются и в различных областях физики многих тел. Без этих методов невозможно представить себе современное развитие физики твердого тела и конденсированных сред.

Полагаю, что книга С. Вайнберга найдет широкий круг читателей — как студентов, впервые изучающих квантовую теорию поля, так и специалистов, которым будет полезно взглянуть на уже известные им проблемы с новой точки зрения и получить "из первых рук" информацию о современном состоянии теории.

Академик РАН А. А. Славнов